Григорянц Армен Артемович

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АНАЛИЗА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ
ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА
ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ



МАКС ПРЕСС

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Факультет
вычислительной математики
и кибернетики

А. А. Григорянц

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АНАЛИЗА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебник

МОСКВА – 2026

УДК 515.12+517.98+514.76(075.8) https://elibrary.ru/ofgxws
ББК 22.162.4я73
Г83

Рецензент:
М. В. Коровина — доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры общей математики факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Григорянц А. А.

Дополнительные главы анализа в примерах и задачах : учебник / А. А. Григорянц. — Москва : МАКС Пресс, 2026. — 176 с.

ISBN 978-5-317-07636-8

https://doi.org/10.29003/m5416.978-5-317-07636-8

Книга посвящена единому изложению ключевых понятий анализа — предела, дифференциала и интеграла — на современном языке общей топологии и фильтров. Показано, как многочисленные определения пределов, производных и интегралов, встречающиеся в стандартных курсах, оказываются частными случаями общих конструкций: предела по фильтру, внешнего дифференциала, интеграла дифференциальной формы. Изложены начала теории топологических векторных пространств, необходимые для приложений в теории обобщённых функций, и элементы гладких многообразий.

Книга содержит краткое изложение теории; доказываемые утверждения разбиты на серии задач с решениями, так что читатель может пройти весь путь самостоятельно, заглядывая в решения по необходимости.

Учебник рассчитан на студентов и аспирантов математических специальностей, а также преподавателей, интересующихся современным взглядом на классический анализ.

Ключевые слова: общая топология, метрическое пространство, фильтр, предел по фильтру, аксиомы отделимости, непрерывность, компактность, связность, равномерное пространство, топологическая группа, топологическое векторное пространство, пространство основных функций, тензор, внешняя алгебра, гладкое многообразие, касательное пространство, векторное расслоение, дифференциальная форма, интегрирование на многообразиях, формула Стокса.

УДК 515.12+517.98+514.76(075.8)
ББК 22.162.4я73

Замечания и опечатки: ar.grig8@gmail.com

Электронная версия печатного издания; нумерация страниц может отличаться от печатной.

ISBN 978-5-317-07636-8

© Григорянц А. А., 2026
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2026

Оглавление

Предисловие **4**

1 Элементы общей топологии **9**
1.1 Используемые понятия и определения 9
1.2 Метрические пространства (МП) 16
1.3 Топологические пространства (ТП) 18
1.4 Отделимость 29
1.5 Теория пределов 32
1.6 Непрерывность 44
1.7 Некоторые топологические конструкции 49
1.8 Компактность 56
1.9 Связность 72
1.10 Равномерные пространства 76

2 Элементы функционального анализа **89**
2.1 Топологические группы 89
2.2 Топологические векторные пространства (ТВП) 93

3 Элементы дифференциальной геометрии **123**
3.1 Предварительные сведения 123
3.2 Гладкие многообразия 144
3.3 Интегрирование на многообразиях 159
Литература 170

Предисловие

Классические начальные университетские курсы анализа, алгебры и геометрии для математических специальностей вузов руководствуются идеей упрощенного изложения. Это правильно: первая встреча с пределом, производной, интегралом, абстрактными алгебраическими и геометрическими структурами не должна упираться в общие конструкции и нагромождение абстракций. Но за упрощение приходится платить прозрачностью. Понятия вводятся во множестве частных обличий, родство между ними остаётся за кадром, а доказательства повторяются с малыми вариациями там, где работает одна общая теорема.

Настоящая книга – попытка восстановить эту прозрачность для ряда ключевых понятий анализа, показать единство многочисленных определений пределов, производных и интегралов, встречающихся в стандартных курсах. Отметим, что с 70-х годов прошлого столетия огромная работа в этом направлении велась на мехмате МГУ. Результатом её стали прекрасные учебники В.А. Зорича [13,14], Ю.И. Манина и А.И. Кострикина [15,16], М.М. Постникова [18], В.И. Арнольда [9].

Ещё одна задача книги – приоткрыть студенту современное видение основ функционального анализа, не только как теории нормированных и гильбертовых пространств – обычного подхода традиционных учебных курсов, но с более общих позиций топологических групп и топологических векторных пространств [4, 10, 21]. Это не обобщение ради обобщения, а необходимость для приложений в теории обобщённых функций, неограниченных операторов, уравнений математической физики и смежных дисциплин.

Методологически книга построена следующим образом: доказываемые утверждения разбиты на серии задач с решениями; читатель может пройти весь путь самостоятельно, заглядывая в решения по необходимости.

На протяжении всей истории человечество пыталось осмыслить философию бесконечности. Издревле обсуждалась дихотомия: *потенци-*

альная бесконечность (бесконечность как процесс) $\leftrightarrow$ *актуальная бесконечность* (бесконечность как объект). Мейнстрим древнегреческой философской мысли (например, в лице Аристотеля) категорически отвергал актуальную бесконечность в пользу потенциальной.

Отцы-основатели анализа – Ньютон и Лейбниц – придерживались разных концепций бесконечности. Ньютон мыслил флюксиями и флюэнтами – математизацией движения; его бесконечность потенциальна: это процесс, который можно продолжать неограниченно. Лейбниц оперировал дифференциалами dx как реально существующими объектами, т.е. актуальной бесконечной малостью. Арифметизация анализа в XIX веке (Больцано, Коши, Вейерштрасс) закрепила в понятии предела ньютоновскую линию: язык (ε, δ) описывает процесс приближения.

Теория множеств Кантора принесла в математику актуальную бесконечность как аксиому. Но уже сформировавшийся к этому времени анализ остался на позициях потенциальной бесконечности в вопросах формализации предела и, более широко, осмысления понятия *близости*.

К началу XX века стало ясно, что близость нужно проверять не только в числовых множествах, но и в объектах более сложной природы – функциональных пространствах. Возникла необходимость создания более общей теории предела. Путь этот занял три десятилетия: метрические пространства Фреше (1906), аксиоматика окрестностей Хаусдорфа (1914), оператор замыкания Куратовского (1922), направленности Мура и Смита (1922), открытые множества Александрова и Урысона (1923) и, наконец, фильтры Картана (1937). Всё это сформировало основы современной общей топологии. Книга последовательно пользуется этим итоговым языком – языком топологии и фильтров [11].

«Три кита», на которых держится анализ, – *предел*, *дифференциал* и *интеграл*. Поясним на них, что мы понимаем под прозрачностью.

Предел. Сколько определений предела выучивает студент? Предел последовательности; предел функции в точке; пределы слева и справа; пределы при $x \to \pm\infty$; предел интегральных сумм при измельчении разбиений; поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей. Для каждого заново формулируются и доказываются одни и те же теоремы – о единственности, об арифметике пределов, о предельном переходе в неравенствах – и доказательства подозрительно похожи друг на друга. Причина в том, что все эти определения – частные случаи одного: предела по *фильтру*. Так, предел последовательности – это предел по фильтру Фреше, предел справа – по фильтру следов правых полуокрестностей, а интеграл Римана – предел по фильтру из-

мельчений разбиений с отмеченными точками; общие теоремы при этом доказываются один раз.

Дифференциал. Производная и дифференциал функций одной переменной, частные производные и матрица Якоби функций многих переменных, дивергенция, ротор и градиент скалярных и векторных полей, производные Фреше и Гато – многообразие понятий, с которыми работает студент на первых двух курсах. Все эти понятия выражаются и обобщаются одним объектом – *внешним дифференциалом*.

С одной стороны, производная – предел разностных отношений: понятие аналитическое. С другой – дифференцирование линейно и подчиняется тождеству Лейбница $d(fg) = f\,dg + g\,df$: свойства чисто алгебраические. Оказывается, что многие свойства, связанные с производными и часто формулируемые и доказываемые аналитически, неожиданно имеют чисто алгебраическую природу. Таково, например, свойство локальности дифференциальных операторов: если функции f и g совпадают в окрестности точки, то их образы при применении дифференциального оператора D тоже будут совпадать в окрестности точки. Другими словами, значение Df в точке x зависит лишь от значений f в сколь угодно малой окрестности точки x. Свойство выглядит абсолютно аналитическим, но может быть сформулировано и доказано чисто алгебраически.

Интеграл. Интегралов в классическом курсе тоже много: интеграл Римана на отрезке, кратный, повторный, криволинейные первого и второго рода, поверхностные первого и второго рода, несобственный. Все они сводятся к двум конструкциям – интегралу *плотности* и интегралу *дифференциальной формы*, выражающимся одна через другую (в ориентируемом случае).

Функцию нельзя проинтегрировать – при замене переменной функция заменяется на композицию с функцией замены, а у интеграла выскакивает якобиан (или его модуль). Откуда видим, что объект, который интегрируют, при заменах преобразуется не как функция, что на самом деле показывает и классическая запись $\int f(x)\,dx$. Итак, интегрируется дифференциал $f\,dx$, но в книгах обычно пишут про интеграл от функции, что, конечно, затемняет смысл понятия «интеграл».

Инвариантность относительно замен переменных делает интеграл формы (плотности) геометрическим объектом: криволинейный интеграл второго рода – это интеграл 1-формы вдоль кривой, поверхностный – интеграл 2-формы по поверхности, а общая формула Стокса $\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega$ объединяет формулу Ньютона – Лейбница, Грина, Гаусса – Остроградского и классическую формулу Стокса о циркуляции.

Обратите внимание, что короткая, простая для запоминания формула объединяет множество громоздких формул, являющихся её частными случаями, доказательство которых вместе с введением необходимых понятий и промежуточными результатами занимает добрую треть традиционного курса анализа.

Несмотря на то, что первая учебная литература [5], излагающая теорию интегрирования с общих геометрических позиций, появилась аж в 1965 году, в большинстве русскоязычных учебников эти идеи до сих пор не излагаются или излагаются в качестве дополнительного, необязательного материала.

Функциональный анализ. В 1906 году в своей диссертации [1] Фреше ввёл два понятия: L-классы (абстрактные пространства с аксиоматическим пределом последовательностей) и E-классы (именуемые сегодня *метрическими пространствами*). Первое оказалось неудачным и вскоре было забыто, второе, наоборот, было очень плодотворным и привело к созданию богатой теории метрических пространств. Странным образом в учебной традиции до сих пор имплицитно присутствует неудачная идея L-классов Фреше, причём само определение никто обычно не даёт. Но часто можно услышать или прочитать фразу «сходимость в данном пространстве вводится следующим образом...», которая является архаизмом столетней давности.

Секвенциальный язык (язык последовательностей) давно считается в общей топологии моветоном. Секвенциальные определения могут быть неэквивалентны общетопологическим даже при наличии первой аксиомы счётности. Например, секвенциальная компактность не влечёт компактность даже у первосчётных пространств.

Тем не менее, при наличии первосчётности многие секвенциальные определения эквивалентны общетопологическим. С другой стороны, оказывается, что эквивалентность многих секвенциальных и общетопологических понятий имеет место для достаточно широкого класса неперво счётных пространств. Например, таковы индуктивные пределы первосчётных пространств, к которым относится очень важное для приложений пространство основных функций.

К сожалению, этот круг вопросов часто полностью игнорируется в курсах функционального анализа и общетопологические определения просто подменяются секвенциальными. В этой книге мы попытались немного приоткрыть эту тему и аккуратно изложить терминологию и обоснование применения секвенциальных понятий.

Мы предполагаем знакомство читателя с фактами первого курса ана-

лиза (они цитируются без доказательства), началами линейной алгебры и наивной теорией множеств. Также опущены доказательства некоторых трудных теорем из теории топологической размерности, требующих либо сложной техники комбинаторной топологии [7], либо абстракций алгебраической топологии [19], но они нужны лишь для пары фактов, изложенных в книге. Например, для некомпактной версии теоремы Уитни о вложении. В основном материал строится с нуля сериями задач.

Глава 1

Элементы общей топологии

1.1 Используемые понятия и определения

Мы часто опускаем в задачах слова "проверить, что" или "доказать, что". Если в задаче сделано утверждение, то в решении требуется доказать это утверждение.

Мы считаем, что читатель знаком с элементами теории множеств. Напомним некоторые понятия и обозначения. Стандартная логическая символика: $\forall$ –"для любого", $\exists$ – "существует", $\wedge$ – логическое "и", $\vee$ – логическое "или", $\neg$ – логическое отрицание, $\Longrightarrow$ – "следует, влечёт", $\Longleftrightarrow$ – равносильно, ": $\Longleftrightarrow$ " – равносильно по определению. Введём также квантор "не более одного" $!x : \Phi(x)$ означает $\forall x\ \forall y : \Phi(x) \wedge \Phi(y) \Longrightarrow x = y$, т.е. выполнение свойства Φ для двух элементов x и y влечёт их равенство. Соответственно $\exists! x : \Phi(x)$ означает $\exists x : \Phi(x) \wedge !x : \Phi(x)$.

Числовые множества обозначаем как обычно: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Если $Y \subset X$, мы говорим, что Y *подмножество* X или, что X *надмножество* Y. Множество всех подмножеств (булеан) множества X обозначаем $\mathscr{P}(X)$: $\mathscr{P}(X) = \{Y \mid Y \subset X\}$. Элементы X обозначаем строчными латинскими буквами $x, y \ldots$, подмножества X – прописными латинскими $U, V, Y \ldots$, подмножества $\mathscr{P}(X)$ – строчными греческими буквами $\alpha, \beta, \tau, \sigma \ldots$

Определение 1.1.1. Напомним, что:

1. *Объединение (пересечение)* множества $\alpha \subset \mathscr{P}(X)$ – это множество, содержащее те и только те элементы, которые лежат в некотором

(любом) элементе α:

$$\bigcup \alpha = \bigcup_{Y \in \alpha} Y = \{x \in X \mid \exists Y \in \alpha : \ x \in Y\}$$
$$\bigcap \alpha = \bigcap_{Y \in \alpha} Y = \{x \in X \mid \forall Y \in \alpha : \ x \in Y\}$$

2. *След* α на $Y \subset X$ обозначаем $\alpha|_Y$: $\alpha|_Y = \{Z \cap Y \mid Z \in \alpha\}$
3. *Дополнение* подмножества $Y \subset X$ обозначаем $\mathbf{C}Y$: $\mathbf{C}Y = X \setminus Y$
4. *Декартово произведение* множеств X_1 и X_2 – это множество всех упорядоченных пар (x_1, x_2), где первый элемент лежит в X_1, второй лежит в X_2 : $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1 \ \wedge \ x_2 \in X_2\}$. *Декартова степень*: $X^n = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n \text{ раз}}$
5. *Функция (отображение)* $f : X \to Y$ из X в Y – это подмножество декартова произведения $f \subset X \times Y$, такое что существует единственная пара (x, y) с данным первым элементом x, принадлежащая этому подмножеству: $\forall x \in X \ \exists! y \in Y : \ (x, y) \in f$. Мы пишем $f(x) = y$ или $f : x \mapsto y$ вместо $(x, y) \in f$. Композиция функций $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ – это функция $g \circ f : X \to Z$, определяемая соотношением $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Для функции f обозначим область определения $\mathrm{dom}(f) = \{x : \exists y : (x, y) \in f\}$ и область значений $\mathrm{ran}(f) = \{y : \exists x : (x, y) \in f\}$.
6. Функция $f : X \to Y$ называется *инъективной* или *вложением*, если переводит разные элементы в разные, т.е. $\forall y \in Y \ !x \in X : f(x) = y$; *сюръективной* или *наложением*, если прообраз любого элемента непуст, т.е. $\forall y \in Y \ \exists x \in X : \ f(x) = y$; *биективной*, если она сюръективна и инъективна, т.е. $\forall y \in Y \ \exists! x \in X : \ f(x) = y$
7. *Семейство* множеств с индексным множеством I – это функция $f : I \to \alpha$. Для любого $i \in I$ обозначим множество $f(i) \in \alpha$ через X_i. Тогда семейство записывают в виде $\{X_i \mid i \in I\}$ или $\{X_i\}_{i \in I}$. Под объединением (пересечением) семейства понимают объединение (пересечение) множества $f(I)$. Запись: $\bigcup_{i \in I} X_i$, $\bigcap_{i \in I} X_i$.
8. *Дизъюнктное объединение* семейства $\{X_i \mid i \in I\}$ – это объединение "расклеенных" множеств из семейства, т.е. объединяются непересекающиеся "копии" множеств семейства, формально это множество всевозможных пар вида:

$$\coprod_{i \in I} X_i = \{(x, i) \mid x \in X_i \ \wedge \ i \in I\}$$

Канонические вложения $\iota_k : X_k \to \coprod_{i\in I} X_i,\ x \mapsto (x,k)$ для всех $k \in I$.

9. *Прямое (декартово) произведение* семейства $\{X_i \mid i \in I\}$:
$$\prod_{i\in I} X_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid \forall i :\ f(i) \in X_i\}$$
Канонические проекции $\pi_k : \prod_{i\in I} X_i \to X_k,\ f \mapsto f(k)$ для всех $k \in I$.
10. Прямое произведение семейства функций $\{f_i : X_i \to Y_i\}_{i\in I}$ это функция $f = \prod_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i$, определяемая соотношением $f((x_i)_{i\in I}) = (f_i(x_i))_{i\in I}$. В частности, для $I = \{1;2\}$ имеем $f = f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2,\ f((x_1,x_2)) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$.
11. Множества X и Y называются *равномощными*, если существует биекция $f : X \to Y$. Обозначение: $|X| = |Y|$. Если f вложение, то пишем $|X| \le |Y|$ и говорим, что мощность X не превосходит мощности Y. $|X| < |Y|$ означает $|X| \le |Y| \ \wedge\ |X| \ne |Y|$.
12. $Y^X = \{f : X \to Y\}$ множество всех функций из X в Y.

Итак, запись $f : X \to Y,\ x \mapsto y$ означает, что функция f отображает X в Y и при этом переводит элемент $x \in X$ в элемент $y \in Y$. Чтобы задать функцию, нужно ответить на три вопроса: “откуда? куда? как?”. Стрелка “$\to$” отвечает на первые два вопроса, а стрелка “$\mapsto$” на третий.

Часто в учебной литературе не дают строгого определения понятия функции, заменяя его интуитивным описанием. В таких текстах наше определение функции становится определением “графика функции”. Далее в тексте слова “функция” и “график функции” считаются синонимами.

Определив равномощные множества, мы не даём строгого определения *мощности* или *кардинала*, так как оно зависит от выбора конкретной теории множеств. Например, в аксиоматике Цермело-Френкеля (ZFC), кардинал – это ординал не равномощный меньшему ординалу. В аксиоматиках, содержащих классы, например, Морса-Келли (MK) или фон Неймана-Бернайса-Гёделя (NBG), можно говорить о мощности множества как о классе множеств, равномощных ему, но всё равно нужно как-то выбрать канонических представителей класса эквивалентности, чтобы можно было говорить о классе всех кардиналов и работать с множествами кардиналов, так как собственные классы, коими являются классы равномощных множеств, не могут быть элементами других классов. Эти детали часто опускаются в учебной литературе, что приводит к формальным неточностям в тексте. Тем не менее, мы говорим, что множество имеет мощность *континуум*, если оно равномощно множеству

вещественных чисел и называем *счётными* множества, равномощные множеству натуральных чисел, также говорим о сравнении мощностей в смысле, указанном в определении выше.

Для функции $f : X \to Y$, подмножества $U \subset X$ и подмножества $V \subset Y$, обозначим $f(U) = \{f(x) \mid x \in U\}$ – образ подмножества U, а $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ – прообраз подмножества V. Считаем, что читатель знаком со свойствами образов и прообразов, такими как $f(U \cap U') \subset f(U) \cap f(U')$, $f^{-1}(V \cap V') = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(V')$ и пр.

Отношение R на множестве X – это подмножество декартова квадрата X : $R \subset X \times X$. Для отношений мы используем инфиксную запись: пишем xRy вместо $(x, y) \in R$. Отношение R называется отношением *строгого частичного порядка*, если для всех $x, y, z \in X$ выполнены условия: 1. $\neg\, xRx$; 2. $xRy \ \wedge \ yRz \implies xRz$. Для такого отношения мы используем знак $<$ вместо R. Перечёркнутый знак означает отрицание отношения: 1. $x \not< x$; 2. $x < y \ \wedge \ y < z \implies x < z$. Соответственно отношение *(нестрогого) частичного порядка* определяется как $x \leq y : \iff x < y \ \vee \ x = y$ и обладает свойствами рефлексивности $(x \leq x)$, антисимметричности $(x \leq y \ \wedge \ y \leq x \implies x = y)$ и транзитивности $(x \leq y \ \wedge \ y \leq z \implies x \leq z)$. Пишем $x > y$ вместо $y < x$ и $x \geq y$ вместо $y \leq x$. Мы часто говорим "порядок" вместо "(строгий/нестрогий) частичный порядок".

Порядок на X порождает порядок на множестве непустых подмножеств $\mathscr{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ по правилу $Y < Z : \iff \forall y \in Y \ \forall z \in Z : \ y < z$ для любых непустых подмножеств $Y, Z \subset X$. (Для пустого множества правило ломается: $\varnothing < \varnothing$ выполнено вакуумно, а транзитивность нарушается на тройках $Y, \varnothing, W$.)

Определение 1.1.2. Множество, на котором задано отношение частичного порядка, называется *частично упорядоченным множеством: ЧУМ.*

Определение 1.1.3. Порядок называется *линейным*, если любые два элемента сравнимы $(\forall x, y : \ x \leq y \vee y \leq x)$. Соответственно множество с линейным порядком называется *линейно упорядоченным множеством: ЛУМ*

Для полноты приводим определения важных понятий в ЧУМ.

Определение 1.1.4. Пусть X – ЧУМ и $Y \subset X$

- Линейно упорядоченное подмножество в X называется *цепью*
- $m \in X-$ минимальный элемент $X \ := \ \forall x \in X : \ \neg(x < m)$ ($\min X$ – множество минимальных элементов X)

- $m \in X-$ максимальный элемент $X \ := \ \forall x \in X : \ \neg(x > m)$ ($\max X$ – множество максимальных элементов X)
- $m \in X-$ наименьший элемент $X \ := \ \forall x \in X : \ m \leq x$
- $m \in X-$ наибольший элемент $X \ := \ \forall x \in X : \ m \geq x$
- $m \in X-$ верхняя граница (грань) $Y \ := \ \forall y \in Y : \ y \leq m$
- $m \in X-$ нижняя граница (грань) $Y \ := \ \forall y \in Y : \ y \geq m$
- Наименьший элемент m множества верхних границ Y в X называется *супремумом* Y (обозначение $m = \sup Y$)
- Наибольший элемент m множества нижних границ Y в X называется *инфимумом* Y (обозначение $m = \inf Y$)

Определение 1.1.5. Порядок называется *полным* (а множество *вполне упорядоченным*), если он линеен и любое непустое подмножество имеет минимальный элемент.

Определение 1.1.6. Множество называется *конечным*, если оно пусто или равномощно множеству $\{1, \ldots, n\}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$; в противном случае оно называется *бесконечным*.

В дальнейшем мы будем пользоваться *аксиомой выбора* в её различных эквивалентных формулировках.

Теорема 1.1.7 (Аксиома выбора: эквивалентные формулировки; см. [17])**.** Следующие утверждения эквивалентны:

1. (Аксиома выбора) Для любого семейства непустых множеств можно составить множество, выбрав по одному элементу из каждого множества в семействе, т.е.
$$\forall \alpha : \varnothing \notin \alpha \implies \exists f : \alpha \to \cup\alpha \ (\forall Y \in \alpha : \ f(Y) \in Y)$$
2. (существование сечения) Для любого наложения $f : X \to Y$ на непустое множество Y найдётся вложение $g : Y \to X$, правое обратное для f, т.е. $f \circ g = 1_Y$, где $1_Y : Y \to Y$ тождественное отображение. g называется *сечением* f.
3. (Лемма Цорна) Если любая цепь Y в ЧУМ $(X, \leq)$ имеет верхнюю границу, то в X есть максимальный элемент, т.е.
$$(\forall Y \subset X : \ Y - \text{ЛУМ} \implies \exists x \in X : \ x - \text{верхняя граница } Y) \implies \implies \max X \neq \varnothing$$
4. (Принцип максимума Хаусдорфа) В любом ЧУМ $(X, \leq)$ существует максимальная (по включению) цепь, т.е.
$$\exists Y \subset X : \ Y - \text{цепь} \wedge (\forall Z \subset X : \ (Y \subset Z \wedge Z - \text{цепь}) \implies Y = Z)$$
5. (Теорема Цермело) Любое множество можно вполне упорядочить
6. (Теорема Тарского) Любое бесконечное множество равномощно своему декартову квадрату

Задача 1.1.8. Любое бесконечное множество равномощно любой своей конечной декартовой степени.

Решение. Указание: индукция по теореме Тарского 6. □

Задача 1.1.9. Если $f : X \to Y$ наложение, то $|Y| \leq |X|$.

Решение. Сразу следует из пункта 2 теоремы. □

Задача 1.1.10. Если в ЧУМ X любая цепь имеет верхнюю границу, то любой элемент подчинён некоторому максимальному элементу, т.е. $\forall x \in X \ \exists y \in \max X : \ x \leq y$

Решение. Множество цепей, содержащих x, непусто, так как содержит одноэлементную цепь $\{x\}$. Упорядочим множество $\alpha = \{Y \in \mathscr{P}(X) \mid x \in Y \ \wedge \ Y - \text{цепь}\}$ всех цепей, содержащих x по включению ($Y \leq Z :\iff Y \subset Z$). Любая цепь $\beta \subset \alpha$ имеет верхнюю грань $\cup\beta$. По лемме Цорна в α есть максимальный элемент M. Согласно предположению, M имеет верхнюю грань m, которая должна лежать в M и быть максимальным элементом в X (иначе мы продолжим цепь M элементом m или большим элементом, что противоречит максимальности M). Очевидно, что $x \leq m$. □

При установлении равномощности множеств бывает полезна следующая теорема:

Задача 1.1.11 (Кантор-Бернштейн)**.** Множества X и Y равномощны тогда и только тогда, когда существует пара вложений $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$. Другими словами, $|X| \leq |Y| \ \wedge \ |Y| \leq |X| \iff |X| = |Y|$

Решение. Нетривиальна импликация “ $\Longleftarrow$ ”. Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ – вложения. Положим

$$A = \bigcup_{n \geq 0} (g \circ f)^n (X \setminus g(Y)),$$

где $(g \circ f)^0$ – тождественное отображение. Тогда отображение

$$F : X \to Y, \qquad F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g^{-1}(x), & x \notin A \end{cases}$$

корректно определено и является биекцией. Проверьте: 1. $x \notin A \implies x \in g(Y)$, и элемент $g^{-1}(x)$ определён однозначно; 2. F инъективно (случай $f(a) = g^{-1}(b)$ при $a \in A, \ b \notin A$ невозможен, так как $b = g(f(a)) \in A$); 3. F сюръективно (для $y \in Y$: если $g(y) \notin A$, то $F(g(y)) = y$, а если $g(y) \in A$, то $g(y) = (g \circ f)(x')$ для некоторого $x' \in A$ и $F(x') = y$). □

Задача 1.1.12. Множества равномощны тогда и только тогда, когда существует пара наложений $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$.

Задача 1.1.13. Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество, т.е. для любого бесконечного X существует вложение $\mathbb{N} \to X$.

Решение. По аксиоме выбора (п. 1 теоремы 1.1.7) для семейства $\alpha = \mathscr{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ всех непустых подмножеств X найдётся функция $c : \alpha \to X$ такая, что $c(Y) \in Y$ для всех $Y \in \alpha$. Определим x_n по индукции: $x_1 = c(X)$ и $x_{n+1} = c(X \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$ – множества $X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ непусты, так как X бесконечно. Все x_n различны (x_{n+1} выбирается вне $\{x_1, \dots, x_n\}$), поэтому $n \mapsto x_n$ – искомое вложение. □

Задача 1.1.14. Если X бесконечно, то $|X| = |X \times \mathbb{N}|$. Если $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ счётное семейство множеств, равномощных бесконечному множеству X, то объединение $\cup_i Y_i$ равномощно X.

Решение. X вкладывается в $X \times \mathbb{N}$, например, так $x \mapsto (x, 1)$. $X \times \mathbb{N}$ вкладывается в $X \times X$, например, так $(x, n) \mapsto (x, f(n))$, где f произвольное вложение $\mathbb{N} \to X$ (существует по 1.1.13). Остаётся применить теоремы Тарского и Кантора-Бернштейна.

Биекция X в любое из множеств Y_i есть вложение X в объединение $\cup_i Y_i$. Если теперь $f_i : Y_i \to X$ биекции, то $f : \coprod_i Y_i \to X \times \mathbb{N}$, $(y, i) \mapsto (f_i(y), i)$, есть биекция дизъюнктного объединения в $X \times \mathbb{N}$ (проверьте). Поскольку существует естественное наложение $\coprod_i Y_i \to \cup_i Y_i$, переводящее (y, i) в y, то по аксиоме выбора, найдётся вложение $s : \cup_i Y_i \to \coprod_i Y_i$. Если теперь $t : X \times \mathbb{N} \to X$ произвольная биекция, то $t \circ f \circ s$ вложение (почему?) $\cup_i Y_i$ в X. Осталось применить теорему Кантора-Бернштейна. □

Задача 1.1.15. Любое бесконечное множество X равномощно множеству всех своих конечных подмножеств, т.е. $|X| = |\mathscr{P}_f(X)|$, где $\mathscr{P}_f(X) = \{Y \subset X \mid Y - \text{конечно}\}$.

Решение. Пусть $X^{[k]} = \{Y \subset X \mid |Y| = k\}$, $k \in \mathbb{N}$ множество всех k-элементных подмножеств в X. Упорядочивая подмножества произвольным образом, мы получаем вложение $X^{[k]}$ в декартову степень X^k, которая равномощна X. Итак, существует вложение $X^{[k]}$ в X. Фиксируя произвольные $k-1$ различных элементов $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ из X, мы можем определить вложение множества $Z = X \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ в $X^{[k]}$, положив $z \mapsto \{z, x_1, \dots, x_{k-1}\}$. Но Z равномощно X (почему?). Теперь по теореме Кантора-Бернштейна получаем $|X| = |X^{[k]}|$ и, применяя задачу 1.1.14, заключаем, что $|X| = |\cup_{k\in\mathbb{N}} X^{[k]}|$. Осталось заметить, что $\mathscr{P}_f(X) = \{\varnothing\} \cup \cup_{k\in\mathbb{N}} X^{[k]}$ получается из этого объединения добавлением одной точки, что не меняет мощности бесконечного множества (проверьте), т.е. $|X| = |\mathscr{P}_f(X)|$. □

Задача 1.1.16. Если X бесконечное множество и $f : X \to Y$ такая функция, что все множества $f^{-1}(f(x)),\ x \in X$ конечны, то $|X| = |f(X)|$.

Решение. Во-первых, очевидно, $|f(X)| = |X/f|$, где

$$X/f = \{f^{-1}(f(x)) \mid x \in X\}$$

фактор-множество относительно отношения эквивалентности $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$ (биекция задаётся соответствием $f(X) \to X/f,\ y \mapsto f^{-1}(y)$). Далее, $|X/f| \le |X|$, так как функция $x \mapsto f^{-1}(f(x))$ сюръективна.

Занумеруем произвольным образом конечное число элементов во всех множествах $f^{-1}(f(x))$ и соберём n-тые номера в множество $X_n = \{x \in X \mid x$ имеет номер n в $f^{-1}(f(x))\}$. Поскольку в каждом полном прообразе точки не более одного n-го номера, $|X_1| = |X/f| = |f(X)|$ и $|X_n| \le |f(X)|$ при $n > 1$. Заметим, что $f(X)$ бесконечно: иначе X, будучи объединением конечного числа конечных прообразов, было бы конечно. Как мы знаем, объединение счётного семейства множеств равномощных $f(X)$ равномощно $f(X)$. Мы имеем не более чем счётное семейство $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, где мощность каждого множества X_n не превосходит $f(X)$. Значит, $|X| = |\bigcup_n X_n| \le |f(X)|$, так как отображение $x \mapsto (f(x), n)$, где n – номер точки x в своём прообразе, вкладывает X в $f(X) \times \mathbb{N}$, а $|f(X) \times \mathbb{N}| = |f(X)|$ по первой части 1.1.14. Осталось применить теорему Кантора-Бернштейна. □

1.2 Метрические пространства

Определение 1.2.1. *Псевдометрикой* на непустом множестве X называется функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. $\forall x, y \in X :\ x = y \implies \rho(x, y) = 0$
2. $\forall x, y, z \in X :\ \rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(y, z)$

Пара (X, ρ) называется *псевдометрическим пространством* (псевдоМП).

Множество вида $B_r(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$, где $r > 0$, называется *(открытым) шаром* в X с центром в точке x и радиусом r.

Определение 1.2.2. Псевдометрика, удовлетворяющая условию $\rho(x, y) = 0 \implies x = y$, называется *метрикой*. Соответствующая пара (X, ρ), называется *метрическим пространством* (МП).

Задача 1.2.3. Псевдометрика обладает следующими свойствами:

1. $\forall x, y \in X :\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность)
2. $\forall x, y \in X :\ \rho(x, y) \ge 0$ (неотрицательность)

Решение. 1. Положив в акс. 2: $z = x$, получим $\forall x, y:\ \rho(x,y) \le \rho(x,x) + \rho(y,x)$. Откуда (акс. 1) $\forall x, y:\ \rho(x,y) \le \rho(y,x)$. Поменяв местами x и y получим обратное неравенство, а значит $\forall x, y:\ \rho(x,y) = \rho(y,x)$

Теперь положив в акс. 2: $x = y$, получим $\forall x, z:\ \rho(x,x) \le \rho(x,z) + \rho(x,z)$. Откуда (акс. 1) $0 \le 2\rho(x,z) \implies \rho(x,z) \ge 0$. □

Пример 1.2.4. Некоторые примеры (псевдо)метрик:

1. $X \neq \varnothing,\ \rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ – дискретная метрика
2. $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = |x - y|$ – стандартная метрика на $\mathbb{R}$
3. $X = \mathbb{R}^n,\ p \in [1; +\infty),\ \rho_p(x,y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$ – p-метрика на $\mathbb{R}^n$. В случае $p = 2$ – стандартная метрика на $\mathbb{R}^n$.
4. $X = \mathbb{R}^n,\ \rho_\infty(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$ – ∞-метрика на $\mathbb{R}^n$.
5. (X, ρ) произвольное псевдоМП, $\alpha = \{U \neq \varnothing \mid \sup_{x,y \in U} \rho(x,y) < \infty\} \subset \mathscr{P}(X)$ – множество всех непустых *ограниченных* подмножеств X. Тогда *расстояние Хаусдорфа*:
$$\rho_H(U,V) = \max\left(\sup_{x \in U}\inf_{y \in V}\rho(x,y),\ \sup_{y \in V}\inf_{x \in U}\rho(x,y)\right)$$
– псевдометрика на α. Она не является метрикой, даже если ρ – метрика: например, в $X = \mathbb{R}$ расстояние Хаусдорфа между $(0;1)$ и $[0;1]$ равно нулю. Заметим, что более простое "расстояние" $\rho(U,V) = \inf\limits_{x \in U, y \in V}\rho(x,y)$ псевдометрикой не является: неравенство треугольника нарушается (проверьте).
6. (X, ρ) произвольное псевдоМП, $f : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ ($\mathbb{R}_{\ge 0} = [0; +\infty)$) функция удовлетворяющая условиям: 1. $f(0) = 0$; 2. f монотонно возрастает; 3. $f(x + y) \le f(x) + f(y)$ (полуаддитивность). Тогда равенство $\rho'(x,y) = f(\rho(x,y))$, определяет псевдометрику. Если ρ метрика и f строго возрастает в некоторой окрестности 0, то ρ' тоже метрика. В частности, в качестве $f(x)$ можно взять $\sqrt{x}$; $\ln(1+x)$; $\frac{x}{x+1}$; $\min(x, 1)$
7. (Y, ρ) произвольное псевдоМП. $X = Y^{\mathbb{N}}$ – множество всех последовательностей на Y, f ограниченная функция, удовлетворяющая условиям предыдущего примера. Тогда $\rho_X(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{f(\rho_Y(x_i,y_i))}{2^i}$ псевдометрика на X. Если ρ_Y метрика и f строго возрастает в некоторой окрестности 0, то ρ_X тоже метрика.

Задача 1.2.5. Проверить все пункты примера 1.2.4

Решение. Отметим неочевидные моменты:

3. Указание: применить неравенство Минковского.
5. Указание: для любых $x \in U,\ z \in W,\ y \in V$: $\rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(z,y)$, откуда $\inf\limits_{y\in V}\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \inf\limits_{y\in V}\rho(z,y) \le \rho(x,z) + \rho_H(W,V)$. Взяв inf по $z \in W$, а затем sup по $x \in U$, получим $\sup\limits_{x\in U}\inf\limits_{y\in V}\rho(x,y) \le \rho_H(U,W) + \rho_H(W,V)$. Вместе с симметричным неравенством для второго аргумента max это даёт неравенство треугольника (конечность ρ_H выведите из ограниченности U,V). Контрпример для "расстояния" inf: $U=\{0\},\ V=\{1\},\ W=\{0;1\}$ в $\mathbb{R}$: $\rho(U,V)=1 > 0=\rho(U,W)+\rho(W,V)$.
6. $\rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(y,z) \implies$ (монотонность) $f(\rho(x,y)) \le f(\rho(x,z)+\rho(y,z)) \implies$ (полуаддитивность) $f(\rho(x,y)) \le f(\rho(x,z))+f(\rho(y,z)) \iff \rho'(x,y) \le \rho'(x,z)+\rho'(y,z)$
7. Ряд сходится, поскольку мажорируется геометрической прогрессией, умноженной на константу (f ограничена). Обозначим $f(\rho_Y(x,y))$ через $\rho'(x,y)$. Тогда, используя 6 и свойства сходящихся рядов, можем написать:

$$\rho_X(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\rho'(x_i,y_i)}{2^i} \le \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\rho'(x_i,z_i)+\rho'(y_i,z_i)}{2^i} =$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\rho'(x_i,z_i)}{2^i} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\rho'(y_i,z_i)}{2^i} = \rho_X(x,z)+\rho_X(y,z)$$

□

1.3 Топологические пространства

Определение 1.3.1. *Топология* τ на множестве X – это семейство подмножеств X, содержащее пустое множество, всё X, любые объединения своих элементов и любые их конечные пересечения, т.е. для $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ выполнены три условия (аксиомы топологии):

1. $\varnothing, X \in \tau$
2. $\forall U,V \in \tau:\ U \cap V \in \tau$
3. $\forall \alpha \subset \tau:\ \cup\alpha \in \tau$

Элементы топологии называются *открытыми* множествами. Пара (X,τ), где X – множество, а τ – топология на нём, называется *топологическим пространством* (аббревиатура: ТП). Часто вместо (X,τ) пишем X. Элементы $x \in X$ называем *точками* пространства X.

Заметим, что из аксиомы 2 следует, что пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто (индукция).

Пример 1.3.2 (дискретная топология)**.** X – произвольно, $\tau = \mathscr{P}(X)$. Условия определения очевидно выполнены. Соответствующая топология называется дискретной (соответственно X называется дискретным пространством). Далее название топологии автоматически переносим на пространство с данной топологией.

Пример 1.3.3 (антидискретная топология)**.** X – произвольно, $\tau = \{\varnothing, X\}$. Условия определения очевидно выполнены.

Пример 1.3.4 (порядковая топология)**.** Пусть $(X, <)$ – ЛУМ. Положим $\overline{X} = X \cup \{-\infty; +\infty\}$. И продолжим порядок на $\overline{X}$, положив $\forall x \in X: \ -\infty < x < +\infty$ и $-\infty < +\infty$. Как обычно, (открытыми) интервалами в X назовём множества вида $(a; b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$, где $a, b \in \overline{X}$. В случае $b \leq a$ получаются пустые интервалы, в случае $a = -\infty,\ b = +\infty$ – всё X. Открытыми в X будем считать те и только те множества, которые вместе с любой своей точкой содержат некоторый интервал, содержащий эту точку:

$$\tau = \{U \subset X \mid \forall x \in U \ \exists (a; b) \subset U: \ x \in (a; b)\}$$

Задача 1.3.5. Проверить, что семейство из примера 1.3.4 действительно топология

Решение. Заметим, что $\varnothing \in \tau$, так как отрицание этого означало бы существование точки из пустого множества, для которой нет соответствующего интервала, но в пустом множестве нет точек. Очевидно также, что $X \in \tau$ (можно брать $(a; b) = (-\infty; +\infty)$). Пусть $\alpha \subset \tau$ и $x \in \cup\alpha$ – произвольный элемент. Тогда найдётся $U \in \alpha$ такое, что $x \in U$. Поскольку $U \in \tau$ и $x \in U$, найдётся интервал $(a; b)$ такой, что $x \in (a; b) \subset U$, но тогда $(a; b) \subset \cup\alpha$ и $\cup\alpha \in \tau$.

Пусть теперь $U_1, U_2 \in \tau$ и $x \in U_1 \cap U_2$. Тогда найдутся интервалы $(a_1; b_1) \subset U_1$, $(a_2; b_2) \subset U_2$, такие, что $x \in (a_i; b_i)$. Но очевидно, что $a = \max(a_1; a_2) < x < \min(b_1; b_2) = b$ поскольку порядок на $\overline{X}$ тоже линеен. Откуда получим $(a; b) \subset U_1 \cap U_2$ □

Задача 1.3.6. В числовых множествах $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ имеется отношение линейного порядка и, следовательно, определена порядковая топология. Показать, что эта топология в $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ совпадает с дискретной, а в $\mathbb{Q}, \overline{\mathbb{N}}, \overline{\mathbb{Z}}$ не совпадает.

Задача 1.3.7. Пусть $I_1 = (a_1; b_1), I_2 = (a_2; b_2)$ пара непересекающихся интервалов в ЛУМ X и найдутся $s_1 \in I_1, s_2 \in I_2$ такие, что $s_1 < s_2$, тогда $I_1 < I_2$ (см. текст перед опр. 1.1.2)

Решение. Во-первых, $b_1 < b_2$, иначе $a_1 < s_1 < s_2 < b_2 \leq b_1$ влекло бы $s_2 \in I_1$, но $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ по условию. Также $a_1 < a_2$, иначе $a_2 \leq a_1 <$

$s_1 < s_2 < b_2$ влекло бы $s_1 \in I_2$, то же противоречие. Далее, $(a_2; b_1) = \varnothing$, иначе $c \in (a_2; b_1)$ влекло бы $a_1 < a_2 < c < b_1 < b_2$, т.е. $c \in I_1 \cap I_2$. Теперь для любых $p_1 \in I_1, p_2 \in I_2$ имеем $p_1 \leq a_2$ (иначе $p_1 \in I_2$) и $a_2 < p_2$, т.е. $p_1 < p_2$. □

Определение 1.3.8. Скажем, что топология τ_1 *слабее (грубее)* τ_2 (τ_2 *сильнее (тоньше)* τ_1), если $\tau_1 \subset \tau_2$. ЧУМ всех топологий на X с этим отношением порядка будем обозначать $\mathbf{T}(X) \subset \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$

Задача 1.3.9. Показать, что $\mathbf{T}(X)$ – ЧУМ, в котором есть наибольший и наименьший элемент, а также любое подмножество обладает супремумом и инфимумом.

Решение. Проверка условий ЧУМ очевидна. Убедитесь, что:

1. наименьший элемент – антидискретная топология
2. наибольший элемент – дискретная топология
3. $\forall \mathbf{B} \subset \mathbf{T}(X) : \cap\mathbf{B}$ – топология, которая будет инфимумом $\mathbf{B}$
4. Для любого $\mathbf{B}$ множество верхних границ не пусто, так как содержит дискретную топологию и супремум $\mathbf{B}$ равен пересечению множества верхних границ.

□

Пример 1.3.10 (псевдометрическая топология)**.** Пусть (X, ρ) – псевдоМП. Зададим топологию в X, объявив открытыми те и только те множества, которые с каждой своей точкой содержат некоторый шар с центром в этой точке:

$$\tau_\rho = \{U \subset X \mid \forall x \in U \ \exists r > 0 : \ B_r(x) \subset U\}$$

Эта топология называется *(псевдо)метрической топологией* или *топологией индуцированной (псевдо)метрикой* или *топологией (псевдо)метрики.*

Задача 1.3.11. Проверить, что τ_ρ – топология, и все $B_r(x)$ открыты.

Решение. Очевидно $\varnothing, X \in \tau_\rho$. Любая точка входит в объединение любого семейства открытых множеств с тем же шаром, с которым она входит в элемент этого семейства, а в пересечение любого конечного семейства – с шаром минимального радиуса из тех, с которыми она входит в элементы семейства.

Теперь если $y \in B_r(x)$, то $B_q(y) \subset B_r(x)$ для $q = r - \rho(x, y)$. Действительно, для $z \in B_q(y) : \ \rho(z, x) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < r$ и значит $z \in B_r(x)$. □

Говорят, что τ_ρ метрическая топология или топология индуцированная метрикой ρ. Последний пример позволяет ввести топологию в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, нормированных пространствах и пространствах со скалярным произведением, рассмотрев топологию индуцированную метрикой

порождённой нормой или скалярным произведением. В этом случае говорят о топологии индуцированной нормой или скалярным произведением.

Задача 1.3.12. Показать, что в $\mathbb{R}$ топология, порождённая стандартной метрикой $\rho(x,y) = |x-y|$ совпадает с порядковой топологией.

Определение 1.3.13. ТП (X,τ) называется *метризуемым*, если найдётся метрика ρ на X такая, что индуцированная ею топология совпадает с τ.

Если $\alpha \subset \mathscr{P}(X)$, то положим $\mathbf{C}_X\alpha = \{\mathbf{C}Y \mid Y \in \alpha\}$.

Задача 1.3.14 (законы де Моргана)**.** Показать, что для любого $\alpha \subset \mathscr{P}(X)$:

$$\mathbf{C}\bigcap\alpha = \bigcup \mathbf{C}_X\alpha, \text{ или на языке семейств} \qquad \mathbf{C}\bigcap_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}\mathbf{C}X_i$$

$$\mathbf{C}\bigcup\alpha = \bigcap \mathbf{C}_X\alpha, \text{ или на языке семейств} \qquad \mathbf{C}\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I}\mathbf{C}X_i$$

В частности, для пары $\alpha = \{Y,Z\}$ имеем $\mathbf{C}(Y\cap Z) = \mathbf{C}Y \cup \mathbf{C}Z$, $\mathbf{C}(Y\cup Z) = \mathbf{C}Y \cap \mathbf{C}Z$

Решение. Проверим первое равенство. $x \in \mathbf{C}(\cap\alpha) \iff x \notin \cap\alpha \iff \exists Y \in \alpha : \ x \notin Y \iff \exists Y \in \alpha : \ x \in \mathbf{C}Y \iff x \in \cup\mathbf{C}_X\alpha$. Второе равенство проверяется аналогично. □

Определение 1.3.15. *Базой* топологии τ на X называется семейство $\beta \subset \tau$, объединением элементов которого можно получить любой элемент τ, т.е. $\forall U \in \tau\ \exists\gamma \subset \beta : \ \bigcup\gamma = U$

Если две топологии имеют одну и ту же базу, то они, очевидно, совпадают.

Задача 1.3.16. Семейство β является базой единственной топологии τ на X тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

1. любая точка X лежит в некотором элементе β, т.е. $\bigcup\beta = X$
2. любая точка входит в пересечение любых двух элементов из β вместе с содержащим её элементом из β, т.е. $\forall U,V \in \beta\ \forall x \in U\cap V\ \exists W \in \beta : \ x \in W \subset U \cap V$

Решение. $\Longrightarrow$ Пусть $\beta \subset \tau$ – база τ. Тогда так как X открыто, оно является объединением элементов из β откуда следует условие 1. Если теперь $U,V \in \beta$, то $U\cap V \in \tau$ и найдётся $\gamma \subset \beta$ такое, что $\cup\gamma = U\cap V$, а значит любой $x \in U\cap V$ лежит в каком-то элементе из γ, что доказывает условие 2.

$\Longleftarrow$ Положим $\tau = \{U \subset X \mid \exists\gamma \subset \beta : \ \cup\gamma = U\}$. Проверьте, что τ – топология, для которой β – база. □

Говорят, что топология τ порождена базой β.

Определение 1.3.17. Подмножество $H \subset G$ множества G с бинарной операцией $*$ называется *замкнутым относительно операции*, если $\forall x, y \in H : \ x * y \in H$

Задача 1.3.18. Замкнутое относительно пересечений семейство $\beta \subset \mathscr{P}(X)$, удовлетворяющее условию $\cup\beta = X$, является базой некоторой топологии на X.

Пример 1.3.19.
1. Семейство интервалов образует базу порядковой топологии на произвольном ЛУМ
2. Семейство интервалов с рациональными концами образует базу порядковой топологии на $\mathbb{R}$
3. Семейство одноточечных множеств образует базу дискретной топологии
4. Семейство шаров всех радиусов с центрами во всех точках МП образуют базу топологии индуцированной метрикой
5. Пусть a_n последовательность положительных вещественных чисел, сходящаяся к нулю. Семейство шаров с радиусами a_n и центрами в произвольных точках МП образуют базу топологии индуцированной метрикой

Задача 1.3.20. Подмножество β топологии τ будет базой тогда и только тогда, когда любая точка любого открытого множества лежит в этом множестве вместе с некоторым элементом β, содержащим точку, т.е. $\forall U \in \tau \ \forall x \in U \ \exists V \in \beta : \ x \in V \subset U$

Определение 1.3.21. Две базы называются эквивалентными, если они задают одну и ту же топологию (см. задачу 1.3.16)

Задача 1.3.22. Две базы β и β' эквивалентны тогда и только тогда, когда любая точка входит в некоторый элемент одной из баз вместе с содержащим её элементом другой базы, т.е. $(\forall U \in \beta \ \forall x \in U \ \exists U' \in \beta' : \ x \in U' \subset U) \ \wedge \ (\forall U' \in \beta' \ \forall x \in U' \ \exists U \in \beta : \ x \in U \subset U')$

Определение 1.3.23. Подмножество $\gamma \subset \tau$ называется *предбазой* топологии τ, если любое открытое множество $U \in \tau$ может быть получено некоторым объединением конечных пересечений элементов из γ. Другими словами, если множество $\beta = \{U_1 \cap \cdots \cap U_n \mid U_i \in \gamma\}$ всевозможных конечных пересечений элементов из γ есть база топологии τ.

Задача 1.3.24. Любое семейство множеств является предбазой некоторой топологии. Топология τ_1 тоньше топологии τ_2 тогда и только тогда, когда τ_1 содержит некоторую предбазу τ_2

Пусть (X, τ) – ТП.

Определение 1.3.25. Подмножество $Y \subset X$ называется *замкнутым*, если его дополнение открыто: $\mathbf{C}Y \in \tau$. Множество всех замкнутых подмножеств будем обозначать $\sigma_X = \sigma$.

Согласно определениям $\sigma = \mathbf{C}_X\tau$ и $\tau = \mathbf{C}_X\sigma$.

Задача 1.3.26. Семейство σ замкнутых подмножеств ТП обладает следующими свойствами:

1. $\varnothing, X \in \sigma$
2. $\forall Y, Z \in \sigma: \ Y \cup Z \in \sigma$
3. $\forall \alpha \subset \sigma: \ \cap\alpha \in \sigma$

Решение. Использовать задачу 1.3.14. □

Заметим, что объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто (индукция в 2)

Можно заметить, что свойства замкнутых множеств в задаче 1.3.26 похожи на свойства открытых множеств в определении топологии. Это отражение *принципа двойственности*, который повсеместно встречается в математике. Формальное описание принципа двойственности может быть дано в теории категорий. Такие принципы не могут быть сформулированы в качестве теорем внутри самой теории, но могут быть описаны, как правила (схемы) построения теорем и определений теории. Мы будем называть такие схемы построения теорем *метатеоремы*, а схемы построения определений – *метаопределения*. Их использование позволяет сократить речь, лучше разобраться в теории и строить новые теоремы и определения из существующих. Пример:

Метатеорема 1.3.27. Если в математической теореме или определении все входящие объекты заменить на двойственные, то получится новая (двойственная) теорема или определение

Рассмотрим двойственность (обозначение: $\leftrightarrow$) в утверждениях о подмножествах данного множества, порождённую операцией взятия дополнения $Y \leftrightarrow \mathbf{C}Y$. В этом случае двойственными операциями будут пересечение и объединение $\cap \leftrightarrow \cup$, взятие подмножеств и взятие надмножества ($\subset \leftrightarrow \supset$ так как $Y \subset Z \iff \mathbf{C}Y \supset \mathbf{C}Z$). Если в свойствах открытых множеств заменить все объекты на двойственные, то получатся свойства замкнутых множеств, и наоборот.

Заметим, что метатеоремы не нужно доказывать, а входящие в них понятия строго определять. Это скорее полезные наблюдения, помогающие строить новые конструкции или утверждения или лучше понимать существующие.

Задача 1.3.28. Для любого семейства $\sigma \subset \mathscr{P}(X)$, удовлетворяющего условиям задачи 1.3.26 существует единственная топология на X, в которой σ – семейство замкнутых множеств.

Решение. Положим $\tau = \mathbf{C}_X\sigma$. Согласно задаче 1.3.14, τ – топология, причём $\sigma = \mathbf{C}_X\tau$ – семейство замкнутых множеств для τ. Единственность следует из того, что τ однозначно определено равенством $\tau = \mathbf{C}_X\sigma$. □

Задача 1.3.29. Если Y – замкнуто, а Z – открыто, то $Y \setminus Z$ – замкнуто, а $Z \setminus Y$ – открыто.

Решение. $Y \setminus Z = Y \cap \mathbf{C}Z$ и замкнуто как пересечение замкнутых, аналогично $Z \setminus Y = Z \cap \mathbf{C}Y$ открыто как пересечение открытых. □

Определение 1.3.30. Введём несколько важных понятий:

1. Подмножество $U_T \subset X$ называется *окрестностью* множества T, если оно содержит T вместе с некоторым открытым множеством, содержащим T: $\exists U \in \tau : \ T \subset U \subset U_T$. В случае одноэлементного множества $T = \{x\}$ мы говорим об *окрестности* U_x точки x.
2. *Проколотой окрестностью* точки x называется множество $\overset{\circ}{U}_x = U_x \setminus \{x\}$, где U_x – окрестность точки x
3. Точка x называется *предельной* точкой подмножества $Y \subset X$, если любая её проколотая окрестность содержит точки из Y : $\forall \overset{\circ}{U}_x \ : \ \overset{\circ}{U}_x \cap Y \neq \varnothing$. Точки $x \in Y$, не являющиеся предельными точками Y, называются *изолированными* точками Y: $\exists \overset{\circ}{U}_x : \ \overset{\circ}{U}_x \cap Y = \varnothing$
4. Точка x называется точкой *прикосновения* подмножества $Y \subset X$, если любая её окрестность содержит точки из Y : $\forall U_x : \ U_x \cap Y \neq \varnothing$. Множество всех точек прикосновения множества Y называется *замыканием* Y. Обозначим его $\mathrm{cl}(Y)$.
5. Точка x называется *внутренней* точкой подмножества $Y \subset X$, если она содержится в Y с некоторой своей окрестностью: $\exists U_x : \ x \in U_x \subset Y$. Множество всех внутренних точек Y называется *внутренностью* Y. Обозначим его $\mathrm{int}(Y)$.
6. Точка x называется *граничной* точкой подмножества $Y \subset X$, если любая её окрестность содержит как точки из Y, так и точки из дополнения $\mathbf{C}Y$: $\forall U_x : \ U_x \cap Y \neq \varnothing \ \wedge \ U_x \cap \mathbf{C}Y \neq \varnothing$. Множество всех граничных точек Y называется *границей* Y. Обозначим его ∂Y.

Задача 1.3.31. Проверить следующие утверждения:

1. Подмножество открыто тогда и только тогда, когда оно является окрестностью любой своей точки.
2. Подмножество открыто тогда и только тогда, когда оно не содержит своих граничных точек.
3. Подмножество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.
4. Подмножество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои граничные точки.
5. Подмножество замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает с множеством своих точек прикосновения.

Решение. Проверим 1. Открытое множество является окрестностью любой своей точки по определению окрестности. Пусть теперь подмножество Y – окрестность любой своей точки. Выберем для всех $y \in Y$ открытые множества U_y, содержащие y и содержащиеся в Y, которые найдутся по определению окрестности. Но тогда очевидно $Y = \bigcup\limits_{y\in Y} U_y$. И значит Y открыто, как объединение открытых множеств (определение топологии). Проверим 4. Пусть Y – замкнуто и $x \in \mathbf{C}Y$. Тогда, так как $\mathbf{C}Y$ открыто, найдётся окрестность U_x точки x лежащая в $\mathbf{C}Y$ (см. 1) и следовательно не пересекающаяся с Y. Значит x не граничная точка. Значит граница не пересекается с $\mathbf{C}Y$, т.е. лежит в Y.

Пусть теперь граница лежит в Y и $x \in \mathbf{C}Y$. Тогда найдётся окрестность U_x точки x не пересекающаяся с Y, иначе все окрестности x пересекаются с Y и с $\mathbf{C}Y$ (так как $x \in \mathbf{C}Y$), а значит x – точка границы. Но $U_x \cap Y = \varnothing \implies U_x \subset \mathbf{C}Y$. Значит $\mathbf{C}Y$ – открыто, а Y – замкнуто.

Проверьте оставшиеся утверждения. □

Определение 1.3.32. Взятие замыкания, внутренности и границы суть функции из $\mathscr{P}(X)$ в $\mathscr{P}(X)$. Они называются соответственно *операторами (взятия) замыкания, внутренности, границы* и обозначаются $\mathrm{cl}, \mathrm{int}, \partial$ соответственно. Заметим, что int и cl являются двойственными объектами в смысле метатеоремы 1.3.27: $\mathrm{int}(Y) = \mathbf{C}\,\mathrm{cl}(\mathbf{C}Y)$, $\mathrm{cl}(Y) = \mathbf{C}\,\mathrm{int}(\mathbf{C}Y)$ (проверьте).

Задача 1.3.33. Пусть $Y, Z \subset X$ подмножества ТП X. Проверьте следующие свойства операторов $\mathrm{cl}, \mathrm{int}, \partial$:

1. $Y \subset \mathrm{cl}(Y)$, $\mathrm{int}(Y) \subset Y$, $\mathrm{cl}(Y) = Y \cup \partial Y = \mathrm{int}(Y) \cup \partial Y$, $\mathrm{int}(Y) = Y \setminus \partial Y = \mathrm{cl}(Y) \setminus \partial Y$
2. $\mathrm{cl}(\varnothing) = \varnothing$, $\mathrm{cl}(X) = X$, $\mathrm{int}(\varnothing) = \varnothing$, $\mathrm{int}(X) = X$
3. $\mathrm{cl}(Y)$ – замкнуто, $\mathrm{int}(Y)$ – открыто
4. $Y = \mathrm{cl}(Y) \iff \partial Y \subset Y \iff Y -$ замкнуто

5. $Y = \operatorname{int}(Y) \iff \partial Y \cap Y = \varnothing \iff Y -$ открыто
6. $\operatorname{cl}(Y \cup Z) = \operatorname{cl}(Y) \cup \operatorname{cl}(Z)$
7. $\operatorname{int}(Y \cap Z) = \operatorname{int}(Y) \cap \operatorname{int}(Z)$
8. $Y \subset Z \implies \operatorname{cl}(Y) \subset \operatorname{cl}(Z),\ Y \subset Z \implies \operatorname{int}(Y) \subset \operatorname{int}(Z)$ (монотонность)
9. $\operatorname{cl}(\operatorname{cl}(Y)) = \operatorname{cl}(Y)(\operatorname{cl}^2 = \operatorname{cl}),\ \operatorname{int}(\operatorname{int}(Y)) = \operatorname{int}(Y)(\operatorname{int}^2 = \operatorname{int})$ (идемпотентность)
10. $\operatorname{cl}(Y) = \bigcap\limits_{Y \subset Z \in \sigma} Z$
11. $\operatorname{int}(Y) = \bigcup\limits_{Y \supset Z \in \tau} Z$
12. $\partial Y = \operatorname{cl}(Y) \setminus \operatorname{int}(Y),\ \partial Y = \partial \mathbf{C}Y,\ \partial Y$ - замкнуто
13. $\partial\partial Y \subset \partial Y,\ \partial\partial Y = \partial Y \iff \operatorname{int}(\partial Y) = \varnothing$
14. Y – открыто или замкнуто $\implies \partial\partial Y = \partial Y$. Для произвольного $Y:\ \partial\partial\partial Y = \partial\partial Y$.

Решение. Проверим выборочно некоторые утверждения.

1. Точки $y \in Y$ являются точками прикосновения, так как $y \in U_y$ для любой окрестности U_y, значит $Y \subset \operatorname{cl}(Y)$. $\operatorname{int}(Y) \subset Y$ очевидно по определению.

$Y \cup \partial Y \subset \operatorname{cl}(Y)$ очевидно по определению. Если же x – точка прикосновения, не принадлежащая Y и U_x любая её окрестность, то $U_x \cap \mathbf{C}Y$ непусто (содержит x), а $U_x \cap Y$ непусто по определению точки прикосновения. Значит x удовлетворяет определению граничной точки, т.е. $x \in \partial Y$. А значит $\operatorname{cl}(Y) \subset Y \cup \partial Y$.

$\operatorname{int}(Y) \subset Y \setminus \partial Y$ очевидно по определению. Если же x негранична точка Y, то так как все её окрестности имеют непустое пересечение с Y (содержащее x), значит найдётся окрестность непересекающаяся с дополнением $\mathbf{C}Y$, т.е. лежащая в Y. Обратное включение установлено.

Наконец, $\operatorname{int}(Y) \cup \partial Y = (Y \setminus \partial Y) \cup \partial Y = Y \cup \partial Y,\ \operatorname{cl}(Y) \setminus \partial Y = (Y \cup \partial Y) \setminus \partial Y = Y \setminus \partial Y$.

9. Сразу следует из 3,4 и 5. Приведём прямое доказательство для случая cl. Ввиду 1 нужно проверить только включение $\operatorname{cl}(\operatorname{cl}(Y)) \subset \operatorname{cl}(Y)$. Пусть $x \in \operatorname{cl}(\operatorname{cl}(Y))$ и U_x – произвольная её окрестность. По определению окрестности найдётся открытое U с $x \in U \subset U_x$. Поскольку x – точка прикосновения $\operatorname{cl}(Y)$, а U – её окрестность, найдётся $y \in U \cap \operatorname{cl}(Y)$. Открытое множество U является окрестностью и точки y, а y – точка прикосновения Y, значит $U \cap Y \neq \varnothing$ и тем более $U_x \cap Y \neq \varnothing$. Итак, любая окрестность точки x пересекает Y, т.е. x – точка прикосновения Y и $x \in \operatorname{cl}(Y)$.

13. $x \in \partial\partial Y \implies \forall U_x : U_x \cap \partial Y \neq \varnothing$. Если U_x – открыто и $y \in U_x \cap \partial Y$, то y – граничная точка Y, U_x её окрестность. А значит по определению пересечение U_x с Y и с $\mathbf{C}Y$ непусто, т.е. x граничная точка для Y. Поскольку каждая окрестность содержит открытую окрестность, доказательство первого утверждения завершено.

Второе утверждение сразу следует из равенства $\operatorname{int}(\partial Y) = \partial Y \setminus \partial\partial Y$ (см. 1)

14. Замкнутость Y равносильна включению $\partial Y \subset Y$ (см. 4) и внутренняя точка ∂Y была бы внутренней точкой Y, что невозможно для границы. Значит $\operatorname{int}(\partial Y) = \varnothing$. Далее применяем 13. Аналогично в случае открытого Y внутренняя точка границы является внутренней точкой дополнения $\mathbf{C}Y$, что опять-таки невозможно. Наконец, из замкнутости границы (см. 12) следует последнее утверждение пункта.

Проверьте оставшиеся пункты задачи. □

Задача 1.3.34. Пусть $F : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ – идемпотентная ($F^2 = F$) функция на булеане X, удовлетворяющая условиям $F(X) = X$, $\forall Y \subset X : F(Y) \subset Y$ и $F(Y \cap Z) = F(Y) \cap F(Z)$. Тогда существует единственная топология на X, для которой F – оператор взятия внутренности.

Решение. Заметим, что из условий задачи следует монотонность F. Действительно, для любых $Y \subset Z \subset X$: $F(Y) = F(Y \cap Z) = F(Y) \cap F(Z) \subset F(Z)$.

Положим $\tau = \{U \subset X \mid F(U) = U\}$. Очевидно, что $\varnothing$ и X лежат в τ. Конечные пересечения также лежат в τ (индукция по условию $F(Y \cap Z) = F(Y) \cap F(Z)$). Пусть теперь $\alpha \subset \tau$ произвольное подмножество. Тогда из условия задачи: $F(\cup\alpha) \subset \cup\alpha$.

С другой стороны, любой $U \in \alpha$ содержится в $\cup\alpha$, а значит $U = F(U) \subset F(\cup\alpha)$ по монотонности. Откуда $\cup\alpha = \bigcup_{U\in\alpha} U \subset F(\cup\alpha)$. Итак, τ – топология.

Проверим теперь, что $F(Y) = \operatorname{int}(Y)$ в топологии τ. Во-первых, идемпотентность F равносильна условию $F(Y) \in \tau$. Откуда $F(Y) \subset \operatorname{int}(Y)$ (см. 11). С другой стороны, $\operatorname{int}(Y) \subset Y \implies F(\operatorname{int}(Y)) \subset F(Y)$, но $F(\operatorname{int}(Y)) = \operatorname{int}(Y)$, так как $\operatorname{int}(Y) \in \tau$, а значит $F(Y) = \operatorname{int}(Y)$. Единственность топологии следует из 5 □

Задача 1.3.35 (Теорема Куратовского)**.** Пусть $F : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ – идемпотентная функция на булеане X, удовлетворяющая условиям $F(\varnothing) = \varnothing$, $\forall Y \subset X : Y \subset F(Y)$ и $F(Y \cup Z) = F(Y) \cup F(Z)$. Тогда существует единственная топология на X, для которой F – оператор замыкания.

Решение. Аналогично задаче 1.3.34. Обратите внимание, что утверждения задач двойственны друг другу. □

Задача 1.3.36. *Замкнутый шар* в псевдоМП (X, ρ) с центром в точке $x \in X$ и радиусом r – это множество вида $\overline{B}_r(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\}$. Показать, что $\overline{B}_r(x)$ замкнутое множество, содержащее замыкание открытого шара. Привести пример МП такого, что $\mathrm{cl}(B_r(x)) \neq \overline{B}_r(x)$.

Определение 1.3.37. Подмножество Y в ТП (X, τ) называется *всюду плотным* или просто *плотным* в X, если его замыкание совпадает со всем пространством, т.е. $\mathrm{cl}(Y) = X$ и называется *нигде не плотным* в X, если его замыкание имеет пустую внутренность, т.е. $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Y)) = \varnothing$

Пример 1.3.38. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ нигде не плотно в $\mathbb{R}$.

Задача 1.3.39. $Y \subset X$ плотно в X тогда и только тогда, когда $\forall x \in X \ \forall U_x : \ U_x \cap Y \neq \varnothing$, т.е. любая окрестность любой точки содержит точки из Y.

$Y \subset X$ нигде не плотно в X тогда и только тогда, когда $\forall U \in \tau \setminus \{\varnothing\} \ \exists V \in \tau \setminus \{\varnothing\} : \ V \subset U \ \wedge \ V \cap Y = \varnothing$, т.е. любое непустое открытое множество содержит непустое открытое подмножество, не пересекающееся с Y.

Решение. Проверим второе утверждение.

$\Longrightarrow$ Пусть $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Y)) = \varnothing$ и $U \in \tau$ непусто. Если $U \cap \mathrm{cl}\, Y = \varnothing$, положим $V = U$. Если же $x \in U \cap \mathrm{cl}\, Y$, то $U \not\subset \mathrm{cl}\, Y$ (иначе x была бы внутренней точкой $\mathrm{cl}\, Y$), т.е. найдётся $y \in U \setminus \mathrm{cl}\, Y$. Множество $U_y = \mathbf{C}\,\mathrm{cl}\, Y$ открыто (замыкание замкнуто, см. 3) и содержит y. Тогда $V = U \cap U_y$ открыто, непусто ($y \in V$) и $V \cap Y \subset V \cap \mathrm{cl}\, Y = \varnothing$.

$\Longleftarrow$ Пусть $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Y))$, т.е. $x \in U_x \subset \mathrm{cl}\, Y$ для некоторой открытой окрестности U_x. Применив условие к $U = U_x$, найдём непустое открытое $V \subset U_x$ с $V \cap Y = \varnothing$. Но тогда точки V не являются точками прикосновения Y (V – их окрестность, не пересекающаяся с Y), т.е. $V \cap \mathrm{cl}\, Y = \varnothing$ – противоречие с $\varnothing \neq V \subset U_x \subset \mathrm{cl}\, Y$. Значит $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Y)) = \varnothing$. □

Определение 1.3.40. Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если оно содержит счётное, всюду плотное подмножество.

Пример 1.3.41.

1. Пространство $\mathbb{R}$ со стандартной топологией сепарабельно
2. Пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартной топологией сепарабельно
3. Пространство $C([a; b])$ непрерывных функций на отрезке с топологией, порождённой метрикой $\rho(f, g) = \max_{x \in [a;b]} |f(x) - g(x)|$ сепарабельно

4. Пространство l_∞ всех ограниченных последовательностей вещественных чисел с топологией, порождённой метрикой $\rho(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$, где $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ несепарабельно.

Задача 1.3.42. Проверить утверждения примера 1.3.41

Решение.

1. Указание: счётное, плотное подмножество $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
2. Указание: счётное, плотное подмножество $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$
3. Указание: использовать теорему

   Теорема 1.3.43 (Вейерштрасс; см. [14, гл. XVII])**.** Для любой непрерывной на $[a;b]$ функции f и любого $\varepsilon > 0$ найдётся полином p такой, что
   $$\max_{x\in[a;b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$
   Счётное, плотное подмножество – множество полиномов с рациональными коэффициентами: оно плотно в множестве всех полиномов, поскольку для $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ и $q(x) = \sum_{k=0}^n c'_k x^k$ выполнено $\rho(p,q) \le \sum_{k=0}^n |c_k - c'_k| M^k$, где $M = \max(|a|, |b|, 1)$, и достаточно выбрать $c'_k \in \mathbb{Q}$ достаточно близкими к c_k.
4. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset l_\infty$ произвольное счётное подмножество в l_∞, т.е. каждый x_n – это ограниченная последовательность $x_n = (x_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$. Положим $y_i = \begin{cases} 0, & |x_{ii}| > 1 \\ 2, & |x_{ii}| \le 1 \end{cases}$, $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Тогда, $y \in l_\infty,\ \rho(y, x_n) \ge 1$, т.е. открытый шар $B_1(y)$ не пересекается с X и значит X не плотно в l_∞.

□

1.4 Отделимость

Пусть (X,τ) – ТП.

Определение 1.4.1. Аксиомы отделимости:

0. Аксиома T_0 (А.Н. Колмогоров): Для любой пары различных точек хотя бы одна из них обладает окрестностью, не содержащей другую:
   $$\forall x, y \in X:\ x \ne y \implies \exists U_x:\ y \notin U_x \ \vee\ \exists U_y:\ x \notin U_y$$
1. Аксиома T_1 (А.Н. Тихонов, Фреше): Для любой пары различных точек каждая из них обладает окрестностью, не содержащей другую:
   $$\forall x, y \in X:\ x \ne y \implies \exists U_x:\ y \notin U_x \ \wedge\ \exists U_y:\ x \notin U_y$$

2. Аксиома T_2 (Хаусдорф): любые две различные точки обладают непересекающимися окрестностями:
$$\forall x, y \in X:\ x \neq y \implies \exists U_x, U_y:\ U_x \cap U_y = \varnothing$$
Говорим, что окрестности U_x, U_y *разделяют* точки x, y.
3. Аксиома T_3 (регулярность): любые точка и замкнутое множество, не содержащее точку, обладают непересекающимися окрестностями:
$$\forall x \in X\ \forall Y \in \sigma:\ x \notin Y \implies \exists U_x, U_Y:\ U_x \cap U_Y = \varnothing$$
4. Аксиома T_4 (нормальность): любые два непересекающихся замкнутых множества обладают непересекающимися окрестностями:
$$\forall Y, Z \in \sigma:\ Y \cap Z = \varnothing \implies \exists U_Y, U_Z:\ U_Y \cap U_Z = \varnothing$$
Говорим, что окрестности U_Y, U_Z *разделяют* множества Y, Z.

Задача 1.4.2. Аксиома T_1 равносильна замкнутости всех точек (одноэлементных подмножеств) ТП.

Решение. Пусть все точки замкнуты. Из $x \neq y$ следует, что x лежит в дополнении к $\{y\}$, которое открыто, а значит является окрестностью x, не содержащей y.

Наоборот, $y \notin U_x \iff U_x \subset \mathbf{C}\{y\}$, что влечёт открытость $\mathbf{C}\{y\}$, равносильную замкнутости $\{y\}$. □

Определение 1.4.3. Мы пишем $U \Subset V$, если $\mathrm{cl}(U) \subset V$.

Задача 1.4.4 (малая лемма Урысона)**.** Аксиома T_4 эквивалентна следующему условию: если замкнутое множество S содержится в открытом множестве U, то оно содержится в открытом множестве V, которое в свою очередь содержится в U вместе с замыканием:
$$(\forall S \in \sigma\ \forall U \in \tau:\ S \subset U \implies \exists V \in \tau : S \subset V \Subset U) \iff T_4$$

Задача 1.4.5. $T_4 \wedge T_1 \implies T_3 \wedge T_1 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0$

Решение. Простое сравнение определений с учётом задачи 1.4.2. □

Определение 1.4.6. ТП, удовлетворяющее T_2, называется *хаусдорфовым*, удовлетворяющее $T_1 \wedge T_3$ – *регулярным*, удовлетворяющее $T_1 \wedge T_4$ – *нормальным*.

Задача 1.4.7. Псевдометрическая топология хаусдорфова тогда и только тогда, когда псевдометрика является метрикой. Остальные рассмотренные выше примеры ТП, кроме антидискретного, хаусдорфовы.

Решение. Проверим хаусдорфовость порядковой топологии на ЛУМ $(X, <)$. Для любых $a, b \in X$, таких что $a < b$, если существует $c \in (a; b)$, то непересекающиеся окрестности точек a и b – это $(-\infty; c)$ и $(c; +\infty)$ соответственно. Если же интервал $(a; b)$ пустой, то в качестве соответствующих окрестностей можно выбрать $a \in (-\infty; b)$ и $b \in (a; +\infty)$.

Пусть теперь (X, ρ) – псевдоМП. Если ρ не является метрикой, то найдутся различные точки x, y с $\rho(x, y) = 0$; тогда всякий шар с центром в x содержит y, а значит любая окрестность x содержит y – топология τ_ρ не хаусдорфова (и даже не T_0). Если же ρ – метрика, то для различных x, y число $r = \rho(x, y)$ положительно, и шары $B_{r/2}(x),\ B_{r/2}(y)$ не пересекаются по неравенству треугольника.

Разберите остальные примеры. □

Определение 1.4.8. Определим расстояние между непустыми подмножествами Y, Z МП (X, ρ) :

$$\rho(Y, Z) = \inf\{\rho(y, z) \mid y \in Y,\ z \in Z\}$$

Диаметром подмножества Y называется величина $d(Y) = \sup\limits_{x,y\in Y} \rho(x, y)$. Подмножество называется *ограниченным*, если его диаметр конечен. (Обе величины уже встречались в разделе о метриках; здесь мы закрепляем за ними обозначения $\rho(Y, Z)$ и $d(Y)$.)

Задача 1.4.9. В МП расстояние от замкнутого множества до не принадлежащей ему точки положительно.

Решение. Поскольку дополнение множества открыто, точка содержится в дополнении вместе с некоторым шаром, а значит расстояние до множества не может быть меньше радиуса этого шара. □

Задача 1.4.10. Привести пример метрического пространства и пары непересекающихся замкнутых подмножеств с нулевым расстоянием между ними.

Задача 1.4.11. Любое МП нормально.

Решение. Любое МП хаусдорфово, а значит аксиома T_1 выполнена и нужно проверить T_4. Пусть $Y, Z \subset X$ два непересекающихся замкнутых подмножества МП (X, ρ). Для любой точки $y \in Y$ обозначим r_y расстояние $\rho(y, Z)$, аналогично $\forall z \in Z :\ r_z = \rho(z, Y)$. По доказанному выше все r_y, r_z положительны. Положим $U_Z = \cup_{z\in Z} B_{r_z/2}(z),\ U_Y = \cup_{y\in Y} B_{r_y/2}(y)$. Очевидно, что $U_Y,\ U_Z$ окрестности $Y,\ Z$ соответственно. Если $x \in U_Y \cap U_Z$, то найдётся $y \in Y$ и $z \in Z$ такие, что $x \in B_{r_y/2}(y) \cap B_{r_z/2}(z)$. Тогда $\rho(y, z) \le \rho(y, x) + \rho(x, z) < \max(r_y,\ r_z)$. С другой стороны, $\rho(y, z) \ge \rho(y, Z)$ и $\rho(y, z) \ge \rho(Y, z)$, а значит $\rho(y, z) \ge \max(r_y,\ r_z)$. Противоречие. Значит $U_Y \cap U_Z = \varnothing$. □

1.5 Теория пределов

Определение 1.5.1. Фильтр φ на множестве X – это непустое подмножество $\mathscr{P}(X)$, не содержащее пустого множества, содержащее конечные пересечения и надмножества своих элементов:

1. $\varnothing \notin \varphi$
2. $U, V \in \varphi \implies U \cap V \in \varphi$
3. $U \in \varphi \ \wedge \ U \subset V \implies V \in \varphi$

Пример 1.5.2 (Фильтр окрестностей множества)**.** Пусть (X, τ) – ТП и $T \subset X$. Положим $\varphi_T = \{U_T \subset X \mid U_T$ – окрестность $T\}$. В случае $T = \{x_0\}$ говорим о фильтре φ_{x_0} окрестностей точки.

Задача 1.5.3. $(\forall x : \ \cap \varphi_x = \{x\}) \iff T_1$

Задача 1.5.4. $(\forall S \ \forall U \in \tau : \ S \Subset U \implies \exists V \in \tau : S \Subset V \Subset U) \iff T_4$ (вариант малой леммы Урысона: произвольное S сводится к замкнутому $\operatorname{cl} S$).

Пример 1.5.5 (Фильтр Фреше)**.** Пусть X – бесконечное множество, $\varphi = \{U \subset X \mid \mathbf{C}U$ – конечно$\}$. В случае $X = \mathbb{N}$ этот фильтр обозначается $n \to \infty$.

Пример 1.5.6. Для данного отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ обозначим через $\Omega = \Omega[a, b]$ множество всех разбиений с отмеченными точками отрезка. Напомним, что разбиение с отмеченными точками это набор

$$(x, \xi) = (x_0, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n),$$

где $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$ и $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Как обычно, диаметр разбиения $d(x, \xi)$ – это максимум длин отрезков разбиения: $\max_{i=1\ldots n}(x_i - x_{i-1})$. Положим $U_\delta = \{(x, \xi) \mid d(x, \xi) < \delta\} \subset \Omega$. Фильтр φ состоит из всех надмножеств всевозможных U_δ:

$$\varphi = \{V \subset \Omega \mid \exists \delta > 0 : \ U_\delta \subset V\}.$$

Обозначение: $d(x, \xi) \to 0$.

Пример 1.5.7 (Спуск фильтра)**.** $f : X \to Y$ произвольное отображение, φ_X фильтр на X. Положим $\varphi_Y = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in \varphi_X\}$. Обозначим $\varphi_Y = f_* \varphi_X$.

Пример 1.5.8 (Подъём фильтра)**.** $f : X \to Y$ произвольное отображение, φ_Y фильтр на Y, след которого на образе не содержит пустого множества, т.е. $\varnothing \notin \varphi_Y|_{f(X)}$. Положим $\varphi_X = \{V \subset X \mid \exists U \in \varphi_Y : f^{-1}(U) \subset V\}$. Обозначим $\varphi_X = f^* \varphi_Y$.

Задача 1.5.9. Условия (аксиомы) фильтра выполнены во всех приведённых примерах.

Решение. Проверим пример 1.5.8. Условие $\varnothing \notin \varphi_Y|_{f(X)}$ означает, что для любого $U \in \varphi_Y : \ U \cap f(X) \neq \varnothing$ и значит $f^{-1}(U) \neq \varnothing$ и $\varnothing \notin \varphi_X$. Далее, $V_1, V_2 \in \varphi_X \iff \exists U_1, U_2 \in \varphi_Y : \ f^{-1}(U_i) \subset V_i, \ i = 1; 2$, но тогда $f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \subset V_1 \cap V_2$ и значит $V_1 \cap V_2 \in \varphi_X$. Выполнение последней аксиомы для φ_X очевидно. □

Задача 1.5.10. В примерах 1.5.7 и 1.5.8 выполняются включения $f^*(f_*\varphi_X) \subset \varphi_X$, $f_*(f^*\varphi_Y) \supset \varphi_Y$.

Задача 1.5.11. Для любых двух фильтров: $\varphi \subset \psi \iff \forall U \in \varphi \ \exists V \in \psi : \ V \subset U$

Решение. $\Longrightarrow$ очевидно (берём $U = V$). $\Longleftarrow$ сразу следует из аксиомы 3 фильтра. □

Определение 1.5.12. Подмножество β фильтра φ называется *базисом фильтра*, если $\forall U \in \varphi \ \exists V \in \beta : \ V \subset U$

Пример 1.5.13. Приведём несколько примеров базисов:

1. Семейство открытых окрестностей точки – это базис фильтра φ_x окрестностей точки.
2. Семейство замыканий шаров радиуса $1/n$: $\operatorname{cl}(B_{1/n}(x))$ – базис фильтра окрестностей точки x в произвольном МП.
3. Семейство интервалов вида $[n; +\infty)$ – базис фильтра Фреше на $\mathbb{N}$.

Задача 1.5.14. Непустое семейство β является базисом некоторого фильтра тогда и только тогда, когда $\varnothing \notin \beta \wedge \forall U, V \in \beta \ \exists W \in \beta : \ W \subset U \cap V$

Решение. $\Longrightarrow$ проверьте самостоятельно. $\Longleftarrow$ Положим $\varphi = \{U \mid \exists V \in \beta : \ V \subset U\}$. Аксиомы фильтра проверяются тривиально. При этом $\beta \subset \varphi$, а условие определения 1.5.12 для β выполнено по построению φ, т.е. β – базис фильтра φ. □

Задача 1.5.15. В ТП (X, τ) аксиома T_4 выполнена тогда и только тогда, когда фильтр окрестностей любого замкнутого множества имеет базис, состоящий из замкнутых множеств.

Решение. Указание: $\Longrightarrow$ Если S замкнуто и $S \subset U \in \tau$, то положив $B = X \setminus U$, найдём по T_4 непересекающиеся окрестности U_S и U_B. Тогда $U_S \Subset U$. □

Задача 1.5.16. Два базиса β, β' порождают один и тот же фильтр тогда и только тогда, когда $(\forall U \in \beta \ \exists U' \in \beta' : \ U' \subset U) \ \wedge \ (\forall U' \in \beta' \ \exists U \in \beta : \ U \subset U')$

Мы часто в дальнейшем пользуемся результатами задач 1.5.14, 1.5.16, не оговаривая этого специально.

Задача 1.5.17. Если φ фильтр на X, а ψ фильтр на Y, то семейство $\{U \times V \mid U \in \varphi \ \wedge \ V \in \psi\}$ является базисом фильтра на $X \times Y$.

Соответствующий фильтр будем обозначать $\varphi \times \psi$ и называть *произведением фильтров* φ и ψ.

Определение 1.5.18. Говорят, что ТП удовлетворяет *первой аксиоме счётности*, если все фильтры окрестностей точек имеют счётные базисы. Мы кратко называем такие ТП *первосчётными*.

Пример 1.5.19. Все МП первосчётны (почему?)

Определение 1.5.20. Точка x называется *пределом фильтра* φ в ТП (X, τ), если $\varphi_x \subset \varphi$. Обозначение: $x \in \lim \varphi$ ($\lim \varphi$ – множество всех пределов φ). Фильтр называется *сходящимся*, если множество его пределов непусто.

Очевидно, что $x \in \lim \varphi_x$.

Задача 1.5.21. Хаусдорфовость ТП равносильна тому, что любой фильтр имеет не более одного предела: $T_2 \iff \forall \varphi \ !x\colon x \in \lim \varphi$

Решение. $\Longrightarrow$ Пусть x предел фильтра φ, $y \neq x$ и U_x, U_y непересекающиеся окрестности x, y. Существует $V \in \varphi : \ V \subset U_x$ (см. зад. 1.5.11). Тогда для любого $W \in \varphi : \ W \not\subset U_y$, так как $W \cap V \neq \varnothing$, а значит $y \notin \lim \varphi$.

$\Longleftarrow$ Пусть для точек x, y всевозможные пересечения окрестностей $U_x \cap U_y$ непусты. Тогда семейство множеств $\psi = \{V \mid \exists U_x, U_y : \ U_x \cap U_y \subset V\}$ – фильтр (почему?). Но очевидно $\varphi_x \subset \psi$, $\varphi_y \subset \psi$, т.е. $x, y \in \lim \psi$, а значит по единственности предела $x = y$. Итак, различные точки имеют непересекающиеся окрестности. $\square$

В хаусдорфовом случае вместо $x \in \lim \varphi$ пишем $\lim \varphi = x$ ввиду единственности предела. А в случае спуска фильтра вместо $\lim f_*\varphi$ пишем $\lim\limits_{\varphi} f$, что соответствует классическим обозначениям.

Пример 1.5.22. Пусть $f : X \to Y$ – функция из ТП X в ТП Y, а $x_0 \in X$ – неизолированная точка, т.е. любая её окрестность содержит точки, отличные от x_0. Тогда определён след $\overset{\circ}{\varphi}_{x_0} = \varphi_{x_0}|_{X\setminus\{x_0\}}$ фильтра окрестностей (см. пр. 1.5.2) – фильтр с базисом из проколотых окрестностей точки x_0. Классическому пределу из курса анализа в случае $X = Y = \mathbb{R}$ отвечает именно он: $\lim\limits_{x\to x_0} f := \lim\limits_{\overset{\circ}{\varphi}_{x_0}} f$ – топологический предел. Спуск же полного фильтра окрестностей $f_*\varphi_{x_0}$ сходится к точке y, лишь если $y = f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f$ (проверьте).

Пример 1.5.23. Если $f : \mathbb{N} \to X$ последовательность, а $\varphi = n \to \infty$ (см. пр. 1.5.5), то $\lim\limits_{n\to\infty} f$ совпадает с обычным пределом последовательности.

Пример 1.5.24. Если $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (см. пр. 1.5.6) задаётся равенством $f(x,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, где g произвольная функция на отрезке $[a,b]$, а $\varphi = d(x,\xi) \to 0$, то $\lim\limits_{d(x,\xi)\to 0} f$ – это интеграл Римана $\int_a^b g(x)dx$.

Задача 1.5.25. Проверить, что пределы в вышеприведённых примерах совпадают с классическими определениями.

Решение. Проверим для примера 1.5.23. Фильтр $f_*\varphi$ состоит из всех надмножеств для множеств вида $U = \{f(n) \mid n \in V \in \varphi\}$. Для любого такого U найдётся $n_U \in \mathbb{N} :\ n \geq n_U \implies f(n) \in U$, иначе дополнение V не конечно. Условие $\varphi_x \subset f_*\varphi$ означает, что для любого $V_x \in \varphi_x$ найдётся U указанного вида, лежащее в V_x. Но это в точности означает, что все члены последовательности, начиная с $f(n_U)$, лежат в V_x, что совпадает с классическим определением предела. Обратное рассуждение аналогично. □

Задача 1.5.26. Пусть φ, ψ – пара фильтров на X и $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ – пара функций, тогда $(g \circ f)_*\varphi = g_*(f_*\varphi),\ \varphi \subset \psi \implies f_*\varphi \subset f_*\psi$

Задача 1.5.27 (замена переменных в предельном переходе)**.** Пусть $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ две функции, $\varphi_X,\ \varphi_Y$ – фильтры на X, Y соответственно, Z – хаусдорфово ТП и $\varphi_Y \subset f_*\varphi_X$. Тогда из существования $\lim\limits_{\varphi_Y} g$ следует равенство $\lim\limits_{\varphi_Y} g = \lim\limits_{\varphi_X}(g \circ f)$.

Решение. Пусть $\lim\limits_{\varphi_Y} g = z$, т.е. $\varphi_z \subset g_*\varphi_Y$. Из $\varphi_Y \subset f_*\varphi_X$ следует $g_*\varphi_Y \subset g_*(f_*\varphi_X) = (g \circ f)_*\varphi_X$, откуда $\varphi_z \subset g_*\varphi_Y \subset (g \circ f)_*\varphi_X$, что означает $z \in \lim\limits_{\varphi_X}(g \circ f)$; предел единствен ввиду хаусдорфовости Z, так что $\lim\limits_{\varphi_X}(g \circ f) = z$. □

Задача 1.5.28 (монотонность предела)**.** Пусть $f, g : X \to Y$ – пара функций в ЛУМ Y с порядковой топологией, φ – фильтр на X, и пусть пределы $\lim\limits_{\varphi} f,\ \lim\limits_{\varphi} g$ существуют. Тогда $f \leq g\ (\forall x \in X :\ f(x) \leq g(x)) \implies \lim\limits_{\varphi} f \leq \lim\limits_{\varphi} g$.

Решение. Пусть $a = \lim\limits_{\varphi} f \neq \lim\limits_{\varphi} g = b$ и $U_a,\ U_b$ – пара непересекающихся интервалов, содержащих a и b соответственно (существующих, согласно задаче 1.4.7). Тогда $f^{-1}(U_a),\ g^{-1}(U_b) \in \varphi$ и, следовательно, имеют непустое пересечение. Для любого $x \in f^{-1}(U_a) \cap g^{-1}(U_b) \in \varphi$ имеем $f(x) \leq g(x)$ по условию и $f(x) \neq g(x)$, поскольку $f(x) \in U_a$ и $g(x) \in U_b$, а $U_a \cap U_b = \varnothing$;

итак, $f(x) < g(x)$. Так как для двух элементов $f(x) \in U_a$ и $g(x) \in U_b$ непересекающихся интервалов U_a, U_b выполнено неравенство $f(x) < g(x)$, то согласно результату задачи 1.3.7 имеем $U_a < U_b$. В частности, $a < b$. □

Задача 1.5.29 (линейность предела)**.** Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$ – пара функций, для которых существуют пределы по фильтру φ, а $a, b \in \mathbb{R}$ – пара чисел. Тогда

$$\lim_{\varphi}(af + bg) = a \lim_{\varphi} f + b \lim_{\varphi} g$$

Решение. Случай $a = b = 0$ очевиден. Если $a = 0$ или $b = 0$, убираем соответствующее слагаемое в последующем рассуждении. Пусть теперь $a \neq 0,\ b \neq 0$, а $\varepsilon > 0$ произвольно. Если $P, Q \subset \mathbb{R}$, мы положим $aP + bQ = \{ap + bq \mid p \in P \ \wedge \ q \in Q\}$. Пусть $\lim\limits_{\varphi} f = p,\ \lim\limits_{\varphi} g = q$. Тогда $U = aB_{\varepsilon/2|a|}(p) + bB_{\varepsilon/2|b|}(q) \subset B_\varepsilon(ap + bq)$ (проверьте). Положим $V = f^{-1}(B_{\varepsilon/2|a|}(p)) \cap g^{-1}(B_{\varepsilon/2|b|}(q)) \in \varphi$. Для любого $x \in V :\ (af + bg)(x) = af(x) + bg(x) \in U \subset B_\varepsilon(ap + bq)$. Откуда $V \subset (af + bg)^{-1}(B_\varepsilon(ap + bq))$ и значит $\varphi_{ap+bq} \subset (af + bg)_*\varphi$ □

Определение 1.5.30. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно малой* при фильтре φ, если $\lim\limits_{\varphi} f = 0$, называется *ограниченной* при φ, если найдётся $U \in \varphi :\ f(U)$ – ограничено.

Очевидно, что если существует $\lim\limits_{\varphi} f$, то f ограничена при φ, так как найдётся элемент $V \in \varphi$, образ $f(V)$ которого лежит в единичной окрестности предела.

Задача 1.5.31. Если $f, g : X \to \mathbb{R}$, f – бесконечно малая, g – ограниченная, то произведение fg – бесконечно малая.

Решение. Пусть $U \in \varphi :\ g(U) \subset [-a, a],\ a > 0$ и $B_\varepsilon(0)$ – произвольная ε-окрестность 0. Положим $V = f^{-1}(B_{\varepsilon/a}(0)) \cap U \in \varphi$. Для любого $x \in V :\ |(fg)(x)| = |f(x)||g(x)| < \varepsilon$, т.е. $V \subset (fg)^{-1}(B_\varepsilon(0))$. Другими словами, $\varphi_0 \subset (fg)_*\varphi$ или $\lim\limits_{\varphi} fg = 0$ □

Задача 1.5.32. Сформулируйте и докажите утверждения о пределе произведения и частного.

Определение 1.5.33. Непустое множество N с рефлексивным и транзитивным отношением $\leq$ (антисимметричность, в отличие от ЧУМ, не требуется) называется *направленным*, если любая пара его элементов имеет верхнюю грань: $\forall a, b \in N\ \exists c \in N :\ a \leq c \ \wedge \ b \leq c$. Функция $N \to X$ из направленного множества называется *сетью* или *направленностью*.

Для сети используют обозначение $x_n = (x_n)_{n\in N}$. Это подчёркивает тот факт, что сеть обобщает понятие последовательности (поскольку $\mathbb{N}$, как и любое ЛУМ, очевидно, направлено). Пусть теперь x_n – сеть со значениями в ТП (X, τ).

Определение 1.5.34. Говорим, что x предел сети x_n и пишем $x \in \lim x_n$ (множество всех пределов сети), если все члены сети, начиная с некоторого, оказываются в любой окрестности точки x

$$\forall U_x\ \exists k \in N\ \forall n \geq k :\ x_n \in U_x$$

В дальнейшем мы используем *метаопределения*, которые являются просто общими правилами сокращения речи и схемами построения определений (см. обсуждение метатеор. 1.3.27). Первый пример:

Метаопределение 1.5.35. Мы говорим, что свойство $\Phi(x)$ выполняется для *почти всех* членов сети N (элементов множества X), если оно выполнено для всех элементов N, начиная с некоторого, т.е. $\exists k \in N\ \forall n \geq k :\ \Phi(x_n)$ (для всех элементов множества, кроме конечного числа, т.е. $\{x \in X \mid \neg\Phi(x)\}$ – конечно).

В этой терминологии сеть сходится к x, если почти все члены сети лежат в любой окрестности точки x.

Теории предела по фильтру и предела сети эквивалентны в том смысле, что по любой сети можно построить фильтр с тем же пределом и наоборот. Пусть $h : N \to X$ – сеть. Рассмотрим семейство φ_h, состоящее из подмножеств в X, содержащих почти все элементы h:

$$\varphi_h = \{U \subset X \mid \exists k \in N\ \forall n \geq k :\ h_n \in U\}$$

Задача 1.5.36. φ_h – фильтр и $\lim \varphi_h = \lim h_n$ (множества пределов совпадают)

Пусть теперь φ – фильтр на X. Рассмотрим множество пар $N_\varphi = \{(x, U) \mid x \in U \in \varphi\}$ с рефлексивным и транзитивным отношением $(x, U) \leq (y, V) :\iff V \subset U$. Оно направлено: пересечение $U \cap V$ лежит в φ и потому непусто, а любая пара $(z, U \cap V)$ является верхней гранью пар (x, U) и (y, V). Сеть $h^\varphi :\ (x, U) \mapsto x$ назовём *канонической сетью* фильтра φ.

Задача 1.5.37. $\lim h^\varphi = \lim \varphi$ (множества пределов совпадают). Если же, выбрав по одному элементу $h_U \in U$ для каждого $U \in \varphi$ (необходима аксиома выбора), рассмотреть сеть $U \mapsto h_U$ на направленном обратным включением множестве φ, то в общем случае верно лишь включение $\lim \varphi \subset \lim h_U$ (постройте пример строгого включения).

Метатеорема 1.5.38. Языки фильтров и сетей математически эквивалентны. Другими словами, все результаты о фильтрах могут быть записаны на языке сетей и наоборот.

Задача 1.5.39. Сформулируйте и докажите утверждения о единственности предела сети в хаусдорфовом ТП, монотонности предела сети в ЛУМ, а также о взаимодействии предела с арифметическими операциями для вещественных сетей.

Приведём критерий замкнутости подмножества и критерий точки прикосновения на языке сетей.

Задача 1.5.40. Точка x является точкой прикосновения произвольного подмножества Y тогда и только тогда, когда найдётся сеть в Y, сходящаяся к x. Подмножество Y в ТП X замкнуто тогда и только тогда, когда множество пределов любой сходящейся сети элементов из Y лежит в Y.

Решение. $\Longrightarrow$ Пусть Y замкнуто, x_n – сеть в Y и $x \in \lim x_n$. Так как почти все члены сети лежат в любой окрестности x, то x – точка прикосновения для Y и значит принадлежит Y ввиду замкнутости Y.

$\Longleftarrow$ Пусть теперь x точка прикосновения Y. Выбирая элемент из Y в каждой окрестности U точки x, существующий по определению точки прикосновения, мы получим сеть x_U, которая, очевидно, сходится к x. И значит, согласно условию, $x \in Y$, что означает замкнутость Y. □

Охарактеризуем топологию на языке фильтров окрестностей точек. Пусть на множестве X каждой точке x поставлен в соответствие фильтр φ_x и выполняются два условия:

1. $x \in \cap\varphi_x$
2. $\forall x\ \forall U \in \varphi_x\ \exists V \in \varphi_x :\ V \subset U\ \wedge\ \forall y \in V (V \in \varphi_y)$

Второе условие означает, что каждая окрестность любой точки содержит “открытую” окрестность, т.е. такую окрестность, которая является окрестностью любой своей точки.

Задача 1.5.41. Показать, что существует единственная топология, для которой фильтры φ_x, удовлетворяющие условиям выше, являются фильтрами окрестностей точек.

Решение. Положим $\tau = \{U \subset X \mid \forall x \in U :\ U \in \varphi_x\}$. Легко видеть, что τ – топология. Проверим, что φ_x – в точности фильтр окрестностей точки x в топологии τ. Пусть $U \in \varphi_x$: по условию 2 найдётся $V \in \varphi_x$ такое, что $V \subset U$ и $\forall y \in V :\ V \in \varphi_y$; тогда $V \in \tau$ по определению τ, а $x \in V$ по условию 1, т.е. U – окрестность x. Обратно, если U – окрестность x в τ, то $x \in W \subset U$ для некоторого $W \in \tau$; по определению τ имеем $W \in \varphi_x$, откуда $U \in \varphi_x$ по аксиоме 3 фильтра. Единственность сразу следует из п. 1 задачи 1.3.31. □

Задача 1.5.42. Показать, что условие 2 предыдущей задачи равносильно следующему условию:

$$\forall x\ \forall U \in \varphi_x\ \exists V \in \varphi_x :\ V \subset U\ \wedge\ \forall y \in V (U \in \varphi_y)$$

Решение. Заметим, что изменилась только одна буква "$V \in \varphi_y$" $\to$ "$U \in \varphi_y$". И очевидно, что из первого следует второе, так как $V \in \varphi_y \ \wedge \ V \subset U \implies U \in \varphi_y$.

Пусть теперь выполнено условие задачи. Положим $V = \{t \in U \mid U \in \varphi_t\}$. Теперь из $y \in V$ следует $U \in \varphi_y$, далее по условию найдётся $W \in \varphi_y$, $W \subset U$, такое, что для всех $z \in W : \ U \in \varphi_z$. Но это значит, что $z \in V$ и $W \subset V$, т.е. $V \in \varphi_y$. Кроме того, то же рассуждение при $y = x$ (используется лишь $U \in \varphi_x$, без условия 1) даёт $W \in \varphi_x$, $W \subset V$, откуда $V \in \varphi_x$ по аксиоме 3 фильтра; наконец, $V \subset U$ по построению. Получили исходное условие 2. □

Теперь у нас есть пять эквивалентных способов задания топологии: 1. с помощью выделения семейства открытых множеств, 2. выделения семейства замкнутых множеств, 3. выделения семейства окрестностей точек, 4. задания оператора замыкания, 5. задания оператора внутренности. Построение топологии с помощью окрестностей даёт удобный критерий совпадения топологий.

Задача 1.5.43. ТП (X, τ) удовлетворяет аксиоме T_3 тогда и только тогда, когда фильтр окрестностей любой точки обладает базисом, состоящим из замкнутых окрестностей.

Решение. $\implies$ Пусть выполнена аксиома T_3 и U_x произвольная открытая окрестность произвольной точки x. Тогда $M = \mathbf{C}U_x$ замкнуто и следовательно найдутся непересекающиеся окрестности V_x, V_M точки x и множества M. Причём $\mathrm{cl}(V_x) \subset U_x$, так как любая точка из M имеет окрестность, не пересекающуюся с V_x и значит не может быть точкой прикосновения V_x. Проверьте обратную импликацию. □

Задача 1.5.44. Топологии τ, τ' на множестве X совпадают тогда и только тогда, когда для любой окрестности любой точки в одной топологии найдётся содержащаяся в ней окрестность этой точки в другой топологии и наоборот:

$$\tau = \tau' \iff \forall x \in X : \ (\forall U \in \varphi_x \ \exists U' \in \varphi'_x : \ U' \subset U) \wedge (\forall U' \in \varphi'_x \ \exists U \in \varphi_x : \ U \subset U')$$

Определение 1.5.45. Две псевдометрики ρ, ρ' на X назовём *слабо эквивалентными*, если индуцированные ими топологии совпадают, и *сильно эквивалентными*, если найдутся положительные числа c, c', такие, что для всех $x, y \in X$ $c\rho(x, y) \le \rho'(x, y) \le c'\rho(x, y)$.

Задача 1.5.46. Сильная эквивалентность влечёт слабую эквивалентность, но не наоборот.

Рассмотрим множество $\mathbf{F}(X)$ всех фильтров на непустом множестве X, упорядоченное по включению.

Задача 1.5.47. Порядок в $\mathbf{F}(X)$ обладает следующими свойствами:

1. В $\mathbf{F}(X)$ существует наименьший элемент
2. Любое непустое подмножество $\mathbf{S} \subset \mathbf{F}(X)$ имеет инфимум
3. Подмножество $\mathbf{S} \subset \mathbf{F}(X)$ имеет супремум тогда и только тогда, когда
$$\forall \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathbf{S}\ \forall U_1 \in \varphi_1 \ldots\ \forall U_n \in \varphi_n :\ U_1 \cap \cdots \cap U_n \neq \varnothing$$

Решение. Проверьте, что:

1. Наименьшим элементом будет фильтр $\{X\}$, состоящий из одного элемента.
2. Инфимумом будет $\cap\mathbf{S}$, которое является фильтром (проверьте).
3. Супремумом будет фильтр с базисом из конечных пересечений $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ элементов объединения $\cup\mathbf{S}$. При этом такие пересечения образуют базис фильтра тогда и только тогда, когда выполнено указанное условие.

□

Определение 1.5.48. Максимальные элементы множества $\mathbf{F}(X)$ всех фильтров на X называются *ультрафильтрами*. Ультрафильтр φ называется *свободным*, если $\cap\varphi = \varnothing$. В противном случае ультрафильтр называется *главным*.

Пример 1.5.49. Пусть X произвольное непустое множество и $x \in X$. Тогда $\iota_x = \{U \subset X \mid x \in U\}$ – главный ультрафильтр и $\cap\iota_x = \{x\}$

Доказательство. Условия фильтра очевидно выполнены для ι_x и $\cap\iota_x = \{x\}$. Так как $\{x\} \in \iota_x$ и для любого $Y \in \mathscr{P}(X) \setminus \iota_x :\ Y \cap \{x\} = \varnothing$, то невозможно получить фильтр строго содержащий ι_x, т.е. ι_x – ультрафильтр. □

Задача 1.5.50. Любой фильтр содержится в некотором ультрафильтре.

Решение. Указание: применить лемму Цорна и задачу 1.1.10, проверив, что объединение цепи фильтров – фильтр: пересечение двух элементов объединения лежит в большем из содержащих их фильтров цепи. □

Определение 1.5.51. Семейство подмножеств множества X называется *центрированным*, если пересечение любого конечного подсемейства непусто

Задача 1.5.52. Любое центрированное семейство содержится в некотором фильтре, а значит и в некотором ультрафильтре.

Задача 1.5.53. Фильтр φ является ультрафильтром на X тогда и только тогда, когда для любого подмножества X либо оно, либо его дополнение входит в φ, т.е. $\forall Y \subset X :\ Y \in \varphi\ \vee\ \mathbf{C}Y \in \varphi$

Решение. $\Longrightarrow$ Пусть φ – фильтр, $Y \notin \varphi \wedge \mathbf{C}Y \notin \varphi$. Тогда пересечение Y с любым элементом из φ непусто. Иначе нашёлся бы $Z \in \varphi :\ Z \cap Y = \varnothing$, но это значит, что $Z \subset \mathbf{C}Y$ и следовательно $\mathbf{C}Y \in \varphi$. Таким образом, семейство множеств $\alpha = \{V \subset X \mid \exists Z \in \varphi :\ Z \cap Y \subset V\}$ – составляет фильтр, строго включающий φ (проверьте) и φ не ультрафильтр.

$\Longleftarrow$ Пусть для всех $Y \subset X$ либо Y, либо $\mathbf{C}Y$ лежат в φ, $\varphi \subset \varphi'$ и Y – произвольный элемент φ'. $\mathbf{C}Y$ не может лежать в φ, так как тогда и Y, и $\mathbf{C}Y$ лежат в φ', что невозможно, поскольку их пересечение пусто. Значит $Y \in \varphi$ и $\varphi = \varphi'$, т.е. φ – ультрафильтр. □

Задача 1.5.54. Спуск $f_*\varphi$ ультрафильтра φ на X относительно произвольного отображения $f : X \to Y$ является ультрафильтром на Y. След $\varphi|_A$ ультрафильтра φ на множестве $A \in \varphi$ является ультрафильтром на A.

Решение. Воспользуемся критерием задачи 1.5.53. Для любого $U \subset Y$ либо $f^{-1}(U) \in \varphi$, либо $\mathbf{C}f^{-1}(U) = f^{-1}(\mathbf{C}U) \in \varphi$, т.е. $U \in f_*\varphi$ или $\mathbf{C}U \in f_*\varphi$. Далее, $\varnothing \notin \varphi|_A$, поскольку элементы φ пересекаются с $A \in \varphi$ (аксиомы фильтра проверьте). Для любого $B \subset A$ либо $B \in \varphi$ и тогда $B = B \cap A \in \varphi|_A$, либо $\mathbf{C}B \in \varphi$ и тогда $A \setminus B = \mathbf{C}B \cap A \in \varphi|_A$. □

Задача 1.5.55. Если ультрафильтр φ главный, то $\cap\varphi$ одноточечно, т.е. все главные ультрафильтры имеют вид как в примере 1.5.49

Решение. Пусть $x \in \cap\varphi$, где φ главный ультрафильтр на X. Если $\{x\} \notin \varphi$, то $\mathbf{C}\{x\} \in \varphi$, а значит $x \notin \cap\varphi$. Противоречие. Значит $\{x\} \in \varphi$. Тогда $\varphi = \iota_x$: если $U \in \varphi$, то $U \cap \{x\} \neq \varnothing$, т.е. $x \in U$ и $U \in \iota_x$; обратно, всякое $U \ni x$ содержит $\{x\} \in \varphi$ и лежит в φ по аксиоме 3 фильтра. Итак, φ имеет вид как в примере 1.5.49. □

Определение 1.5.56. Точка x называется *предельной точкой* или *точкой прикосновения* фильтра φ, если она лежит в замыкании любого элемента фильтра, т.е. $x \in \bigcap_{U\in\varphi} \operatorname{cl}(U)$

Задача 1.5.57. Все пределы любого фильтра φ и все элементы из пересечения $\cap\varphi$ являются предельными точками.

Решение. Проверим что любой $x \in \lim\varphi$ – предельная точка. Существование $U \in \varphi$ такого, что $x \notin \operatorname{cl}(U)$ означает, что $V = \mathbf{C}\operatorname{cl}(U)$ – окрестность x, которая не пересекается с U и следовательно не принадлежит φ. Противоречие с определением предела. Пусть теперь $x \in \cap\varphi$. Тогда для любого $U \in \varphi$ имеем $x \in U \subset \operatorname{cl}(U)$, т.е. x – предельная точка фильтра φ. □

Задача 1.5.58. Для любых фильтров $\varphi \subset \psi$ пределы фильтра ψ являются предельными точками φ, а пределы φ являются пределами ψ.

Решение. $x \in \lim \psi \iff \varphi_x \subset \psi \implies \forall U \in \varphi\ \forall U_x \in \varphi_x :\ U \cap U_x \neq \varnothing$, поскольку $\varphi \cup \varphi_x \subset \psi$. Но последнее условие равносильно тому, что x предельная точка для φ. Проверьте второе утверждение. □

Задача 1.5.59. Предельные точки ультрафильтра являются его пределами

Решение. Пусть x – предельная точка ультрафильтра φ и U_x её произвольная открытая окрестность. Если $\mathbf{C}U_x \in \varphi$, то поскольку $\mathbf{C}U_x$ замкнуто, то $x \notin \mathrm{cl}(\mathbf{C}U_x) = \mathbf{C}U_x$, что противоречит определению предельной точки. Значит $\mathbf{C}U_x \notin \varphi$, а значит $U_x \in \varphi$, согласно задаче 1.5.53. Итак, $\varphi_x \subset \varphi$ или $x \in \lim \varphi$. □

Метатеорема 1.5.60. В первосчётных ТП при описании локальных топологических свойств слово "сеть" можно заменить на "последовательность".

Задача 1.5.61. Пусть τ, τ' две топологии на X. Если существует последовательность, множества пределов которой в топологиях τ и τ' не совпадают, то $\tau \neq \tau'$. Обратное верно, если τ, τ' удовлетворяют первой аксиоме счётности.

Решение. $\implies$ Если найдётся точка $x \in \lim_\tau x_n \setminus \lim_{\tau'} x_n$ для некоторой последовательности x_n, то это значит что спуск $f_*(n \to \infty)$ фильтра Фреше на $\mathbb{N}$ относительно функции $f : \mathbb{N} \to X,\ n \mapsto x_n$ мажорирует фильтр окрестностей φ_x в топологии τ и не мажорирует фильтр окрестностей φ'_x в топологии τ'. Откуда $\varphi_x \neq \varphi'_x$ и значит $\tau \neq \tau'$.

$\impliedby$ Если $\tau \neq \tau'$, то по критерию задачи 1.5.44 найдётся точка x такая, что фильтры окрестностей в этой точке не совпадают: $\varphi_x \neq \varphi'_x$. Пусть $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $\{U'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ счётные базисы этих фильтров. Без ограничения общности можно считать, что для всех $n :\ U_{n+1} \subset U_n$ и $U'_{n+1} \subset U'_n$ иначе перейдём к базисам $V_n = U_1 \cap \cdots \cap U_n$, $V'_n = U'_1 \cap \cdots \cap U'_n$ (проверьте). Из несовпадения фильтров следует, что в одном из базисов есть множество, в котором не содержится ни одно множество из другого базиса. Пусть это будет U_k. Тогда выберем произвольный $x_n \in U'_n \setminus U_k$ (разность непуста, иначе $U'_n \subset U_k$). Все члены последовательности лежат вне U_k, поэтому $x \notin \lim_\tau x_n$. С другой стороны, $x \in \lim_{\tau'} x_n$: любая окрестность из φ'_x содержит некоторый U'_n, а с ним и все члены, начиная с n-го. Итак, множества пределов последовательности x_n в топологиях τ и τ' не совпадают. □

Пример 1.5.62 (Контрпример к задаче 1.5.61)**.** Рассмотрим на $\mathbb{R}$ две топологии: дискретную топологию τ и *косчётную* топологию τ', в которой открыты пустое множество и все множества с не более чем счёт-

ными дополнениями. Топология τ хаусдорфова, τ' – непервосчётная T_1-топология. Хотя $\tau \neq \tau'$, в обеих топологиях сходятся только стационарные последовательности: если $x_n \to x$ в τ', то дополнение множества $A = \{x_n \mid x_n \neq x\}$ – косчётная окрестность точки x, содержащая почти все члены, т.е. почти все члены равны x. Множество пределов стационарной последовательности в обеих топологиях одно и то же (одноточечно), поэтому не существует последовательности с несовпадающими в этих топологиях множествами пределов. Заметим, что $\tau' \setminus \{\varnothing\}$ – фильтр, причём $\lim(\tau' \setminus \{\varnothing\}) = \mathbb{R}$.

Задача 1.5.63. Проверить все утверждения примера 1.5.62.

Задача 1.5.64. Пусть $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ произвольное счётное семейство последовательностей $(x_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ в первосчётном ТП (X, τ), сходящихся к x. Тогда существует возрастающая последовательность k_n такая, что $x \in \lim x_{nk_n}$.

Решение. Если $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ счётный базис фильтра φ_x окрестностей точки x, то можно считать $U_n \supset U_{n+1}$, иначе мы перейдём к семейству $V_n = U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Далее для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся $k_n \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall k \geq k_n : \ x_{nk} \in U_n$. Причём последовательность k_n, очевидно, можно выбрать возрастающей. Проверьте, что x_{nk_n} сходится к x. □

Задача 1.5.65 (Признак неметризуемости)**.** Если в ТП (X, τ) существует семейство последовательностей $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, сходящихся к x, такое, что для любой последовательности k_n натуральных чисел последовательность x_{nk_n} не сходится к x, то пространство X неметризуемо.

Решение. Указание: применяя результаты задач 1.5.61 и 1.5.64, убеждаемся, что X не первосчётно и, следовательно, неметризуемо. □

Пусть $\mathbf{F}(X)$ множество всех фильтров на множестве X. Для любого $U \subset X$ положим $Y_U = \{\varphi \in \mathbf{F}(X) \mid U \in \varphi\} \subset \mathbf{F}(X)$.

Задача 1.5.66 (топология Стоуна)**.** Семейство $\alpha = \{Y_U \mid U \subset X\}$ есть база топологии на $\mathbf{F}(X)$. Если в X более одного элемента, это T_0 (но не T_1) топология. Подмножество $\mathbf{U}(X) \subset \mathbf{F}(X)$ всех ультрафильтров на X с аналогичной топологией – хаусдорфово.

Решение. Очевидно, что $Y_X = \mathbf{F}(X)$ и $Y_U \cap Y_V = Y_{U\cap V}$, т.е. α база некоторой топологии. Для двух фильтров $\varphi \neq \psi$ один из них, например, ψ содержит множество U не лежащее в другом, а значит Y_U окрестность ψ и $\varphi \notin Y_U$, значит T_0 выполнена.

Тривиальный фильтр $\{X\}$ имеет единственную окрестность $Y_X = \mathbf{F}(X)$, которая содержит все фильтры, а значит T_1 не выполняется.

Для всех $\varphi, \psi \in \mathbf{U}(X):\ \varphi \neq \psi \implies \exists U:\ U \in \varphi \backslash \psi$. Но тогда $\mathbf{C}U \in \psi$ и $Y_U \ni \varphi,\ Y_{\mathbf{C}U} \ni \psi$ пара непересекающихся окрестностей ультрафильтров φ, ψ. Хаусдорфовость $\mathbf{U}(X)$ установлена. □

1.6 Непрерывность

Определение 1.6.1. Отображение $f : X \to Y$ ТП (X, τ_X) в ТП (Y, τ_Y) называется непрерывным, если прообраз открытого множества открыт:

$$\forall U \in \tau_Y :\ f^{-1}(U) \in \tau_X$$

Пример 1.6.2.

1. Произвольные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывные в классическом смысле, непрерывны в стандартной топологии на $\mathbb{R}$.
2. Константные функции $(\exists a \in Y\ \forall x \in X :\ f(x) = a)$ непрерывны.
3. Произвольные функции $f : X \to Y$ из МП (X, ρ_X) в МП (Y, ρ_Y), непрерывные в классическом смысле:
   $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x' \in X :\ \rho_X(x, x') < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$
   непрерывны в топологии, порождённой метрикой.
4. Любая функция из дискретного пространства (любая функция в антидискретное пространство) непрерывна.

Задача 1.6.3. Проверить утверждения примера 1.6.2.

Задача 1.6.4. Непрерывность функции равносильна каждому из следующих условий:

1. прообраз любого замкнутого множества замкнут
2. прообраз окрестности – окрестность:
   $$\forall x \in X\ \forall V_{f(x)} \in \varphi_{f(x)} :\ f^{-1}(V_{f(x)}) \in \varphi_x$$
3. Для любой окрестности $V_{f(x)}$ образа любой точки $x \in X$ найдётся окрестность U_x точки x, образ которой лежит в $V_{f(x)}$.
4. прообразы элементов некоторой базы открыты
5. прообразы элементов некоторой предбазы открыты

Решение. Проверим, что непрерывность равносильна п. 2.

$\implies$ Любая окрестность V точки $f(x)$ содержит открытое множество, содержащее эту точку. Прообраз этого множества содержится в $f^{-1}(V)$, содержит x и по определению открыт. Значит $f^{-1}(V)$ – окрестность x.

$\impliedby$ Любое открытое множество $V \subset Y$ является окрестностью любой своей точки, в частности всех точек из $V \cap f(X)$, а значит $f^{-1}(V)$ также является окрестностью любой своей точки, и следовательно открыто (см. п. 1 зад. 1.3.31).

Проверьте остальные равносильности. □

Задача 1.6.5. Функция $f : X \to Y$ из ТП X в хаусдорфово ТП Y непрерывна тогда и только тогда, когда для любой точки $x_0 \in X$: $\lim\limits_{\varphi_{x_0}} f = f(x_0)$, где φ_{x_0} – фильтр окрестностей точки x_0. Проверьте, что для неизолированной точки x_0 это условие можно записывать в классическом виде: $\lim\limits_{x\to x_0} f = f(x_0)$.

Задача 1.6.6. Функция $f : X \to Y$ между хаусдорфовыми ТП X, Y непрерывна тогда и только тогда, когда для любой точки x и для любой сети, сходящейся к этой точке, сеть из образов сходится к образу:

$$\forall x\ \forall (x_n)_{n\in N} :\ \lim x_n = x \implies \lim f(x_n) = f(x)$$

Решение. $\Longrightarrow$ Пусть f непрерывна, $y = f(x)$ – произвольная точка образа и U_y – произвольная окрестность y. Тогда почти вся сеть x_n лежит в окрестности $V_x = f^{-1}(U_y)$ точки x, поскольку из определения непрерывности очевидно следует, что прообраз окрестности точки $f(x)$ есть окрестность точки x, а значит сеть $f(x_n)$ почти вся лежит в U_y.

$\Longleftarrow$ Пусть теперь выполнено условие для сетей и $V_{f(x)}$ – окрестность произвольной точки $y = f(x)$ из образа f. Если $W = f^{-1}(V_{f(x)}) \ni x$ не является окрестностью точки x, то любое открытое множество, содержащее x (а следовательно, любая окрестность x) имеет точку вне W. Выбрав такую точку h_U для всех $U \in \varphi_x$ мы получим сеть $h : U \mapsto h_U$, определённую на направленном множестве φ_x, которая сходится к x (см. зад. 1.5.37). Тогда, согласно условию, сеть $f(h_U)$ должна сходиться к $f(x)$, но окрестность $V_{f(x)}$, по построению, не содержит точек сети. Противоречие. □

Задача 1.6.7. Сформулируйте и решите две предыдущие задачи для произвольных (возможно, нехаусдорфовых) X, Y.

Задача 1.6.8. Непрерывная функция $f : X \to Y$ останется непрерывной, если усилить топологию на X и/или ослабить топологию на Y.

Задача 1.6.9. Для любого семейства топологических пространств $\{X_i, \tau_i\}_{i\in I}$, для любого множества Y и для любого семейства отображений $\{f_i : X_i \to Y\}$ ($\{g_i : Y \to X_i\}$) существует тончайшая (грубейшая) топология на Y такая, что все отображения f_i (g_i) непрерывны. Соответствующая тончайшая (грубейшая) топология на Y называется *финальной (инициальной)* топологией относительно семейства отображений f_i (g_i).

Решение. Указание: использовать задачу 1.3.9. Для тончайшей (финальной) топологии проверьте, что семейство $\Phi = \{U \subset Y \mid \forall i :\ f_i^{-1}(U) \in$

$\tau_i\}$ – топология, так как прообраз перестановочен с объединениями и пересечениями. □

Задача 1.6.10. Если функция $f : X \to Y$ непрерывна, то спуск любого фильтра на X, сходящегося к x, сходится к $f(x)$. Обратно, если для любой точки x спуск любого ультрафильтра, сходящегося к x, сходится к $f(x)$, то f непрерывна.

Решение. $\Longrightarrow$ Пусть f непрерывна, φ – сходящийся фильтр, $x \in \lim \varphi$. Пусть U окрестность $f(x)$, тогда $f^{-1}(U)$ окрестность x и найдётся $V \in \varphi$ такой, что $V \subset f^{-1}(U)$. Откуда $f(V) \subset U$ и так как $f(V) \in f_*\varphi$ (почему?), то $f(x) \in \lim f_*\varphi$.

$\Longleftarrow$ Пусть теперь спуск сходящегося к x ультрафильтра сходится к $f(x)$. Если f не является непрерывной, то найдётся точка $y = f(x)$ и её окрестность V_y, такая, что $W = f^{-1}(V_y)$ не является окрестностью x. Это значит, что пересечение $\mathbf{C}W$ с любой окрестностью U_x точки x непусто (иначе некоторая окрестность лежала бы в W, а значит W было бы окрестностью x). Таким образом, семейство множеств $\varphi_x \cup \{\mathbf{C}W\}$ центрировано, и значит лежит в некотором ультрафильтре φ (см. зад. 1.5.52), который очевидно сходится к x, так как $\varphi_x \subset \varphi$. С другой стороны, по построению $V_y \notin f_*\varphi$, т.е. $f(x) \notin \lim f_*\varphi$. Противоречие. □

Задача 1.6.11. Если $f, g : X \to Y$ пара непрерывных функций из ТП X в хаусдорфово ТП Y, то множество $T = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ замкнуто.

Решение. Пусть $x \in X \setminus T$. Тогда $f(x) \neq g(x)$ и найдутся непересекающиеся открытые окрестности этих точек, скажем, V и W, и x лежит в открытом множестве $U = f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$. Для любого y из U элементы $f(y) \in V$ и $g(y) \in W$ различны, т.е. $U \cap T = \varnothing$ и $U \subset X \setminus T$. Итак, $X \setminus T$ открыто, а значит T замкнуто. □

Определение 1.6.12. Отображение $f : X \to Y$ ТП X в ТП Y называется *гомеоморфизмом*, если оно биективно и непрерывно вместе с обратным.

Пример 1.6.13. Приведём примеры гомеоморфизмов:

1. $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$ со стандартной топологией, $f(x) = e^x$
2. $X = \mathbb{R}$, $Y = (-1; 1)$ со стандартной топологией, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$
3. $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^2$ со стандартной топологией, $f(x, y) = (y, x)$
4. $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^n$ со стандартной топологией, f произвольный линейный (или аффинный) изоморфизм
5. Любые два невырожденных (содержащих более одной точки) ограниченных промежутка в $\mathbb{R}$, которые одновременно открыты, полуоткрыты или замкнуты, гомеоморфны.

6. Любой открытый круг в $\mathbb{R}^2$ гомеоморфен любому открытому прямоугольнику

Задача 1.6.14. Проверьте все примеры 1.6.13.

Метатеорема 1.6.15. Все топологические свойства пространств сохраняются при гомеоморфизмах.

Задача 1.6.16. Композиция непрерывных отображений непрерывна, композиция гомеоморфизмов – гомеоморфизм.

Задача 1.6.17. ТП метризуемо тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно метрическому пространству.

Определение 1.6.18. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ ТП (X, τ_X) в ТП (Y, τ_Y) называется:

1. открытым, если образ открытого множества открыт, т.е. $U \in \tau_X \implies f(U) \in \tau_Y$
2. замкнутым, если образ замкнутого множества замкнут, т.е. $S \in \sigma_X \implies f(S) \in \sigma_Y$

Пример 1.6.19. Пусть (X, τ) – *связное двоеточие* (или *двоеточие Серпинского*):

$$X = \{0, 1\},\ \tau = \{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}\}$$

Тогда константная функция $f : X \to X$, $f(x) = 0$, открыта, но не замкнута, а константная функция $f(x) = 1$ замкнута, но не открыта (почему?).

Задача 1.6.20. Непрерывная биекция двух ТП является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда она открыта или замкнута.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема об *инвариантности области*, которую примем без доказательства: комбинаторное доказательство можно найти в [7], гомологическое – в [19, теорема 2B.3] (подмножества $\mathbb{R}^n$ ниже рассматриваются с топологией, индуцированной стандартной метрикой):

Теорема 1.6.21 (Брауэр, 1912)**.** Непрерывная инъекция открытого подмножества $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ является открытым отображением.

Определение 1.6.22. Подмножества A и B ТП X называются *функционально отделимыми*, если существует непрерывная функция $f : X \to [0; 1]$ такая, что $f(A) = 0,\ f(B) = 1$.

Задача 1.6.23 (большая лемма Урысона)**.** Аксиома T_4 в ТП X эквивалентна функциональной отделимости любой пары непересекающихся замкнутых подмножеств.

Решение. Если $A, B \in \sigma$ функционально отделимы функцией f, то $U_A = f^{-1}([0;\frac{1}{2}))$ и $U_B = f^{-1}((\frac{1}{2};1])$ суть непересекающиеся окрестности множеств A и B.

Пусть теперь выполнена T_4. Построим индукцией по n семейство $\{U_r\}_{r\in D}$ открытых подмножеств, удовлетворяющих условию $\mathrm{cl}(U_r) \subset U_{r'}$ при $r < r'$, где D – множество двоично-рациональных чисел из $[0;1]$ вида $r = \frac{k}{2^n}$, $0 \le k \le 2^n$.

Положим $U_1 = X \setminus B$; это открытое множество содержит замкнутое множество A, и по малой лемме Урысона найдётся открытое U_0 такое, что $A \subset U_0 \Subset U_1$. Пусть уже построены все U_r со знаменателями до 2^n включительно. Выберем $U = U_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$, удовлетворяющее условию $U_{\frac{k}{2^n}} \Subset U \Subset U_{\frac{k+1}{2^n}}$. Такое U найдётся по малой лемме Урысона, применённой к замкнутому множеству $\mathrm{cl}(U_{\frac{k}{2^n}})$ и содержащему его открытому множеству $U_{\frac{k+1}{2^n}}$. Заметим, что тогда $\mathrm{cl}(U_r) \subset U_{r'}$ и для любых $r < r'$ из D: приведя r, r' к общему знаменателю 2^m и пройдя по цепочке соседних дробей $r = \frac{j}{2^m} < \frac{j+1}{2^m} < \cdots < \frac{j'}{2^m} = r'$, получаем $\mathrm{cl}(U_r) \subset U_{\frac{j+1}{2^m}} \subset \mathrm{cl}(U_{\frac{j+1}{2^m}}) \subset \cdots \subset U_{r'}$.

Теперь положим:

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in U_r\} & , \text{ если } x \in U_1 \\ 1 & , \text{ если } x \notin U_1 \end{cases}$$

По построению, очевидно, $f(A) = 0,\ f(B) = 1$.

Пусть $f(x) < a \le 1$. Тогда $x \in U_1$, иначе $f(x) = 1 \ge a$; по определению инфимума найдётся $r \in D$ с $r < a$ и $x \in U_r$. Обратно, если $x \in U_r$ при некотором $r < a \le 1$, то $x \in U_1$ (ибо $U_r \subset U_1$) и $f(x) \le r < a$. Итак, $f^{-1}([0;a)) = \bigcup_{r<a} U_r$ открыто в X, как объединение открытых множеств.

Если $f(x) > b \ge 0$, то найдётся $r \in D$ такое, что $b < r$ и $x \notin U_r$: при $x \notin U_1$ подходит $r = 1$; при $x \in U_1$ по плотности D найдётся $r \in D \cap (b; f(x))$, и $x \notin U_r$, поскольку $r < f(x) = \inf\{r' \mid x \in U_{r'}\}$. Выбрав теперь $s \in D$ так, что $b < s < r$ (такое s существует, поскольку D плотно в $[0;1]$), можем написать $x \notin \mathrm{cl}(U_s) \subset U_r$. Откуда, согласно законам де Моргана, получаем:

$$x \notin \bigcap_{s>b} \mathrm{cl}(U_s) \iff x \in \mathbf{C}\bigcap_{s>b} \mathrm{cl}(U_s) = \bigcup_{s>b} \mathbf{C}\,\mathrm{cl}(U_s) = V$$

Заметим, что V открыто, как объединение открытых множеств. С другой стороны, из $x \in V$ следует $f(x) > b$: если $x \notin \mathrm{cl}(U_s)$ при некотором $s \in D$, $s > b$, то при $r \le s$ имеем $U_r \subset \mathrm{cl}(U_s) \not\ni x$, поэтому $x \in U_r$ возможно лишь при $r > s$, откуда $f(x) \ge s > b$ (а при $x \notin U_1$ сразу $f(x) = 1 > b$). Итак, $f^{-1}((b;1]) = V$ открыто в X.

Поскольку множества вида $[0;a)$ и $(b;1]$ составляют предбазу стандартной топологии отрезка $[0;1]$ и их прообразы открыты, то согласно п. 5 зад. 1.6.4, функция f непрерывна. □

1.7 Некоторые топологические конструкции

1.7.1 Спуск и подъём топологии

Определение 1.7.1. Пусть $f : X \to Y$ отображение из множества X в множество Y. Если τ_X топология на X, а τ_Y топология на Y, то положим:

$$f^*\tau_Y = \{f^{-1}(V) \mid V \in \tau_Y\} \subset \mathscr{P}(X) : \qquad \text{подъём } \tau_Y$$
$$f_*\tau_X = \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \tau_X\} \subset \mathscr{P}(Y) : \qquad \text{спуск } \tau_X$$

Задача 1.7.2. $f^*\tau_Y$ (соответственно $f_*\tau_X$) – это минимальная (максимальная) топология, такая что $f : (X, f^*\tau_Y) \to (Y, \tau_Y)$ ($f : (X, \tau_X) \to (Y, f_*\tau_X)$) непрерывно.

Определение 1.7.3. Будем называть топологию $f^*\tau_Y$ *подъёмом* топологии τ_Y относительно f, а топологию $f_*\tau_X$ *спуском* топологии τ_X относительно f

Можно осуществлять подъём и спуск топологий относительно множества отображений.

Задача 1.7.4. Пусть $F = \{f_i : X \to Y_i\}$ множество отображений из X в Y_i. Тогда для любых топологий τ_i на Y_i найдётся единственная минимальная топология $F^*\tau_X$ на X такая, что все отображения $f_i \in F$ непрерывны. Двойственно: пусть $F = \{f_i : X_i \to Y\}$, тогда для любых топологий τ_i на X_i найдётся единственная максимальная топология $F_*\tau_Y$ на Y такая, что все отображения $f_i \in F$ непрерывны.

Решение. Указание: применить результат задачи 1.3.9. Для одного отображения это инициальная и финальная топологии; подъём по семейству есть супремум поднятых топологий, спуск – инфимум спущенных. □

Обратите внимание на то, что операции подъёма и спуска являются двойственными друг другу.

Пусть L конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{F}$, где $\mathbb{F}$ это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Тогда выбор базиса $\mathbf{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ в L задаёт координатный изоморфизм $\iota_e : L \to \mathbb{F}^n$, который позволяет поднять топологию с $\mathbb{F}^n$ на L.

Задача 1.7.5. На линейном пространстве L топология, поднятая координатным изоморфизмом не зависит от выбора базиса. Назовём эту топологию *стандартной топологией линейного пространства.*

Решение. Как мы знаем, для пары базисов $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ линейный изоморфизм $T = \iota_e \circ \iota_{e'}^{-1} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ является гомеоморфизмом (при $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ отождествляем $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$). Поэтому для любого $U \subset \mathbb{F}^n$ выполнено $\iota_{e'}^{-1}(U) = \iota_e^{-1}(T(U))$: всякое множество, открытое в топологии, поднятой по базису $\mathbf{e}'$, открыто и в топологии, поднятой по $\mathbf{e}$. По симметрии эти топологии совпадают. □

1.7.2 Топологические подпространства

Пусть Y подмножество ТП (X, τ). Положим $\tau_Y = \{V \subset Y \mid \exists U \in \tau : \ V = U \cap Y\}$, т.е. τ_Y есть след $\tau|_Y$ топологии τ на Y.

Задача 1.7.6. τ_Y – топология на Y.

Решение. Достаточно вспомнить, что для любых $\alpha \subset \mathscr{P}(X)$ и $U, V, Y \subset X$ верны равенства $(\bigcup_{Z\in\alpha} Z) \cap Y = \bigcup_{Z\in\alpha}(Z \cap Y)$ и $(U \cap V) \cap Y = (U \cap Y) \cap (V \cap Y)$ □

Определение 1.7.7. ТП (Y, τ_Y) называется *подпространством* ТП (X, τ). Топология τ_Y называется *индуцированной* топологией подпространства Y.

Пример 1.7.8. Для отрезка $[a; b] \subset \mathbb{R}$ с топологией индуцированной из $\mathbb{R}$ множества вида $[a; c)$ и $(c; b]$ (для любого $c \in (a; b)$ из интервала) являются открытыми, как пересечения отрезка с интервалами $(-\infty; c)$ и $(c; +\infty)$ соответственно, хотя эти множества не открыты в исходной топологии.

Задача 1.7.9. Привести пример ЛУМ $(X, <)$ и подмножества $Y \subset X$, таких что порядковая топология на Y не совпадает с индуцированной топологией подпространства в порядковой топологии на X

Решение. Положим $X = \mathbb{Q}$, $Y = \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{2\} \subset \mathbb{Q}$. Тогда любая окрестность U точки $2 \in Y$ в порядковой топологии должна содержать открытый интервал, а так как 2 максимальный элемент в Y и он должен лежать в интервале, то интервал имеет вид $(\frac{k}{k+1}; +\infty)$ и содержит все элементы из Y, кроме конечного числа. В индуцированной топологии $\{2\} = Y \cap (1; 3)$ – открыто. □

Задача 1.7.10. Для $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ индуцированная топология на Y совпадает с порядковой.

Определение 1.7.11. Непрерывное инъективное отображение $f: X \to Y$ будем называть *топологическим вложением* или просто *вложением*, если f является гомеоморфизмом X на подпространство $f(X) \subset Y$.

Задача 1.7.12. Если непрерывная инъекция $f : X \to Y$ является замкнутым (открытым) отображением, то f вложение. Приведите пример вложения, которое не замкнуто и не открыто.

Решение. Ввиду замкнутости (открытости) f, образ $f(V)$ любого замкнутого (открытого) $V \subset X$ замкнут (открыт) в Y, а значит и в $f(X)$. Осталось применить задачу 1.6.20. Пример: открытый интервал, вложенный в $\mathbb{R}^2$. □

Определение 1.7.13. Если топология в ТП обладает счётной базой, то говорят, что пространство удовлетворяет *второй аксиоме счётности*. Мы будем кратко называть такие пространства *второсчётными*.

Задача 1.7.14. Убедитесь, что второсчётность влечёт сепарабельность и первосчётность. Постройте пример ТП, в котором нарушается обратная импликация.

Решение. Указание: для построения контрпримера рассмотрите $\mathbb{R}$ с топологией, база которой задаётся семейством полуинтервалов $[a; b)$. Это так называемая *прямая Зоргенфрея* (Sorgenfrey line). □

1.7.3 Декартово произведение ТП

Задача 1.7.15. Если $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ два ТП и β_X, β_Y некоторые базы для τ_X, τ_Y соответственно, то множество $\beta_{X\times Y} = \beta_X \times \beta_Y = \{U \times V \mid U \in \beta_X \ \wedge \ V \in \beta_Y\} \subset \mathscr{P}(X \times Y)$ есть база некоторой топологии на $X \times Y$. Все такие базы эквивалентны, т.е. получаемая топология определена однозначно.

Решение. Проверим условия задачи 1.3.16. Первое: для любого $(x, y) \in X \times Y$ найдутся $U \in \beta_X$, $V \in \beta_Y$ такие, что $x \in U$ и $y \in V$, откуда $(x, y) \in U \times V$. Второе: пусть $(x, y) \in (U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V')$ (проверьте тождество). Множество $U \cap U'$ открыто в τ_X и содержит x, поэтому по критерию базы найдётся $W_1 \in \beta_X$ с $x \in W_1 \subset U \cap U'$; аналогично найдётся $W_2 \in \beta_Y$ с $y \in W_2 \subset V \cap V'$. Тогда $(x, y) \in W_1 \times W_2 \subset (U \times V) \cap (U' \times V')$. Проверьте эквивалентность всех баз, полученных таким способом.

□

Определение 1.7.16. Топология, построенная в задаче 1.7.15, называется топологией декартова произведения. А соответствующее ТП $(X \times Y, \tau_{X\times Y})$ – декартовым произведением ТП X и Y.

По индукции это определение можно распространить на любое конечное произведение ТП.

Задача 1.7.17. Топология $\tau_{X\times Y}$ на $X \times Y$ совпадает с топологией, порождённой фильтрами окрестностей точек $\varphi_{(x,y)} = \varphi_x \times \varphi_y$.

Задача 1.7.18. Топология декартова произведения – это слабейшая топология, в которой канонические проекции π_X, π_Y непрерывны. Отображения π_X, π_Y открыты, но не обязательно замкнуты.

Решение. Пусть $U \in \tau_X$, тогда $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y \in \beta_{X\times Y}$ – открыто, следовательно π_X – непрерывно. Ситуация π_Y разбирается аналогично.

Пусть теперь π_X, π_Y непрерывны в некоторой топологии τ на $X \times Y$. Любой элемент $W \in \beta_{X\times Y}$ имеет вид $W = U \times V$, где $U \in \tau_X,\ V \in \tau_Y$. Так как $W = U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V) = \pi_X^{-1}(U) \cap \pi_Y^{-1}(V)$ (проверьте), то W открыто в τ как пересечение открытых. Итак, $\beta_{X\times Y} \subset \tau$, а значит $\tau_{X\times Y} \subset \tau$.

Пусть $W \in \tau_{X\times Y},\ x \in \pi_X(W),\ \pi_X(x, y) = x$. Тогда найдём элемент $U \times V$ базы $\beta_{X\times Y}$ такой, что $(x, y) \in U \times V \subset W$. Тогда $x \in U = \pi_X(U \times V) \subset \pi_X(W)$, что означает открытость $\pi_X(W)$.

Подмножество $\{(x, 1/x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ замкнуто (почему?), но обе проекции равны $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и, следовательно, не замкнуты. □

Задача 1.7.19. ТП X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta_X = \{(x; x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ есть замкнутое подмножество декартова квадрата.

Определение 1.7.20. Пусть $U \subset X \times Y,\ X_0 \subset X,\ Y_0 \subset Y$, тогда *срезом* U по X_0 (соответственно Y_0) называется множество $U(X_0) = \{y \in Y \mid \exists x \in X_0 :\ (x, y) \in U\} \subset Y$ ($U(Y_0) = \{x \in X \mid \exists y \in Y_0 :\ (x, y) \in U\} \subset X$). Пишем $U(x)$ ($U(y)$) для $X_0 = \{x\}$ ($Y_0 = \{y\}$).

Задача 1.7.21. Срез открытого множества открыт, срез замкнутого множества по одноэлементному подмножеству замкнут.

Решение. Пусть $U \subset X \times Y$ открытое множество, $X_0 \subset X$ и $y \in U(X_0)$. Это означает, что найдётся $x \in X_0$ такая, что $(x, y) \in U$. Тогда по открытости U найдутся окрестности U_x и V_y точек x и y соответственно такие, что $(x, y) \in U_x \times V_y \subset U$. Значит $V_y = (U_x \times V_y)(x) \subset U(x) \subset U(X_0)$, т.е. любая точка y входит в срез $U(X_0)$ вместе с некоторой окрестностью V_y, что означает открытость среза. Утверждение о замкнутости в

случае $X_0 = \{x\}$ следует из тождества $\mathbf{C}(U(x)) = (\mathbf{C}U)(x)$ (дополнение среза равно срезу дополнения), верного только для одноточечных подмножеств. Завершите доказательство. □

Задача 1.7.22. Отображение ТП $f : Z \to X \times Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны его компоненты $f_X = \pi_X \circ f,\ f_Y = \pi_Y \circ f$.

Решение. Пусть $f_X,\ f_Y$ непрерывны и $U \subset X,\ V \subset Y$ открыты. Проверьте, что $\pi_X^{-1}(U) \cap \pi_Y^{-1}(V) = U \times V$. Откуда $f^{-1}(U \times V) = f^{-1}(\pi_X^{-1}(U) \cap \pi_Y^{-1}(V)) = f^{-1}(\pi_X^{-1}(U)) \cap f^{-1}(\pi_Y^{-1}(V)) = f_X^{-1}(U) \cap f_Y^{-1}(V)$ и значит открыто (почему?). Итак, прообразы элементов базы топологии открыты, а значит f непрерывно. Проверьте обратную импликацию. □

Задача 1.7.23. Произведение $f_1 \times f_2$ отображений ТП $f_i : X_i \to Y_i,\ i = 1; 2$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны оба сомножителя.

Задача 1.7.24. Пусть $f : X \to Y$ непрерывная функция из ТП X в ТП Y. Тогда отображение $\hat{f} : X \to X \times Y$ определяемое соотношением $\hat{f}(x) = (x; f(x))$ является вложением. Другими словами, любое ТП гомеоморфно графику любой непрерывной функции из этого ТП. И значит все графики функций из данного ТП гомеоморфны между собой.

Решение. Если $1_X : X \to X$ тождественное отображение, а $\Delta : X \to X \times X,\ x \mapsto (x; x)$ диагональ, то $\hat{f} = (1_X \times f) \circ \Delta$ и значит непрерывно, как композиция непрерывных отображений (проверьте). Пусть теперь $U \subset X$ открыто. Поскольку $\hat{f}(U) = \{(x; f(x)) \mid x \in U\} = (U \times Y) \cap \hat{f}(X)$ открыто в $\hat{f}(X)$, то $\hat{f}$ открыто, как отображение из X в $\hat{f}(X)$ и значит является гомеоморфизмом на $\hat{f}(X)$. □

Задача 1.7.25. Пусть X, Y два ТП и $y \in Y$ произвольная точка. Тогда отображение $f_y : X \to X \times Y,\ x \mapsto (x, y)$ является вложением.

Решение. Указание: использовать результат предыдущей задачи. □

Задача 1.7.26. Топология декартова произведения в $\mathbb{R}^n$ порождённая стандартной топологией на $\mathbb{R}$ совпадает с топологией, индуцированной стандартной метрикой в $\mathbb{R}^n$. (Напомним: $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$, где $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$)

Решение. В качестве базы β топологии декартова произведения выступает семейство открытых брусов $I = (a_1; b_1) \times \cdots \times (a_n; b_n),\ \forall i : a_i < b_i$. Центром бруса назовём точку $c = (\frac{a_1+b_1}{2}, \ldots, \frac{a_n+b_n}{2})$. База метрической топологии – шары произвольного радиуса с центром в произвольной точке. В любом брусе содержится шар $B_r(c)$, где $r < \min_i \frac{b_i-a_i}{2}$, а c – центр бруса (проверьте).

В любом шаре $B_r(c)$ содержится брус I с центром в точке c. Достаточно положить $a = (c_1 - \frac{r}{2\sqrt{n}}, \ldots, c_n - \frac{r}{2\sqrt{n}})$, $b = (c_1 + \frac{r}{2\sqrt{n}}, \ldots, c_n + \frac{r}{2\sqrt{n}})$, поскольку для диаметра бруса (см. опр. 1.4.8) выполнено неравенство $d(I) \leq \sqrt{n}\max_i(b_i - a_i)$ (проверьте). Заметим, что для любой точки любого шара, найдётся шар с центром в этой точке, целиком лежащий в данном шаре, а для любой точки любого бруса – брус с центром в этой точке, целиком лежащий в данном брусе (почему?). Теперь осталось применить задачу 1.3.22. □

Задача 1.7.27. Пусть (X, ρ) МП. Функция расстояния $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ непрерывна в топологии декартова произведения на $X \times X$, индуцированной метрической топологией на X.

Решение. Для любого интервала $I = (a; b) \subset \mathbb{R}$ прообраз $\rho^{-1}(I)$ имеет вид $\{(x, y) \in X \times X \mid a < \rho(x, y) < b\}$. Если теперь $(x, y) \in \rho^{-1}(I)$ и $\rho(x, y) = c$, то положив $\varepsilon = \frac{1}{2}\min(c - a, b - c)$, мы получим, что произведение шаров $B_\varepsilon(x) \times B_\varepsilon(y)$ лежит в $\rho^{-1}(I)$, так как для любой точки $(x', y') \in B_\varepsilon(x) \times B_\varepsilon(y)$: $\rho(x', y') \leq \rho(x', x) + \rho(x, y) + \rho(y, y') < 2\varepsilon + \rho(x, y) \leq (b - c) + c = b$, с другой стороны, $\rho(x, y) < 2\varepsilon + \rho(x', y') \implies \rho(x', y') > \rho(x, y) - 2\varepsilon \geq c - (c - a) = a$, т.е. $(x', y') \in \rho^{-1}(I)$. Непрерывность ρ установлена. □

Задача 1.7.28. Если $f : X \to Y$ – непрерывная функция в хаусдорфово ТП Y, то её график $f \subset X \times Y$ замкнут.

Решение. $(x, y) \notin f \iff f(x) \neq y$. По хаусдорфовости найдём пару непересекающихся окрестностей U, V точек $f(x), y$ соответственно. Тогда $f^{-1}(U) \times V$ не пересекается с f и является окрестностью точки (x, y). Итак, множество $\mathbf{C}f$ – открыто, а значит множество f – замкнуто. □

Задача 1.7.29. Если $f, g : X \to Y$ непрерывные отображения ТП X в хаусдорфово ТП Y, то множество $B = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ замкнуто в X. В частности, если f и g совпадают на плотном подмножестве, то $f = g$.

Решение. Указание: $B = h^{-1}(\Delta_Y)$, где $h : X \to Y \times Y$, $x \mapsto (f(x); g(x))$, а $\Delta_Y = \{(y; y) \mid y \in Y\}$ диагональ множества Y. Далее, воспользоваться задачами 1.7.19, 1.7.22. □

Определение 1.7.30. Пусть $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ семейство ТП. Определим топологию на декартовом произведении $\prod\limits_{i \in I} X_i$ с базой, состоящей из множеств вида $\prod\limits_{i \in I} U_i$, где $U_i \in \tau_i$ и почти все U_i совпадают с X_i. Эта топология называется *топология декартова произведения* или *топология Тихонова*. Если все $(X_i, \tau_i) = (X, \tau)$ совпадают, мы говорим об *I-ой декартовой степени* X^I ТП X.

Задача 1.7.31. Топология Тихонова – это минимальная топология, в которой все проекции $\pi_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_i$ непрерывны.

1.7.4 Топологическая размерность

Определение 1.7.32. *Покрытием* подмножества Y в ТП X называется семейство $\alpha \subset \mathscr{P}(X)$, такое что $Y \subset \cup\alpha$. Если $\alpha \subset \tau$ мы говорим об *открытом покрытии* Y. Если покрытие β содержится в покрытии α, говорим что β *подпокрытие* α. Если $\forall U \in \beta\ \exists V \in \alpha :\ U \subset V$, говорим что покрытие β *вписано* в покрытие α. Покрытие *локально конечно*, если любая точка обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов покрытия. Покрытие *конечно*, если α конечное множество.

Говорим, что *кратность* покрытия α не превосходит n, и пишем $\operatorname{ord}\alpha \le n$, если любые $n+1$ элементов покрытия не пересекаются. Соответственно $\operatorname{ord}\alpha = n$, если $n-1 < \operatorname{ord}\alpha \le n$.

Определение 1.7.33. Для ТП X его *топологическая размерность* $\dim X$ определяется следующим образом:

- $\dim X = -1$ тогда и только тогда, когда $X = \varnothing$.
- $\dim X \le n$, если для любого конечного открытого покрытия α существует вписанное в него конечное открытое покрытие β такое, что $\operatorname{ord}\beta \le n+1$.
- $\dim X = n$, если $\dim X \le n$ и неверно, что $\dim X \le n-1$.
- $\dim X = \infty$, если для любого n $\dim X > n$.

Эта размерность называется *размерностью Лебега.*

Задача 1.7.34. Докажите, что $\dim X = 0$ для любого непустого дискретного пространства X.

Решение. Пусть X – непустое дискретное пространство. Любое подмножество X является открытым. Рассмотрим любое конечное открытое покрытие $\{U_i\}_{i\in I}$ пространства X. Занумеруем его элементы: $U_1, \dots, U_m$. В качестве вписанного покрытия возьмём дизъюнктификацию $V_k = U_k \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_{k-1})$, $k = 1, \dots, m$: множества V_k открыты, как и любые подмножества дискретного пространства, попарно не пересекаются, покрывают X и $V_k \subset U_k$. Кратность этого конечного покрытия не превосходит 1. Следовательно, $\dim X \le 0$. Так как X непусто, $\dim X \ne -1$. Значит, $\dim X = 0$. □

Задача 1.7.35. Докажите, что если Y – замкнутое подпространство X, то $\dim Y \le \dim X$.

Решение. При $\dim X = \infty$ неравенство тривиально, поэтому пусть $\dim X = n$ и Y – замкнутое подпространство в X. Пусть $\{V_j\}_{j\in J}$ – конечное открытое (в индуцированной топологии) покрытие Y. Для каждого $j \in J$ существует открытое в X множество U_j такое, что $V_j = Y \cap U_j$. Поскольку Y замкнуто, его дополнение $\mathbf{C}Y$ открыто. Семейство $\{U_j\}_{j\in J}$ вместе с $\mathbf{C}Y$ образует конечное открытое покрытие X. Так как $\dim X = n$, существует вписанное в него открытое покрытие α кратности не выше $n+1$. Рассмотрим семейство $\beta = \{A \cap Y \mid A \in \alpha, A \cap Y \neq \varnothing\}$. Это семейство β является открытым покрытием Y. Проверим, что оно вписано в $\{V_j\}_{j\in J}$. Для любого элемента из β вида $A \cap Y$, множество A принадлежит α. Значит, A содержится в одном из элементов покрытия $\{U_j\}_{j\in J} \cup \{\mathbf{C}Y\}$. Если $A \subset \mathbf{C}Y$, то $A \cap Y = \varnothing$, но мы рассматриваем только непустые пересечения. Значит, $A \subset U_j$ для некоторого $j \in J$. Тогда $A \cap Y \subset U_j \cap Y = V_j$. Кратность покрытия β не превосходит кратности α, то есть не выше $n+1$. Следовательно, $\dim Y \leq n$. □

Следующую теорему примем без доказательства (см. [8]).

Теорема 1.7.36 (Теорема Лебега-Брауэра о размерности)**.** Топологическая размерность евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ равна n, то есть $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Замечание 1.7.37. Гипотезу о том, что топологическая размерность $\mathbb{R}^n$ равна n высказал Анри Лебег в 1911 году, но его набросок доказательства содержал ошибку. Лёйтзен Брауэр в 1913 году исправил этот недочет, строго доказав гипотезу Лебега.

1.8 Компактность

Задача 1.8.1. Если (открытое, локально конечное) покрытие $\alpha = \{U_i\}_{i\in I}$ подмножества $Y \subset X$ вписано в покрытие $\beta = \{V_j\}_{j\in J}$, то найдётся (открытое, локально конечное) покрытие $\gamma = \{W_j\}_{j\in J}$ такое, что для всех $j \in J:\ W_j \subset V_j$.

Решение. Указание: для каждого $i \in I$ фиксируем некоторый $f(i) \in J$ такой, что $U_i \subset V_{f(i)}$. Получим функцию $f : I \to J$. Положим $W_j = \bigcup_{f(i)=j} U_i$. □

Определение 1.8.2. ТП X называется *компактным*, если из любого открытого покрытия X можно извлечь конечное подпокрытие. Подмножество $Y \subset X$ называется *компактным*, если оно компактно в индуцированной топологии подпространства; *предкомпактным*, если его замы-

кание $\mathrm{cl}(Y)$ компактно. ТП X называется *локально компактным*, если любая его точка обладает компактной окрестностью.

Метаопределение 1.8.3. Вообще будем говорить, что свойство выполнено *локально* на ТП, если любая точка обладает такой окрестностью, на которой свойство выполняется. Первые примеры: определение локальной компактности и локальной конечности выше.

Дадим обобщение понятия подпоследовательности для сетей.

Определение 1.8.4. Подмножество Y в ЧУМ X называется кофинальным, если $\forall x \in X\ \exists y \in Y:\ x \le y$.

Сеть $f : N \to X$ называется подсетью сети $g : M \to X$, если найдётся монотонная функция $h : N \to M$ с кофинальным образом ($k \le n \implies h(k) \le h(n)$ и $h(N)$ кофинально в M), такая что $g \circ h = f$. Если g обозначаем $(x_m)_{m\in M}$, то f обозначаем $(x_{h(n)})_{n\in N}$.

Предел любой подсети называется *частичным пределом* сети.

Обратим внимание на существенное отличие от определения подпоследовательности: отсутствует требование инъективности h.

Задача 1.8.5. Точка x является частичным пределом сети $(x_m)_{m\in M}$ тогда и только тогда, когда $\forall U_x\ \forall m \in M\ \exists k \ge m:\ x_k \in U_x$ (говорят: сеть часто бывает в окрестности x)

Решение. $\implies$ Пусть $x \in \lim(x_{h(n)})_{n\in N}$ – предел некоторой подсети $(x_{h(n)})_{n\in N}$, U_x – произвольная окрестность x, $m \in M$ – любой элемент. По кофинальности $h(N)$ в M найдётся $n_1 \in N$ такой, что $h(n_1) \ge m$. По определению предела 1.5.34 найдётся $n_2 \in N$ такой, что $\forall k \ge n_2:\ x_{h(k)} \in U_x$. По определению 1.5.33 $\exists n \in N:\ n \ge n_1 \ \wedge\ n \ge n_2$, но тогда $k = h(n) \ge h(n_1) \ge m$ и $x_k \in U_x$.

$\impliedby$ Положим $N = \{(m, U) \in M \times \varphi_x \mid x_m \in U\}$ с покомпонентным порядком: $(m, U) \le (m', U') :\iff m \le m' \ \wedge\ U' \subset U$. Множество N направлено: для $(m_1, U_1), (m_2, U_2) \in N$ возьмём верхнюю грань $m \ge m_1, m_2$ в M и, пользуясь условием, найдём $k \ge m$ такое, что $x_k \in U_1 \cap U_2$; тогда $(k, U_1 \cap U_2) \in N$ – верхняя грань обеих пар. Отображение $h : N \to M,\ (m, U) \mapsto m$ монотонно, а его образ кофинален: для $m \in M$ найдётся $k \ge m$ с $x_k \in X$, т.е. $(k, X) \in N$ и $h(k, X) \ge m$. Полученная подсеть в индексе (m, U) принимает значение $x_m \in U$, поэтому для любой окрестности $U_0 \in \varphi_x$, взяв какое-нибудь $(m_0, U_0) \in N$, при $(m, U) \ge (m_0, U_0)$ получаем $x_m \in U \subset U_0$, т.е. подсеть сходится к x.

□

Задача 1.8.6. Сеть с конечным числом значений имеет частичный предел

Решение. Указание. Рассмотрите два случая: 1. направленное множество имеет наибольший элемент, а значение на наибольшем элементе является пределом любой сети; 2. направленное множество не имеет наибольшего элемента (тогда оно бесконечно), но сеть имеет конечное число значений. □

Задача 1.8.7. Следующие утверждения эквивалентны компактности:

1. Любое центрированное семейство замкнутых множеств имеет непустое пересечение (двойственное определению утверждение)
2. Любой фильтр имеет предельную точку
3. Любой ультрафильтр имеет предельную точку
4. Любой ультрафильтр сходится
5. Любая сеть имеет частичный предел (обобщение теоремы Больцано-Вейерштрасса)
6. В любое открытое покрытие можно вписать конечное открытое покрытие

Решение. Компактность влечёт 5. Пусть X – компактно и $(x_m)_{m\in M}$ сеть в X. Если у сети нет частичных пределов, то она не бывает часто в открытой окрестности любой точки, т.е. $\forall x\ \exists U_x\ \exists m \in M\ \forall k \geq m:\ x_k \notin U_x$. Окрестности U_x составляют открытое покрытие X. Выделив конечное подпокрытие $U_{x_1} \dots U_{x_k}$ мы найдём номера $m_1, \dots, m_k$, начиная с которых сеть не попадает в соответствующий U_{x_i}. Из определения 1.5.33 по индукции заключаем, что $\exists m \in M\ \forall i \in \{1, \dots, k\}:\ m \geq m_i$. Но тогда x_m не лежит ни в одной U_{x_i}, что противоречит тому, что U_{x_i} покрывают X.

Компактность $\iff$ 1. α – открытое покрытие X $\iff$ $\mathbf{C}_X\alpha$ – семейство замкнутых множеств с пустым пересечением. Наличие конечного подпокрытия α равносильно наличию конечного подсемейства $\mathbf{C}_X\alpha$ с пустым пересечением. Фраза “каждое открытое покрытие содержит конечное подпокрытие”, таким образом, равносильна фразе “каждое семейство замкнутых множеств с пустым пересечением имеет конечное подсемейство с пустым пересечением”, что равносильно фразе “любое семейство замкнутых множеств, каждое конечное подсемейство которого имеет непустое пересечение, само имеет непустое пересечение”.

4 $\implies$ 2. Из определения 1.5.56 сразу следует, что включение фильтров влечёт обратное включение множеств предельных точек. Поскольку любой фильтр содержится в некотором ультрафильтре, а предел является предельной точкой, то любой фильтр имеет предельную точку.

2 $\implies$ 4. Раз любой фильтр имеет предельную точку, то, в частности, и любой ультрафильтр. А предельная точка ультрафильтра является его

пределом.

1 $\Longrightarrow$ 2 Семейство замыканий элементов фильтра очевидно центрированное семейство замкнутых множеств. Его пересечение непусто согласно 1. Но это в точности множество предельных точек фильтра.

4 $\Longrightarrow$ 1. Пусть β центрированное семейство замкнутых множеств. По задаче о центрированных семействах β содержится в некотором ультрафильтре φ, который сходится к некоторой точке x согласно 4. Тогда x предельная точка фильтра φ, т.е. $x \in \mathrm{cl}(F) = F$ для любого $F \in \beta$, и пересечение β непусто. Вместе с уже доказанным это даёт эквивалентность компактности и условий 1, 2, 4.

5 $\Longrightarrow$ 2. Для фильтра φ рассмотрим сеть h^φ. Если x её частичный предел, то сеть часто бывает в любой окрестности U_x: для любого $V \in \varphi$ найдётся $W \subset V$ такое, что $h_W \in U_x \cap W \subset U_x \cap V$. Значит $x \in \mathrm{cl}(V)$ для всех $V \in \varphi$, т.е. x предельная точка φ. Восполните недостающие импликации. □

Пример 1.8.8. Проверьте следующие факты:

1. Любое конечное ТП компактно
2. Любое антидискретное ТП компактно
3. Дискретное ТП компактно тогда и только тогда, когда оно конечно
4. Отрезок в $\mathbb{R}$ компактен (классическая лемма Гейне-Бореля-Лебега)
5. $\mathbb{R}$ в стандартной топологии не компактно
6. $\overline{\mathbb{R}}$ в порядковой топологии компактно
7. $\mathbb{R}^n$ в стандартной топологии не компактно

Задача 1.8.9. Декартово произведение компактных пространств компактно

Решение. Пусть $\alpha \subset \tau_{X\times Y}$ – открытое покрытие $X \times Y$. Рассмотрим вписанное в α покрытие $\beta \subset \beta_{X\times Y}$ элементами базы $\beta_{X\times Y}$ (см. зад. 1.7.15), найдя для каждой точки (x, y) ровно по одному элементу $U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \in \beta_{X\times Y}$, лежащему в каком-либо элементе α (аксиома выбора). Для любого $x \in X$ обозначим $\beta_x = \{U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \mid y \in Y\}$ подмножество β покрывающее множество $\{x\} \times Y$. Положим $\gamma_x = \{V_{(x,y)} \subset Y \mid U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \in \beta_x\}$. Очевидно, γ_x покрывает Y и по компактности Y существует конечное подпокрытие $\gamma'_x \subset \gamma_x$. Зафиксируем точки $y_1, \ldots, y_m \in Y$, для которых $\gamma'_x = \{V_{(x,y_1)}, \ldots, V_{(x,y_m)}\}$, и положим $U_x = \bigcap_{s=1}^m U_{(x,y_s)}$ – пересечение конечного числа открытых множеств, а потому открытое, – и $\delta = \{U_x \mid x \in X\}$. Тогда δ – открытое покрытие X и по компактности X из него можно выделить конечное подпокрытие $\delta' \subset \delta$.

Рассмотрим семейство $\beta' = \{U_x \times V_{(x,y)} \mid U_x \in \delta' \ \wedge \ V_{(x,y)} \in \gamma'_x\}$. Очевидно, что β' конечно, вписано в β, а значит и в α. Пусть теперь (x, y)

произвольная точка. Найдётся $U_{x'} \in \delta'$, такой что $x \in U_{x'}$, поскольку δ' – покрытие X.

Далее, найдётся $V_{(x',y')} \in \gamma'_{x'}$ такой, что $y \in V_{(x',y')}$, так как $\gamma'_{x'}$ – покрытие. Откуда $(x,y) \in U_{x'} \times V_{(x',y')}$, т.е. β' – конечное покрытие вписанное в α. Заменив каждый элемент β' содержащим его элементом α, получим конечное подпокрытие исходного покрытия α. □

Приведём другое решение этой задачи, показывающее удобство аппарата фильтров, позволяющего упростить доказательство.

Другое решение. Пусть φ – произвольный ультрафильтр на $X \times Y$. Тогда $\varphi_X = \pi_{X*}\varphi$ и $\varphi_Y = \pi_{Y*}\varphi$ суть ультрафильтры на X и Y соответственно, которые сходятся ввиду компактности X и Y (см. зад. 1.8.7). Пусть $x \in \lim \varphi_X$, $y \in \lim \varphi_Y$. Тогда произвольная окрестность $U_x \times V_y$ из $\beta_{X\times Y}$ точки (x,y) лежит в φ, поскольку $U_x \times V_y = \pi_X^{-1}(U_x) \cap \pi_Y^{-1}(V_y)$ (проверьте), а $U_x \in \varphi_x \subset \varphi_X$ и $V_y \in \varphi_y \subset \varphi_Y$. Итак, $(x,y) \in \lim \varphi$ для любого φ и значит $X \times Y$ компактно. □

Задача 1.8.10 (Теорема А.Н. Тихонова)**.** Декартово произведение любого семейства компактных пространств в топологии Тихонова компактно.

Решение. Указание: рассуждение аналогично приведённому выше во втором решении задачи 1.8.9. □

Определение 1.8.11. Пусть $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ семейство ТП. Топология с базой из множеств вида $\prod_{i\in I} U_i$, $U_i \in \tau_i$ называется *коробочной топологией* на $\prod_{i\in I} X_i$

Задача 1.8.12. Показать, что семейство множеств из определения 1.8.11 задаёт топологию, мажорирующую топологию Тихонова и в этой топологии теорема А.Н. Тихонова неверна.

Решение. Коробки замкнуты относительно пересечений и покрывают $\prod_{i\in I} X_i$, поэтому по задаче 1.3.18 образуют базу некоторой топологии. Она мажорирует топологию Тихонова, так как каждый элемент базы топологии Тихонова является коробкой.

Пусть $[0;1]$ отрезок со стандартной топологией и X его счётная декартова степень $X = [0;1]^{\mathbb{N}}$. Рассмотрим последовательность $x_k \in X$ элементов вида $(x_k)_i = \delta_{ki}$, $\delta_{ki} = \begin{cases} 0 & , k \neq i \\ 1 & , k = i \end{cases}$ символ Кронекера. Для любой точки $x = (a_i) \in X$ положим $U_{xi} = [0;1] \cap (a_i - 1/2; a_i + 1/2) \subset \mathbb{R}$, $U_x = \prod_i U_{xi}$. U_x окрестность точки x в коробочной топологии, которая содержит не более одного элемента из последовательности x_k, так

как $x_k \in U_x \implies a_k > 1/2 \implies x_j \notin U_x$ для $j \neq k$. Итак, у последовательности x_k нет предельных точек, а значит нет частичных пределов, откуда следует, что X не компактно. □

Задача 1.8.13. Образ компактного пространства при непрерывном отображении компактен.

Решение. Пусть X компактно и $f : X \to Y$ непрерывная функция. Возьмём произвольное открытое покрытие образа $f(X)$ в Y. Прообразы элементов покрытия дадут открытое покрытие X из которого ввиду компактности X можно выделить конечное подпокрытие. Образы этого конечного подпокрытия дадут конечное подпокрытие $f(X)$ (формализуйте это доказательство). □

Задача 1.8.14. Прообраз компактного ТП при непрерывном отображении не обязан быть компактным. Приведите примеры.

Определение 1.8.15. Непрерывное отображение называется *собственным*, если прообраз любого компактного подмножества компактен.

Задача 1.8.16. Любое непрерывное отображение компактного ТП в хаусдорфово ТП является собственным.

Задача 1.8.17. Если $f : X \to Y$ собственная инъекция хаусдорфовых ТП и Y локально компактно, то f топологическое вложение.

Решение. Покажем, что условия задачи влекут замкнутость f; тогда утверждение будет следовать из задачи 1.7.12. Пусть $T \subset X$ замкнуто, y – предельная точка $f(T)$ и V_y – компактная окрестность точки y. Найдётся сеть $\{y_i\}_{i\in I} \subset f(T)$, сходящаяся к y; отбросив члены, не лежащие в V_y, можем считать $\{y_i\} \subset V_y \cap f(T)$.

Прообраз $K = f^{-1}(V_y)$ компактен ввиду собственности f. Множество $K \cap T$ компактно как замкнутое подмножество компакта. Выберем $x_i \in T$ с $f(x_i) = y_i$; тогда $x_i \in K \cap T$ и по критерию 1.8.7.5 сеть x_i имеет частичный предел $x \in K \cap T$, т.е. предел некоторой подсети. По непрерывности f образ этой подсети сходится к $f(x)$; с другой стороны, он является подсетью сети y_i, сходящейся к y, и потому также сходится к y (проверьте). По хаусдорфовости Y получаем $f(x) = y \in f(T)$. Итак, $f(T)$ содержит все свои предельные точки и замкнуто. □

Определение 1.8.18. Хаусдорфово компактное ТП называется *компактом*

Задача 1.8.19. Подмножество Y компакта X является компактом тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

Решение. $\Longrightarrow$ Пусть Y компакт и $x \in \mathbf{C}Y$ произвольная точка дополнения. Для любой точки $y \in Y$ по хаусдорфовости найдём непересекающиеся открытые окрестности V_x^y, U_y точек x, y соответственно. Семейство $\{U_y \mid y \in Y\}$ покрывает Y. Если $\{U_{y_1}, \dots, U_{y_n}\}$ конечное подпокрытие Y, то $V = V_x^{y_1} \cap \dots \cap V_x^{y_n}$ – окрестность x, лежащая в $\mathbf{C}Y$ (проверьте). Значит $\mathbf{C}Y$ открыто и Y замкнуто.

$\Longleftarrow$ Пусть Y замкнуто и $\alpha \subset \tau$ открытое покрытие Y. Добавим к α открытое множество $\mathbf{C}Y$ и получим покрытие X. Выделим из него конечное подпокрытие по компактности X и, если надо, отбросив $\mathbf{C}Y$ получим конечное подпокрытие Y. □

Задача 1.8.20. В хаусдорфовом пространстве компактность подмножества влечёт его замкнутость

Задача 1.8.21. Декартово произведение двух хаусдорфовых ТП хаусдорфово.

Решение. Пусть $(x, y) \neq (x', y')$, тогда $x \neq x'$ или $y \neq y'$. В первом случае найдутся непересекающиеся окрестности $U \ni x$, $U' \ni x'$, и тогда $U \times Y$, $U' \times Y$ – непересекающиеся окрестности точек (x, y), (x', y'). Второй случай разбирается аналогично. □

Задача 1.8.22. Если $f_i : X \to Y_i$, $i = 1; 2$ непрерывные отображения хаусдорфовых ТП и одно из них собственное, то $F : X \to Y_1 \times Y_2$, $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$ тоже собственное.

Решение. Мы уже знаем, что F непрерывно. Пусть f_1 собственное. Если C компакт в $Y_1 \times Y_2$, то $\pi_1(C) = C_1$ компакт в Y_1, как непрерывный образ компакта при действии проекции π_1. Тогда $f_1^{-1}(C_1)$ компакт в X, ввиду собственности f_1. Но по определению $f_1 = \pi_1 \circ F$ и, значит, $f_1^{-1}(C_1) = F^{-1}(\pi_1^{-1}(C_1)) \supset F^{-1}(C)$, поскольку, очевидно, $C \subset \pi_1^{-1}(C_1)$. Ввиду непрерывности F и замкнутости C (произведение $Y_1 \times Y_2$ хаусдорфово по задаче 1.8.21, поэтому применима задача 1.8.20), $F^{-1}(C)$ компактно, как замкнутое подмножество компакта. □

Задача 1.8.23. Компакт нормален.

Решение. Проверим аксиому T_4. Пусть Y, Z – непересекающиеся замкнутые подмножества компакта X. Y, Z компакты. Повторяя рассуждения из задачи 1.8.19 (сделайте), можно показать, что для любой точки $y \in Y$ и множества Z найдутся непересекающиеся окрестности $y \in U_y$, $Z \subset V_y$. Окрестности U_y покрывают Y. Выбрав конечное подпокрытие $U_{y_1}, \dots, U_{y_n}$ и положив $U = \cup_i U_{y_i}$, $V = \cap_i V_{y_i}$ получим непересекающиеся окрестности U, V для Y, Z соответственно. □

Задача 1.8.24. Множество $\mathbf{U}(X)$ всех ультрафильтров на произвольном множестве X с топологией Стоуна – компакт.

Решение. Хаусдорфовость $\mathbf{U}(X)$ была установлена ранее. Проверим компактность. Пусть ξ ультрафильтр на $\mathbf{U}(X)$, не имеющий предельной точки. Тогда каждый ультрафильтр $\varphi \in \mathbf{U}(X)$ обладает окрестностью Y_{U_φ} не пересекающейся с некоторым множеством $\mathbf{V}_\varphi \in \xi$. Поскольку все ультрафильтры из $\mathbf{V}_\varphi$ не содержат U_φ, то они содержат его дополнение $\mathbf{C}U_\varphi$ и, таким образом, $\mathbf{V}_\varphi \subset Y_{\mathbf{C}U_\varphi}$, т.е. $Y_{\mathbf{C}U_\varphi} \in \xi$. Так как ξ замкнуто относительно конечных пересечений и $Y_{\mathbf{C}U_\varphi} \cap Y_{\mathbf{C}U_\psi} = Y_{\mathbf{C}U_\varphi \cap \mathbf{C}U_\psi}$, то семейство $\{\mathbf{C}U_\varphi \mid \varphi \in \mathbf{U}(X)\}$ центрировано, а значит содержится в некотором ультрафильтре $\lambda \in \mathbf{U}(X)$. Но тогда $U_\lambda \in \lambda$ и $\mathbf{C}U_\lambda \in \lambda$. Противоречие. Итак, любой ультрафильтр имеет предельную точку, что равносильно компактности. □

Задача 1.8.25. В МП компактность подмножества влечёт его замкнутость и ограниченность

Решение. Пусть Y компактное подмножество МП. Замкнутость Y следует из хаусдорфовости МП. Для доказательства ограниченности Y покроем его шарами единичного радиуса $Y \subset \bigcup_{y\in Y} B_1(y)$ и выделим конечное подпокрытие $\{B_1(y_1), \dots, B_1(y_n)\}$. Тогда $d(Y) < \max_{i,j} \rho(y_i, y_j)+2$ (проверьте). □

Задача 1.8.26. Подмножество $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено

Решение. Осталось проверить только $\Longleftarrow$. Из компактности отрезка в $\mathbb{R}$ (см. примеры 1.8.8) следует компактность замкнутого бруса $I = [a_1; b_1] \times \cdots \times [a_n; b_n]$ (индукция в задаче 1.8.9). Ограниченность подмножества Y в МП означает конечность диаметра Y (см. опр. 1.4.8), которая равносильна тому, что Y содержится в некотором шаре (почему?). В $\mathbb{R}^n$ ограниченность Y также равносильна тому, что Y содержится в некотором замкнутом брусе (почему?). Итак, замкнутое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$ является замкнутым подмножеством компакта и следовательно компактно (см. зад. 1.8.19). □

Задача 1.8.27 (Теорема Вейерштрасса)**.** Непрерывная вещественнозначная функция на непустом компактном ТП X ограничена и принимает максимальное и минимальное значение.

Решение. Мы знаем, что непрерывный образ компактного ТП компактен, а компактное подмножество в $\mathbb{R}$ замкнуто и ограничено. Ограниченное множество имеет sup и inf, которые являются точками прикосновения образа. Ввиду замкнутости точки прикосновения лежат в образе, что означает достижение максимума и минимума (формализуйте). □

Пример 1.8.28. Ограниченность и замкнутость не достаточны для компактности в МП. Рассмотрим метрику (проверьте) $\rho(x, y) =$

$\min(1, |x-y|)$ на $\mathbb{R}$. Она слабо эквивалентна стандартной метрике (проверьте) и всё $\mathbb{R}$ в этой метрике замкнуто и ограничено, но не компактно, потому что не компактно в исходной метрике.

Определение 1.8.29. Последовательность x_n в МП называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : \ \forall k, s \geq n \ \rho(x_k, x_s) < \varepsilon$$

МП называется *(секвенциально) полным*, если любая фундаментальная последовательность сходится.

Определение 1.8.30. Подмножество Y метрического пространства X называется *ε-сетью*, если семейство $\{B_\varepsilon(y) \mid y \in Y\}$ покрывает X. МП X называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ на X существует конечная ε-сеть.

Допуская некоторую вольность речи, мы называем ε-сетью также семейство шаров $\{B_\varepsilon(y) \mid y \in Y\}$.

Задача 1.8.31. Любое подмножество вполне ограниченного МП вполне ограничено (как МП с индуцированной метрикой).

Задача 1.8.32. МП X – компакт тогда и только тогда, когда X полно и вполне ограничено.

Решение. $\Longrightarrow$ Пусть X – компакт, тогда любая последовательность (в частности, фундаментальная) имеет частичный предел. Частичный предел фундаментальной последовательности является её пределом (докажите). Далее, покрыв каждую точку шаром радиуса ε и выделив конечное подпокрытие, мы получим конечную ε-сеть.

$\Longleftarrow$ Пусть φ произвольный ультрафильтр на X. Выбрав конечную 1-сеть на X найдём в ней шар $B_1 \in \varphi$. Такой шар существует, иначе конечное число дополнений всех шаров 1-сети принадлежит ультрафильтру и имеет пустое пересечение, поскольку объединение шаров покрывает X. Обозначим x_1 центр найденного шара. Далее переходим к метрическому подпространству B_1, которое, очевидно, тоже вполне ограничено и к ультрафильтру $\varphi_1 = \varphi|_{B_1}$, являющемуся следом φ на B_1. Заметим, что $\varphi_1 \subset \varphi$.

По индукции покрываем конечной $\frac{1}{n+1}$-сетью шар $B_n \in \varphi_{n-1} \subset \varphi$, полученный на n-ом шаге, выбираем в этой $\frac{1}{n+1}$-сети шар B_{n+1}, лежащий в $\varphi_n = \varphi_{n-1}|_{B_n}$ (след снова ультрафильтр, поскольку $B_n \in \varphi_{n-1}$) и обозначаем его центр x_{n+1}. Полученная последовательность x_n фундаментальна (проверьте), а её предел, существующий по условию, есть предел ультрафильтра φ (почему?). Итак, любой ультрафильтр на X имеет предел, что равносильно компактности X. $\square$

Определение 1.8.33. ТП X называется *секвенциально компактным*, если из любой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Задача 1.8.34. Покажите, что замкнутое подмножество секвенциально компактного ТП секвенциально компактно.

Задача 1.8.35. Если ТП X хаусдорфово и удовлетворяет первой аксиоме счётности, то секвенциальная компактность подмножества $M \subset X$ влечёт его замкнутость.

Решение. Мы будем доказывать, что $U = X \setminus M$ открыто, т.е. для любой точки $x \in U$ найдётся окрестность U_x, не пересекающаяся с M. Иначе, если $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ счётный базис фильтра окрестностей точки x, причём $V_{n+1} \subset V_n$ для всех n, то мы сможем найти последовательность x_n такую, что $x_n \in M \cap V_n$, которая по построению сходится к x. Ввиду секвенциальной компактности, единственности предела и того факта, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, имеем $x \in M$. Противоречие. □

Задача 1.8.36. Множество M в метрическом пространстве X компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.

Решение. Пусть M компактно и x_n — последовательность в M. Если из x_n можно выделить стационарную подпоследовательность $x_{n_k} = x$, то доказывать нечего. В противном случае каждый элемент из M может встретиться в x_n не более чем конечное число раз, т.е. множество $\{x_n\}$ бесконечно. Если в M нет предельных точек для $\{x_n\}$, то каждая точка $x \in M$ обладает окрестностью U_x, в которой нет точек из $\{x_n\}$, кроме, может быть, самой точки x. Окрестности U_x покрывают M. Выбирая конечное подпокрытие, получаем, что $\{x_n\}$ конечно, так как в каждой окрестности подпокрытия не более одного элемента из $\{x_n\}$. Противоречие. Итак, в M есть предельная точка множества $\{x_n\}$, а значит, есть сходящаяся к ней подпоследовательность x_{n_k}.

Обратно. Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ — открытое покрытие секвенциально компактного M. Покажем сперва, что найдётся δ такое, что любой шар $B(x, \delta')$, где $\delta' < \delta$ и $x \in M$, лежит в каком-то U_i. Если это не так, то построим последовательность $B_n = B(x_n, 1/n)$ шаров, не лежащих ни в одном U_i. Пусть $M \ni x = \lim x_{n_k}$ — предел некоторой сходящейся подпоследовательности последовательности x_n центров этих шаров и $x \in U_p$. Ввиду открытости U_p найдётся шар $B(x, \varepsilon)$, лежащий в U_p. Но тогда при $1/m < \varepsilon/2$ и $x_{n_k} \in B(x, \varepsilon/2)$ с $n_k > m$, шар B_{n_k} лежит в U_p. Противоречие.

Выбрав теперь такое δ, произвольную точку $x_1 \in M$ и шар $B_1 = B(x_1, \delta/2)$, возьмём $x_2 \in M \setminus B_1$, если $M \setminus B_1 \neq \varnothing$. Если уже построены $x_1, \ldots, x_n$ и $M_n = M \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i \neq \varnothing$, где $B_i = B(x_i, \delta/2)$, то выберем $x_{n+1} \in M_n$.

Если это построение не оборвётся ввиду того, что некоторое M_n будет пустым, то получится последовательность, в которой все элементы находятся друг от друга на расстоянии не меньше, чем $\delta/2$. Из такой последовательности нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность. Значит, построение оборвётся и M будет покрыто конечным числом шаров, каждый из которых лежит в некотором элементе покрытия, что и выделит конечное подпокрытие. □

Определение 1.8.37. Число δ называется *числом Лебега* покрытия $\{U_i\}_{i\in I}$ МП X, если любой шар радиуса меньше δ лежит в каком-то из элементов покрытия.

Замечание 1.8.38. Число Лебега определено неоднозначно, так как любое число меньшее данного числа Лебега снова есть число Лебега. В решении задачи 1.8.36 установлен важный факт: любое покрытие метрического компакта обладает числом Лебега.

Задача 1.8.39. Покажите, что в некомпактном МП может существовать даже двухэлементное покрытие, не обладающее числом Лебега.

Определение 1.8.40. ТП X называется *компактно исчерпываемым*, если найдётся последовательность компактов $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $C_n \subset \operatorname{int}(C_{n+1})$ и $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

Пример 1.8.41.

1. $\mathbb{R}^n$ компактно исчерпываемо.
2. На $\mathbb{R}^2$ введём топологию, положив что $U \subset \mathbb{R}^2$ открыто тогда и только тогда, когда для любого x, множество $U_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in U\}$ открыто в $\mathbb{R}$. Эта топология тоньше стандартной. В ней, например, открыты множества вида $\{x\} \times \mathbb{R}$, не открытые в исходной топологии. Это ТП не является компактно исчерпываемым.

Задача 1.8.42. Проверьте утверждения примера 1.8.41.

Решение. Указание: во втором примере, если C компакт, то множество точек x, для которых вертикальный срез $C_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in C\}$ непуст, должно быть конечным, поскольку C содержится в объединении непересекающихся открытых множеств вида $\{x\} \times \mathbb{R}$. Поэтому счётное объединение компактов не может покрыть пространство. □

Задача 1.8.43. Для локально компактного, хаусдорфова ТП X второсчётность влечёт компактную исчерпываемость.

Решение. Пусть $\beta = \{U_n\}$ счётная база. Мы можем считать, что все U_i предкомпактны, выбросив, в случае необходимости, остальные, так как ввиду локальной компактности, любое открытое множество можно представить как объединение предкомпактных окрестностей его точек, а эти предкомпактные окрестности, представить как объединение элементов базы, которые будут предкомпактными, как подмножества предкомпактных. Поскольку конечные объединения предкомпактных множеств предкомпактны (почему?), мы можем перейти к возрастающей цепочке предкомпактов $V_k = \bigcup_{n\le k} U_n$, покрывающей X. Положим $C_1 = \mathrm{cl}(V_1)$ и пусть мы уже построили компакт C_n. Поскольку он покрывается конечным числом элементов покрытия $\{V_k\}$, то содержится в некотором V_N; выбрав $N \ge n+1$, положим $C_{n+1} = \mathrm{cl}(V_N)$. Построенная по индукции цепочка компактов C_n является компактным исчерпанием X: во-первых, $C_n \subset V_N \subset \mathrm{int}(C_{n+1})$, так как открытое V_N лежит в $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(V_N))$; во-вторых, ввиду $N \ge n+1$ имеем $\bigcup_n C_n \supset \bigcup_n V_n = X$. □

Задача 1.8.44. Для локально второсчётного ТП компактная исчерпываемость влечёт второсчётность.

Решение. Указание: достаточно покрыть каждую точку второсчётной окрестностью, выделить для каждого компакта из исчерпания конечное подпокрытие и объединить счётные базы в получившемся счётном множестве окрестностей. Проверьте, что получится счётная база ТП. □

Определение 1.8.45. ТП X называется *паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. Хаусдорфово паракомпактное ТП называется *паракомпактом*. ТП называется *вполне паракомпактным*, если из любой базы можно выделить локально конечное покрытие.

Замечание 1.8.46. Развитие теории размерности вокруг теоремы Лебега–Брауэра (монотонность dim, теорема суммы, переход от конечных покрытий к произвольным) даёт факт, который мы примем без доказательства (см. [8]): *если хаусдорфов паракомпакт покрывается открытыми множествами, гомеоморфными подмножествам* $\mathbb{R}^n$*, то в любое его открытое покрытие можно вписать открытое покрытие кратности* $\le n+1$. Этот факт потребуется нам в теории гладких многообразий.

Задача 1.8.47. Если семейство $\{U_i\}_{i\in I}$ подмножеств ТП X локально конечно, то семейство $\{\mathrm{cl}\, U_i\}_{i\in I}$ также локально конечно, объединение замыканий $B = \bigcup_i \mathrm{cl}\, U_i$ замкнуто и выполнено равенство $\bigcup_i \mathrm{cl}\, U_i = \mathrm{cl}(\bigcup_i U_i)$

Решение. Для произвольной точки x пусть U_x открытая окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ элементов покрытия, тогда для любого $i \in I \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$: $U_i \cap U_x = \varnothing \implies U_i \subset \mathbf{C}U_x \implies \operatorname{cl} U_i \subset \mathbf{C}U_x \implies \operatorname{cl} U_i \cap U_x = \varnothing$. Если теперь $x \notin B$, то поскольку по доказанному найдётся открытая окрестность U_x пересекающаяся лишь с конечным числом $\operatorname{cl} U_{i_1}, \dots, \operatorname{cl} U_{i_k}$ замыканий элементов покрытия, открытое множество $V_x = U_x \cap \bigcap_{s=1}^{k} \mathbf{C} \operatorname{cl} U_{i_s}$ является окрестностью x, не пересекающейся с B. Наконец, если $C = \operatorname{cl}(\bigcup_i U_i)$, то включение $B \subset C$ выполнено без дополнительных условий, а из включения $\bigcup_i U_i \subset B$, ввиду доказанной замкнутости B, следует $C \subset B$. □

Задача 1.8.48. Покажите, что паракомпакт регулярен.

Решение. Пусть B замкнуто и $y \notin B$. Используя хаусдорфовость, покроем каждый $x \in B$ открытой окрестностью U_x такой, что $y \notin \operatorname{cl} U_x$ и, добавив к полученному семейству $\{U_x\}_{x \in B}$ множество $U_0 = \mathbf{C}B$, впишем в полученное покрытие локально конечное открытое покрытие $\{V_x\}$ с тем же множеством индексов, т.е. $x \in B$ или $x = 0$. Очевидно, что $B \subset V = \bigcup_{x \in B} V_x \subset \operatorname{cl} V$, а согласно предыдущей задаче $\operatorname{cl} V = \bigcup_{x \in B} \operatorname{cl} V_x \subset \bigcup_{x \in B} \operatorname{cl} U_x \not\ni y$. Итак V и $\mathbf{C} \operatorname{cl} V$ непересекающиеся окрестности B и y. □

Задача 1.8.49 (Дьедонне)**.** Покажите, что паракомпакт нормален.

Решение. Указание: рассуждение аналогично предыдущей задаче. □

Задача 1.8.50. Для хаусдорфова ТП X компактная исчерпываемость влечёт паракомпактность.

Решение. Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ произвольное открытое покрытие X, а $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – компактное исчерпание. Положим $C_0 = \varnothing$. Ввиду хаусдорфовости множества $\operatorname{int}(C_n) \setminus C_p$ открыты для всех n и p, так как C_p замкнуты. Покроем каждый C_n теми U_i, для которых $C_n \cap U_i \neq \varnothing$, выделим из этих покрытий конечные подпокрытия и обозначим через U_{nk} пересечения элементов этих конечных подпокрытий с $\operatorname{int}(C_{n+1}) \setminus C_{n-1}$. По построению U_{nk} открытое покрытие X вписанное в $\{U_i\}$. Причём если x лежит в C_n, то $\operatorname{int}(C_{n+1})$ есть окрестность x, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов U_{nk}. □

Задача 1.8.51. Любое локально конечное открытое покрытие α паракомпакта X допускает *сжатие*, т.е. найдётся локально конечное открытое покрытие β вписанное в α вместе с замыканиями: $\forall V \in \beta \; \exists U \in \alpha : \; V \Subset U$.

Решение. Ввиду регулярности X для любых $x \in U \in \alpha$ найдётся открытое V такое, что $x \in V \Subset U$. Далее вписываем в покрытие, полученное из таких V локально конечное открытое покрытие. □

Определение 1.8.52. *Носителем функции* $f : X \to \mathbb{F}$ на ТП X называется замыкание множества точек, в которых функция не обращается в 0. Обозначение: $\operatorname{supp} f = \operatorname{cl}(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\})$. Функция называется *финитной*, если её носитель компактен. Семейство непрерывных функций $\{f_i : X \to [0;1]\}_{i\in I}$, носители которых составляют локально конечное покрытие X называется (непрерывным, локально конечным) *разбиением единицы*, если $\sum_{i\in I} f_i = 1$ (сумма корректно определена ввиду условия локальной конечности семейства носителей). Разбиение называется *подчинённым* покрытию, если семейство носителей вписано в покрытие. Покрытие $\{U_i\}_{i\in I}$, для которого существует подчинённое разбиение единицы с тем же множеством индексов ($\operatorname{supp} f_i \subset U_i$) называется *нумерируемым*.

Задача 1.8.53. Если в покрытие можно вписать нумерируемое покрытие, то само покрытие нумерируемо

Решение. Указание: Если $\{U_i\}_{i\in I}$ нумерировано семейством $\{f_i\}_{i\in I}$ и вписано в $\{V_j\}_{j\in J}$, то фиксировав для каждого $i \in I$ элемент $\varphi(i) \in J$ такой, что $U_i \subset V_{\varphi(i)}$ положим $g_j = 0 + \sum_{\varphi(i)=j} f_i$. Проверьте, что семейство V_j нумерировано функциями g_j. □

Задача* 1.8.54. T_1-пространство X паракомпакт тогда и только тогда, когда каждое открытое покрытие нумерируемо.

Решение. Если открытое покрытие нумерируемо, то открытые множества $U_i = \{x \mid f_i(x) \neq 0\}$, для подчинённого разбиения единицы $\{f_i\}$ является вписанным открытым локально конечным покрытием. Кроме того, X хаусдорфово: для различных точек $x \neq y$ семейство $\{\mathbf{C}\{x\}, \mathbf{C}\{y\}\}$ – открытое (аксиома T_1) покрытие; если $\{f_1, f_2\}$ – подчинённое ему разбиение единицы, то $f_2(x) = 1$, $f_2(y) = 0$, и прообразы $f_2^{-1}((1/2;1])$ и $f_2^{-1}([0;1/2))$ – непересекающиеся окрестности точек x и y.

Обратно. В произвольное открытое покрытие $\{U_i\}_{i\in I}$, воспользовавшись результатами задач 1.8.1, 1.8.51, впишем локально конечные открытые покрытия $\{V_i\}$, $\{W_i\}$, удовлетворяющие условию $\forall i : V_i \Subset W_i \Subset U_i$; здесь 1.8.51 даёт сжатие без сохранения множества индексов, а перейти к общему множеству индексов позволяет задача 1.8.47: $\operatorname{cl}\left(\bigcup_{f(i)=j} V_i\right) = \bigcup_{f(i)=j} \operatorname{cl} V_i \subset U_j$. Далее, воспользовавшись леммой Урысона и задачей 1.8.49, построим $g_i : X \to [0;1]$, удовлетворяющие условиям $g_i(\operatorname{cl}(V_i)) = 1$, $g_i(X \setminus W_i) = 0$. Проверьте, что $g = \sum_i g_i$ корректно определена и строго положительна во всех точках, а функции $f_i = \frac{g_i}{g}$ задают разбиение единицы, подчинённое $\{U_i\}$. □

Задача 1.8.55. Если X хаусдорфово компактно исчерпываемое ТП, то найдётся собственное отображение $f : X \to \mathbb{R}$.

Решение. Случай компактного X очевиден. Пусть теперь X не компактно и $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ компактное исчерпание X. Тогда $\alpha = \{\mathrm{int}(C_n)\}$ открытое покрытие X. Ввиду паракомпактности X, согласно задаче 1.8.54, покрытие α нумерируемо. Пусть $\{f_n\}$ подчинённое разбиение единицы. Положим $f = \sum_n n f_n$. Проверьте, что отображение f корректно определено, непрерывно и неограниченно. Более того, для любого $x \in C_{n+1} \setminus C_n$ имеем $f(x) \geq n+1$. Если теперь $D \subset \mathbb{R}$ ограничено, то $D' = f^{-1}(D)$ содержится в некотором C_n, иначе $f(D')$ было бы неограниченным. Компактность D равносильна замкнутости и ограниченности. В этом случае D' замкнутое подмножество компакта, ввиду непрерывности f и, значит, компактно. □

Задача 1.8.56. Если $f : X \to Y$ непрерывная инъекция хаусдорфовых ТП, X компактно исчерпываемо, а Y локально компактно, то существует топологическое вложение X в $Y \times \mathbb{R}$.

Решение. Указание: использовать результаты задач 1.8.55, 1.8.17, 1.8.22, применив последние две к паре $F = (f, g)$, где $g : X \to \mathbb{R}$ собственно, проверив, что $Y \times \mathbb{R}$ локально компактно. □

Задача* 1.8.57 (Теорема Стоуна)**.** Метризуемое ТП X есть паракомпакт.

Решение. Фиксируем метрику ρ на X. Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ открытое покрытие X. Вполне упорядочим I произвольным образом. Семейства $\alpha_n = \{V_{(i,n)}\}_{i\in I}$ строим рекурсией по $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$T_{(i,n)} = \{x \in U_i \mid i = \min\{i' \mid x \in U_{i'}\},\ x \notin \bigcup_{m<n}\bigcup_{i'\in I} V_{(i',m)},\ B_{3/2^n}(x) \subset U_i\}$$

и $V_{(i,n)} = \bigcup_{x\in T_{(i,n)}} B_{1/2^n}(x)$; минимальный индекс существует ввиду вполне упорядоченности I.

Проверим, что $\{V_{(i,n)}\}$ – покрытие. Для $x \in X$ пусть i минимальный индекс с $x \in U_i$, а n таково, что $B_{3/2^n}(x) \subset U_i$. Тогда либо x покрыт множеством одной из первых $n-1$ стадий, либо выполнены все три условия и $x \in T_{(i,n)} \subset V_{(i,n)}$. Вписанность очевидна: $V_{(i,n)} \subset U_i$.

Пусть $x \in V_{(i,n)}$, $y \in V_{(k,n)}$, причём $i < k$. Тогда, по построению, $x \in B_{1/2^n}(x')$, $y \in B_{1/2^n}(y')$, где $B_{3/2^n}(x') \subset U_i$, а $y' \notin U_i$ ввиду минимальности индекса k для центра y'. Откуда $\rho(x,x') < 1/2^n$, $\rho(y,y') < 1/2^n$, $\rho(x',y') \geq 3/2^n$ и, значит, $\rho(x,y) \geq \rho(x',y') - \rho(x,x') - \rho(y,y') > 1/2^n$. Получается, что любой шар $B_{1/2^{n+1}}(z)$ пересекается не более, чем с одним элементом семейства α_n.

Пусть теперь $x \in V_j$, где $j = (i,n)$, и $k > n$ таково, что $B_{1/2^k}(x) \subset V_j$. Рассмотрим $j' = (i',n')$ с $n' > k+1$. Для любого $y \in V_{j'}$: $y \in B_{1/2^{n'}}(y')$, где $y' \in T_{j'}$ и, значит, $y' \notin V_j$: центры стадии n' не покрыты

множествами предыдущих стадий, а $n < n'$. Отсюда $\rho(x, y') \geq 1/2^k$ и, поскольку $\rho(x, y) + \rho(y, y') \geq \rho(x, y') \geq 1/2^k$, то $\rho(x, y) \geq 1/2^k - \rho(y, y') > 1/2^k - 1/2^{n'} > 1/2^k - 1/2^{k+1} = 1/2^{k+1}$, т.е. $y \notin B_{1/2^{k+1}}(x)$. Итак, $V_{j'} \cap B_{1/2^{k+1}}(x) = \varnothing$ для всех j' со стадией $n' > k + 1$.

Таким образом, только элементы семейств α_m с $m \leq k + 1$ могут пересекаться с $B_0 = B_{1/2^{k+1}}(x)$. Но для каждого такого семейства найдётся шар B_m с центром в x, пересекающийся с не более, чем одним элементом α_m. Значит, $\bigcap_{m=0}^{k+1} B_m$ пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $\{V_j\}$. □

Задача 1.8.58. ТП X вполне паракомпактно тогда и только тогда, когда в любое открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие из элементов любой базы.

Решение. Указание: для любой базы и любого открытого покрытия, элементы базы, для которых найдётся содержащий их элемент покрытия, составляют базу. □

Задача* 1.8.59. Любой локально компактный паракомпакт X вполне паракомпактен.

Решение. Пусть даны база β и локально конечное открытое покрытие α, состоящее из предкомпактных множеств. Для каждой точки $x \in X$ обозначим V_x элемент базы β, содержащий x и лежащий в пересечении всех элементов из α, содержащих x (этих элементов конечное число ввиду локальной конечности, поэтому их пересечение открыто).

Для каждого $U \in \alpha$ компакт $\operatorname{cl} U$ покрывается множествами V_x, $x \in \operatorname{cl} U$; выделим конечное подпокрытие δ_U и положим $\delta = \bigcup_{U \in \alpha} \delta_U$. Очевидно, что $\delta \subset \beta$, $\cup\delta = X$ и δ вписано в α: $V_x \subset W$ для любого $W \in \alpha$, содержащего x.

Проверим локальную конечность. Пусть $y \in X$ и O – окрестность точки y, пересекающаяся лишь с конечным подсемейством $\gamma \subset \alpha$ элементов покрытия. Пусть $V_x \in \delta_U$ и $V_x \cap O \neq \varnothing$. Во-первых, тогда для *всякого* $W \in \alpha$, содержащего x, пересечение $W \cap O$ непусто (поскольку $V_x \subset W$), т.е. $W \in \gamma$. Во-вторых, из $x \in \operatorname{cl} U$ следует, что любая окрестность точки x пересекается с U; в частности, $W \cap U \neq \varnothing$ для $W \ni x$. Но компакт $\operatorname{cl} W$ пересекается лишь с конечным числом элементов α (проверьте, используя локальную конечность), поэтому U принадлежит конечному семейству $\bigcup_{W \in \gamma} \{U' \in \alpha \mid U' \cap W \neq \varnothing\}$. Итак, O пересекается с элементами лишь конечного числа конечных семейств δ_U, что и означает локальную конечность δ.

Итак, в любое открытое покрытие (перейдя к вписанному в него локально конечному предкомпактному) мы вписали локально конечное по-

крытие из элементов базы β, и по задаче 1.8.58 X вполне паракомпактен. □

1.9 Связность

Определение 1.9.1. ТП (X, τ) называется *связным*, если в нём только $\varnothing$ и X одновременно открыты и замкнуты (*открыто-замкнуты*):

$$\forall U : \ U \in \tau \cap \sigma \implies U = \varnothing \ \vee \ U = X$$

Подмножество $Y \subset X$ связно, если оно связно как подпространство в индуцированной топологии.

Задача 1.9.2. Следующие утверждения эквивалентны связности:

1. X нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств
2. X нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств
3. Непустое дополнение любого непустого открытого множества не является открытым
4. Непустое дополнение любого непустого замкнутого множества не является замкнутым

Пример 1.9.3. Некоторые примеры (не)связных пространств:

1. Любая точка связна
2. $\mathbb{R}$ связно
3. $X \subset \mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда X – интервал (открытый, замкнутый, полуоткрытый, конечный или бесконечный)
4. $\mathbb{Q}$ не связно
5. Объединение двух связных подмножеств, имеющих непустое пересечение, связно.
6. Объединение семейства связных подмножеств такое, что любые два подмножества семейства имеют непустое пересечение, связно.
7. Декартово произведение двух связных ТП связно
8. Замыкание связного множества связно.
9. Внутренность связного множества может не быть связной: $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq |y|\}$ – связно, а $\operatorname{int}(Y)$ – нет.

Задача 1.9.4. Проверьте утверждения в примере 1.9.3

Решение. 3. $X \subset \mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда с любыми двумя своими элементами содержит любой элемент между ними: $\forall x, y \in X \ \forall z : \ x \leq z \leq y \implies z \in X$. Поскольку иначе X распадётся в объединение непустых непересекающихся открытых множеств $X \cap (-\infty; z)$

и $X \cap (z; +\infty)$. А если удовлетворяет этому условию, то это интервал между $\inf X$ и $\sup X$, возможно, включающий границы. Осталось проверить, что из условия следует связность. Пусть $X = U \sqcup V$, где U, V непусты и открыто-замкнуты в X; возьмём $u \in U,\ v \in V$ и, для определённости, $u < v$. Положим $z = \sup(U \cap [u; v])$. По условию $z \in X$ (так как $u \leq z \leq v$), а ввиду замкнутости U в X имеем $z \in U$, откуда $z < v$. Но по условию непустое множество $(z; v]$ целиком лежит в X, при этом $(z; v] \cap U = \varnothing$ по определению супремума, т.е. любая окрестность точки z содержит точки из V, что противоречит открытости U в X.

6 Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ семейство связных подмножеств в ТП Y, причём $X_i \cap X_j \neq \varnothing$ для всех $i, j \in I$. Если U открыто-замкнуто в $X = \bigcup_i X_i$, $V = X \setminus U$ и $X_i \cap U \neq \varnothing$ для некоторого i, то $X_i \subset U$, иначе $V \cap X_i \neq \varnothing$, $X_i = (U \cap X_i) \sqcup (V \cap X_i)$, что противоречит связности X_i. Но тогда для любого $j \in I : X_j \subset U$, поскольку имеет непустое пересечение с X_i, а значит и с U. Итак, если $U \neq \varnothing$, то $U = X$.

7. Если X и Y связны и непусты (случай пустого X или Y очевиден), то для любых $x \in X,\ y \in Y$ подмножества $\{x\} \times Y$ и $X \times \{y\}$ связны в $X \times Y$, как гомеоморфные образы связных пространств. Фиксируем $y \in Y$ и положим $U_x = \{x\} \times Y \ \cup \ X \times \{y\}$. Согласно (5) U_x связны, так как $\{x\} \times Y \ \cap \ X \times \{y\} = \{(x, y)\} \neq \varnothing$, пересечение $\cap_{x \in X} U_x = X \times \{y\}$ непусто, а значит согласно (6) $\cup_{x \in X} U_x = X \times Y$ связно.

8. Пусть $Y \subset X$ связно и $\mathrm{cl}(Y) = U \sqcup V$, где U и V открыто-замкнуты. Тогда $U' = U \cap Y$ и $V' = V \cap Y$ также открыто-замкнуты в Y, значит одно из них пусто, а второе совпадает с Y. Пусть $U' = Y$, но тогда $\mathrm{cl}(U') = \mathrm{cl}(Y) \subset \mathrm{cl}(U) = U$ (в $\mathrm{cl}(Y)$), т.е. $\mathrm{cl}(Y) = U$ и $V = \varnothing$.

Проверьте остальные утверждения. □

Задача 1.9.5. ТП X связно тогда и только тогда, когда из непрерывности функции $f : X \to \{0; 1\}$ из X в двоеточие с дискретной топологией следует, что эта функция константа.

Определение 1.9.6. Для любого непустого, связного подмножества Y (в частности, для точки) в ТП X определено связное множество $\widehat{Y} = \cup\{Z \supset Y \mid Z - \text{связно}\}$, которое называется *компонентой связности*, содержащей Y.

Задача 1.9.7. Показать, что $\widehat{Y}$ связно, замкнуто и является максимальным связным множеством, содержащим Y. Привести пример компоненты связности, которая не открыта.

Решение. Указание: связность проверяется как в пункте 6 примера 1.9.3, максимальность очевидна, замкнутость следует из пункта 8 примера

1.9.3. Пример: компонента связности нуля в пространстве $X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. □

Задача 1.9.8. Показать, что любое (непустое) ТП распадается в дизъюнктное объединение непустых компонент связности некоторых своих точек.

Решение. Любая точка x содержится в некоторой компоненте связности C_x. Если две компоненты C_x, C_y имеют непустое пересечение, то $C_x = C_y$, иначе их объединение будет, согласно пункту 5 в 1.9.3, связным и строго содержащим C_x либо C_y, что противоречит их максимальности. □

Замечание 1.9.9. Таким образом, отношение между точками ТП «принадлежать одной связной компоненте» есть отношение эквивалентности. А ТП связно тогда и только тогда, когда имеет единственную связную компоненту.

Определение 1.9.10. Пространство, в котором связные компоненты – только точки, называется *вполне несвязным*.

Пример 1.9.11.

1. Дискретное пространство вполне несвязно
2. $\mathbb{Q}$ в порядковой топологии вполне несвязно

Задача 1.9.12. Проверьте утверждения примера 1.9.11.

Замечание 1.9.13. В 1921 году был опубликован пример связного ТП, которое становится вполне несвязным при удалении всего одной точки. Это пространство получило название «веер Кнастера-Куратовского» по именам первооткрывателей.

Задача 1.9.14. Образ связного множества при непрерывном отображении связен.

Решение. Пусть $f : X \to Y$ непрерывно и X связно. Тогда из определения непрерывности, задачи 1.6.4 и определения индуцированной топологии в $f(X)$, можно заключить, что прообраз $f^{-1}(Y_0)$ открыто-замкнутого подмножества Y_0 в подпространстве $f(X)$ открыто-замкнут в X, а значит, ввиду связности X, совпадает с X или пуст. Значит, Y_0 совпадает с $f(X)$ или пусто, что означает связность $f(X)$. Рассуждение для связного подмножества $X_0 \subset X$ аналогично. □

Задача 1.9.15. Связный локально компактный паракомпакт X компактно исчерпываем.

Решение. Ввиду локальной компактности и паракомпактности X найдётся открытое, локально конечное покрытие $\gamma = \{U_i\}_{i \in I}$, состоящее из предкомпактных окрестностей. Начнём с произвольной точки $x \in$

$U_{i_x} \in \gamma$ и положим $C_1 = \operatorname{cl} U_{i_x}$. Если уже построен компакт C_n, то для каждой точки $x \in C_n$ обозначим через V_x предкомпактную открытую окрестность x, пересекающуюся лишь с конечным числом элементов из γ. Выделив из покрытия $\{V_x\}_{x\in C_n}$ компакта C_n конечное подпокрытие, мы установим, что C_n пересекается лишь с конечным числом элементов из γ. Объединение замыканий этих элементов, очевидно, компакт, который обозначим через C_{n+1}. Очевидно, что $C_n \subset \operatorname{int} C_{n+1}$, что обеспечивает открытость объединения $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Если же $x \in X \setminus C$ и $x \in U$ для некоторого U из γ, то U не пересекается ни с одним C_n, иначе U вошло бы в C_{n+1}, а значит $U \cap C = \varnothing$, т.е. C замкнуто и значит, ввиду связности X, совпадает с X. □

Задача 1.9.16. Локально компактный паракомпакт X с не более чем счётным числом компонент связности компактно исчерпываем.

Решение. Указание: повторите построение из решения задачи 1.9.15, выбрав по точке x_k в каждой компоненте связности: на шаге $n+1$ к объединению замыканий элементов покрытия γ, пересекающих C_n, добавьте $\operatorname{cl} U_{i_{x_{n+1}}}$. Объединение $C = \bigcup_n C_n$ по-прежнему открыто и замкнуто, а всякое открыто-замкнутое множество вместе с каждой своей точкой содержит и всю её компоненту связности, поэтому $C = X$.

□

Определение 1.9.17. ТП X называется *линейно связным*, если любые две его точки x, y можно соединить *непрерывной кривой*, т.е. существует непрерывное отображение $\gamma : [0;1] \to X$ такое, что $\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$.

Пример 1.9.18. $\mathbb{R}^n$, сферы S^n при $n \geq 1$, шары линейно связны (проверьте!).

Задача 1.9.19. Линейно связное ТП X связно.

Решение. Если C_x, C_y связные компоненты точек x и y из X, а γ непрерывная кривая, соединяющая x с y, то $\gamma([0;1])$ связно, согласно задаче 1.9.14, множество $C_x \cup \gamma([0;1])$ связно как объединение пересекающихся связных множеств и, по той же причине, связно $(C_x \cup \gamma([0;1])) \cup C_y$. Откуда, ввиду максимальности C_x и C_y следует, что $C_x = C_y$. А это равносильно связности X. □

Задача 1.9.20. Отношение «x можно соединить с y непрерывной кривой» есть отношение эквивалентности на ТП X. Классы эквивалентности называются *компонентами линейной связности.*

Решение. Указание: рефлексивность следует из непрерывности константных отображений, кривая $\gamma_1(t) = \gamma(1-t)$ обеспечивает симметричность, а для γ_1, γ_2, соединяющих x с y и y с z соответственно,

можно положить $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma_2(2t-1), & 1/2 < t \le 1 \end{cases}$. Легко видеть, что γ соединяет x с z, остаётся проверить непрерывность γ. □

Задача 1.9.21. Локально линейно связное, связное ТП X линейно связно.

Решение. Пусть Y – непустая компонента линейной связности. Тогда ввиду локальной линейной связности Y открыта, так как каждая точка входит в Y вместе с некоторой окрестностью. Если компонент больше одной, то объединение всех остальных, кроме Y, открыто, как объединение открытых множеств, а значит Y замкнуто, как дополнение открытого множества, но тогда Y открыто-замкнуто и совпадает с X, т.е. остальные компоненты пусты. □

Замечание 1.9.22. Утверждение задачи 1.9.21, по-видимому, является причиной того, что в учебниках по анализу под связностью часто понимают именно линейную связность, поскольку стандартные пространства анализа – открытые множества в $\mathbb{R}^n$ – являются локально линейно связными.

Задача 1.9.23. Приведите пример связного пространства, которое не является линейно связным.

Решение. Рассмотрим подпространство $X = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0;1]\} \cup \{(0,y) \mid y \in [-1;1]\}$ в $\mathbb{R}^2$, состоящее из части графика функции $\sin\frac{1}{x}$ и отрезка оси ординат. Проверьте, что X связно, но точки отрезка оси ординат нельзя соединить с точками графика функции непрерывной кривой, лежащей в X. □

1.10 Равномерные пространства

Определение 1.10.1. Пусть $S, T \in \mathscr{P}(X \times X)$, $X_0 \subset X$, $x \in X$. Определим следующие объекты на $\mathscr{P}(X \times X)$:

1. $\Delta = \Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ (диагональ)
2. $S \circ T = \{(x,z) \mid \exists y \in X : \ (x,y) \in S \ \wedge \ (y,z) \in T\}$ (операция композиции)
3. По индукции положим $S^{\circ 1} = S$, $S^{\circ n+1} = S^{\circ n} \circ S$
4. $S^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in S\}$ (обращение). S *симметрично*, если $S = S^{-1}$

Определение 1.10.2. Фильтр θ на $X \times X$ называется *равномерной структурой* на непустом множестве X, если выполнены условия:

1. $\Delta \subset \bigcap \theta$

2. $\forall S \in \theta : S^{-1} \in \theta$
3. $\forall S \in \theta\ \exists T \in \theta :\ T \circ T \subset S$

Пара (X, θ) называется равномерным пространством (РП). Элементы фильтра θ называются *окружениями*

Задача 1.10.3. Аксиомы 2 и 3 равномерной структуры равносильны одной аксиоме:

$$2'.\forall S \in \theta\ \exists T \in \theta :\ T \circ T^{-1} \subset S$$

Решение. $\Longrightarrow$ Для произвольного $S \in \theta$, используя 3 найдём $T' \in \theta$ такое, что $T' \circ T' \subset S$. Согласно 2, $T'^{-1} \in \theta$, а значит $T = T' \cap T'^{-1} \in \theta$, поскольку θ фильтр. Так как $T \circ T \subset T' \circ T' \subset S$ и $T = T^{-1}$, получаем $T \circ T^{-1} \subset S$.

$\Longleftarrow$ По произвольному $S \in \theta$ найдём $T \in \theta$ такое, что $T \circ T^{-1} \subset S$. Тогда согласно аксиоме 1, $T^{-1} = \Delta \circ T^{-1} \subset T \circ T^{-1} \subset S$. Но $T^{-1} \subset S \iff T \subset S^{-1}$ и значит $S^{-1} \in \theta$ как надмножество элемента фильтра, что означает выполнение аксиомы 2. Итак, $T \in \theta \implies T^{-1} \in \theta \implies P = T \cap T^{-1} \in \theta$. Но $P \circ P \subset T \circ T^{-1} \subset S$, что даёт аксиому 3 □

Пример 1.10.4. Для псевдоМП (X, ρ) в качестве базиса фильтра $\theta = \theta_\rho$ возьмём семейство множеств вида:

$$S_\varepsilon = \{(x, y) \in X \times X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\},\ \varepsilon > 0$$

(X, θ_ρ) равномерное пространство. Скажем, что θ_ρ *псевдометрическая равномерная структура* или *равномерная структура, порождённая псевдометрикой*

Задача 1.10.5. Проверьте условия определения 1.10.2 для примера 1.10.4.

Определение 1.10.6. Наряду со слабой и сильной эквивалентностью псевдометрик определим *эквивалентность* псевдометрик, как совпадение равномерных структур ими порождённых.

Задача 1.10.7. Сильная эквивалентность псевдометрик влечёт эквивалентность, а эквивалентность влечёт слабую эквивалентность. Обратные импликации, вообще говоря, не верны.

Задача 1.10.8. Проверьте:

1. Любая равномерная структура обладает базисом из симметричных окружений.
2. Для любого окружения $S :\ 1 \leq k \leq n \implies S^{\circ k} \subset S^{\circ n}$
3. Для любого окружения S и любого n найдётся окружение T такое, что $T^{\circ n} \subset S$
4. $U \times U \subset S \wedge V \times V \subset S \wedge U \cap V \neq \varnothing \implies (U \cup V) \times (U \cup V) \subset S \circ S$

Решение. Проверим последнее свойство. Если $y \in U \cap V$, то для любого $(x,z) \in (U \cup V) \times (U \cup V)$: $(x,y) \in S$, $(y,z) \in S$ (почему?), а значит $(x,z) \in S \circ S$. □

Пусть (X,θ) РП и $Y \subset X$.

Задача 1.10.9. След $\theta|_Y = \theta_Y = \{(Y \times Y) \cap S \mid S \in \theta\} \subset \mathscr{P}(Y \times Y)$ равномерной структуры θ на $Y \times Y$ есть равномерная структура на Y.

Определение 1.10.10. РП (Y,θ_Y) называется *подпространством* РП (X,θ), а θ_Y – *индуцированной равномерной структурой* на Y.

По аналогии со сравнением топологий дадим определение сравнения равномерных структур.

Определение 1.10.11. Скажем, что равномерная структура θ_1 слабее (грубее) θ_2 или, что θ_2 сильнее (тоньше) θ_1, если $\theta_1 \subset \theta_2$. ЧУМ всех равномерных структур на X с этим отношением порядка будем обозначать $\Theta(X) \subset \mathscr{P}(\mathscr{P}(X \times X))$

Имеет место аналог задачи 1.3.9:

Задача 1.10.12. Показать, что $\Theta(X)$ – ЧУМ, в котором есть наибольший и наименьший элемент, а также любое подмножество обладает супремумом и инфимумом.

Решение. Проверка условий ЧУМ очевидна. Убедитесь, что:

1. наименьший элемент – антидискретная равномерная структура, состоящая из одного элемента $\theta = \{X \times X\}$
2. наибольший элемент – дискретная равномерная структура всех надмножеств диагонали $\theta = \{S \subset X \times X \mid \Delta_X \subset S\}$
3. $\forall \mathbf{B} \subset \Theta(X)$: конечные пересечения элементов $\cup\mathbf{B}$ образуют базис некоторого фильтра θ_B на $X \times X$, все элементы которого, очевидно, содержат диагональ.
   Если теперь $S \in \theta_B$, то $S \supset S' = S_1 \cap \cdots \cap S_n$, для некоторых S_i, принадлежащих различным элементам из $\mathbf{B}$. Но поскольку $S'^{-1} = (S_1 \cap \cdots \cap S_n)^{-1} = S_1^{-1} \cap \cdots \cap S_n^{-1} \in \theta_B$, то $S^{-1} \in \theta_B$. И, наконец, в соответствующих равномерных структурах найдутся T_i такие, что $T_i \circ T_i \subset S_i$. Но тогда для $T = T_1 \cap \cdots \cap T_n$ имеем $T \circ T \subset S' \subset S$. Итак, θ_B равномерная структура, которая является супремумом $\mathbf{B}$, поскольку любая другая равномерная структура, мажорирующая $\mathbf{B}$, должна содержать все элементы θ_B.
4. Для любого $\mathbf{B}$ множество нижних границ не пусто, так как содержит антидискретную равномерную структуру и инфимум $\mathbf{B}$ равен супремуму множества нижних границ.

□

Для произвольных отображений $f : X \to Y,\ f' : X' \to Y'$ определено произведение $f \times f' : X \times X' \to Y \times Y'$, действующее по правилу $(x, x') \mapsto (f(x), f'(x'))$.

Задача 1.10.13. Пусть $f : X \to Y$ произвольное отображение непустых множеств, $g = f \times f : X^2 \to Y^2,\ S, T \subset X^2,\ P, Q \subset Y^2$. Тогда выполняются следующие соотношения:

1. $g(S \circ T) \subset g(S) \circ g(T)$
2. $g(S \circ T) = g(S) \circ g(T)$, если f инъективно
3. $g^{-1}(P \circ Q) \supset [g^{-1}(P)] \circ [g^{-1}(Q)]$
4. $g^{-1}(P \circ Q) = [g^{-1}(P)] \circ [g^{-1}(Q)]$, если f сюръективно
5. $g(S^{-1}) = [g(S)]^{-1}$
6. $g^{-1}(P^{-1}) = [g^{-1}(P)]^{-1}$

Решение. 1. $(y_1, y_2) \in g(S \circ T) \iff \exists (x_1, x_2) \in S \circ T :\ (f(x_1), f(x_2)) = (y_1, y_2) \implies \exists x \in X : (x_1, x) \in S \ \wedge\ (x, x_2) \in T \implies g(x_1, x) = (y_1, f(x)) \in g(S) \ \wedge\ g(x, x_2) = (f(x), y_2) \in g(T) \implies (y_1, y_2) \in g(S) \circ g(T)$

2. $(y_1, y_2) \in g(S) \circ g(T) \iff \exists y :\ (y_1, y) \in g(S) \ \wedge\ (y, y_2) \in g(T) \iff \exists (x_1, x) \in S, (x', x_2) \in T :\ g(x_1, x) = (y_1, y) \ \wedge\ g(x', x_2) = (y, y_2) \iff (f(x_1), f(x)) = (y_1, y) \ \wedge\ (f(x'), f(x_2)) = (y, y_2) \implies$ (инъективность f) $x = x'$. И значит, $(x_1, x_2) \in S \circ T \implies g(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2)) = (y_1, y_2) \in g(S \circ T)$

5. $(y_1, y_2) \in g(S^{-1}) \iff \exists (x_1, x_2) \in S^{-1} :\ g(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2)) = (y_1, y_2) \iff g(x_2, x_1) = (y_2, y_1) \in g(S) \iff (y_1, y_2) \in [g(S)]^{-1}$.

Проверьте 3, 4 (двойственны к 1,2) и 6. □

Определение 1.10.14. Отображение $f : X \to Y$ из РП (X, θ_X) в РП (Y, θ_Y) называется *равномерно непрерывным*, если прообраз окружения при отображении $f \times f$ есть окружение, т.е. $S \in \theta_Y \implies (f \times f)^{-1}(S) \in \theta_X$

Задача 1.10.15. Отображение $f : X \to Y$ из псевдоМП (X, ρ_X) в псевдоМП (Y, ρ_Y) равномерно непрерывно в классическом смысле тогда и только тогда, когда оно равномерно непрерывно в смысле определения 1.10.14 в равномерной структуре порождённой псевдометрикой.

Решение. Напомним классическое определение равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x, y \in X\ \ \rho_X(x, y) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

но это в точности означает, что для любого $S_\varepsilon \in \theta_Y$ найдётся $S_\delta \in \theta_X$ такое, что $(f \times f)(S_\delta) \subset S_\varepsilon$, т.е. $(f \times\ f)^{-1}(S_\varepsilon) \in \theta_X$. Поскольку S_ε составляют базис фильтра θ_Y это завершает рассуждение. □

Пусть $f : X \to Y$ произвольное отображение непустых множеств, θ_X, θ_Y равномерные структуры на X, Y соответственно, $g = f \times f$.

Задача 1.10.16. Найдётся минимальная равномерная структура $f^*\theta_Y$ на X такая, что отображение $f : (X, f^*\theta_Y) \to (Y, \theta_Y)$ равномерно непрерывно. Найдётся максимальная равномерная структура $f_*\theta_X$ на Y такая, что отображение $f : (X, \theta_X) \to (Y, f_*\theta_X)$ равномерно непрерывно.

Решение. Обозначим через $\mathbf{A} \subset \Theta(X)$ множество равномерных структур, в которых равномерно непрерывно первое отображение, а через $\mathbf{B} \subset \Theta(Y)$ – второе. Эти множества непусты: $\mathbf{A}$ содержит дискретную структуру, $\mathbf{B}$ – антидискретную. Наименьший элемент в $\mathbf{A}$ предъявляется в следующей задаче: подъём $g^*\theta_Y$ сам лежит в $\mathbf{A}$ и содержится в любом элементе $\mathbf{A}$. Для $\mathbf{B}$ рассмотрим супремум $\sigma = \sup \mathbf{B}$, существующий согласно задаче 1.10.12. Если $P \in \sigma$, то $P \supset P_1 \cap \dots \cap P_n$ для некоторых P_i, принадлежащих элементам $\mathbf{B}$, откуда $g^{-1}(P) \supset g^{-1}(P_1 \cap \dots \cap P_n) = \bigcap_i g^{-1}(P_i) \in \theta_X$, поскольку θ_X фильтр. Итак, отображение f равномерно непрерывно и в (Y, σ), т.е. $\sigma \in \mathbf{B}$ – максимальная структура $f_*\theta_X$ найдена.

□

Задача 1.10.17. Равномерная структура $f^*\theta_Y$ совпадает с подъёмом $g^*\theta_Y$ фильтра θ_Y. Равномерная структура $f_*\theta_X$ есть супремум равномерных структур, содержащихся в спуске $g_*\theta_X$ фильтра θ_X.

Решение. Подъём. Пусть $S \in g^*\theta_Y$ лежит в подъёме фильтра θ_Y, тогда найдётся $P \in \theta_Y$ такой, что $g^{-1}(P) \subset S$. Откуда $[g^{-1}(P)]^{-1} \subset S^{-1}$. Найдём также $Q \in \theta_Y$ такой, что $Q \circ Q \subset P$. Откуда $g^{-1}(Q \circ Q) \subset g^{-1}(P)$. Но как мы знаем, $[g^{-1}(P)]^{-1} = g^{-1}(P^{-1})$, $[g^{-1}(Q)] \circ [g^{-1}(Q)] \subset g^{-1}(Q \circ Q)$. Итак, подъём фильтра θ_Y есть равномерная структура. Любая другая равномерная структура, в которой соответствующее отображение равномерно непрерывно, должна содержать все элементы $g^*\theta_Y$ по определению равномерной непрерывности, что обеспечивает минимальность.

Спуск. Равномерная структура θ'' на Y лежит в множестве $\mathbf{B}$ из решения задачи 1.10.16 в точности когда $g^{-1}(P) \in \theta_X$ для всех $P \in \theta''$, т.е. когда θ'' содержится в спуске $g_*\theta_X$ фильтра θ_X. Поэтому $f_*\theta_X = \sup \mathbf{B}$ и есть супремум равномерных структур, содержащихся в $g_*\theta_X$.

□

Определение 1.10.18. Равномерные структуры $f^*\theta_Y, f_*\theta_X$ определённые в задаче 1.10.16 будем называть подъёмом и спуском равномерных структур θ_Y, θ_X соответственно.

Задача 1.10.19. Равномерная структура $\theta|_Y$ подпространства $Y \subset X$ есть подъём равномерной структуры X относительно отображения вложения $i : Y \to X$.

Задача 1.10.20. Семейства множеств $\varphi_x = \{S(x) \mid S \in \theta\}$ (см. опр. 1.7.20) являются фильтрами, задающими топологию τ_θ на РП (X, θ). Назовём её *топологией равномерной структуры*.

Мы рассматриваем РП X как ТП с этой топологией, а на $X \times X$ по умолчанию рассматриваем топологию декартова произведения

Решение. Во-первых, очевидно, $x \in \cap\varphi_x$. Далее, $S(x) \cap T(x) = (S \cap T)(x)$. И, наконец, $S(x) \subset V$ означает, что $V = T(x)$, где $T = S \cup (\{x\} \times V) \in \theta$. Итак, φ_x фильтр, содержащий в своём пересечении x.

Чтобы убедиться, что система фильтров φ_x задаёт топологию проверим условие из задачи 1.5.42. Для произвольного $S(x)$ найдём окружение T такое, что $T \circ T \subset S$. Если теперь $y \in T(x)$, то для любого $z \in T(y)$ из $(x, y) \in T \ \wedge \ (y, z) \in T$ следует, что $(x, z) \in S$ и $z \in S(x)$, т.е. $T(y) \subset S(x)$ и $S(x) \in \varphi_y$ для всех $y \in T(x)$. □

Теперь мы можем применять все топологические понятия к РП, относя их к топологии равномерной структуры.

Задача 1.10.21. Равномерно непрерывная функция равномерных пространств непрерывна.

Задача 1.10.22 (Теорема Кантора)**.** Если $f : X \to Y$ непрерывная функция из компактного РП (X, θ_X) в РП (Y, θ_Y), то f равномерно непрерывна.

Решение. Пусть $S \in \theta_Y$. Найдём симметричное S' такое, что $S' \circ S' \subset S$. Прообразы окрестностей $S'(f(x))$ точек образа f по непрерывности будут окрестностями точек $x \in X$ и значит найдутся $T_x(x) \subset f^{-1}(S'(f(x)))$. Возьмём $T'_x \in \theta_X$ такие, что $T'_x \circ T'_x \subset T_x$. Семейство открытых окрестностей, содержащихся в $T'_x(x)$ для всех x покрывает X. Пусть $T'_1(x_1), \ldots, T'_n(x_n)$ – конечное подпокрытие. Положим $T = T'_1 \cap \cdots \cap T'_n$. Пусть $(y, z) \in T$ и $y \in T'_k(x_k)$. Так как $(x_k, y) \in T'_k$, то $(x_k, z) \in T'_k \circ T'_k \subset T_k$, так как $T \subset T'_k$. Итак, $y, z \in T_k(x_k) \implies f(y), f(z) \in S'(f(x_k)) \implies (f(x_k), f(z)), (f(x_k), f(y)) \in S'$. Наконец, по симметричности S' имеем $(f(y), f(z)) \in S' \circ S' \subset S$. Окончательно, $(f \times f)(T) \subset S$, т.е. $T \subset (f \times f)^{-1}(S)$, а значит $(f \times f)^{-1}(S) \in \theta_X$ окружение. □

Задача 1.10.23. Для любого подмножества $M \subset X \times X$ и для любого окружения $S \in \theta$ множество $P_M = S^{-1} \circ M \circ S$ является окрестностью M. Если S симметрично, то $\mathrm{cl}(M) \subset P_M$.

Решение. Во-первых, очевидно, что $M \subset P_M$, так как диагональ лежит в $S \cap S^{-1}$. Пусть $(p, q) \in M$ и $(x, y) \in S(p) \times S(q)$, т.е. $(p, x) \in S \wedge (q, y) \in S$. Тогда $(x, p) \in S^{-1}$, $(p, q) \in M$, $(q, y) \in S$, откуда $(x, y) \in P_M$. Итак,

$S(p)\times S(q)\subset P_M$, а так как множества вида $S(p)\times S(q)$ составляют базис фильтра окрестностей точки (p,q), множество P_M является окрестностью каждой точки из M, т.е. окрестностью M.

Пусть теперь S симметрично и $(p',q')\in \mathrm{cl}(M)$. Тогда найдётся $(p,q)\in (S(p')\times S(q'))\cap M$. Но это значит, с учётом симметричности, что $(p',p)\in S,\ (p,q)\in M,\ (q,q')\in S$, т.е. $(p',q')\in P_M$. □

Задача 1.10.24. Для любого $M\subset X\times X$ имеет место равенство $\mathrm{cl}(M)=\bigcap\limits_{\text{симм } S} S\circ M\circ S$, где пересечение берётся по всем симметричным окружениям равномерной структуры на X.

Решение. Включение $\mathrm{cl}(M)\subset \bigcap\limits_{\text{симм } S} S\circ M\circ S$ следует из утверждения предыдущей задачи.

Пусть теперь (x,y) лежит в указанном пересечении. Тогда для любого симметричного окружения S найдётся $(p,q)\in M$ такое, что $(x,p),(q,y)\in S$, т.е. $(p,q)\in S(x)\times S(y)$. Итак, для любого S пересечение $M\cap(S(x)\times S(y))$ непусто и, поскольку множества вида $S(x)\times S(y)$ составляют базис фильтра окрестностей точки (x,y), то (x,y) является точкой прикосновения для M. Обратное включение установлено. □

Задача 1.10.25. Симметричные открытые окружения и симметричные замкнутые окружения составляют базисы фильтра θ окружений РП (X,θ).

Решение. Для произвольного окружения S найдётся симметричное окружение T такое, что $T^{\circ^3}\subset S$. Для любых точек $(x,y)\in T$ и $(z,t)\in T(x)\times T(y)$ из симметричности T имеем $(z,x),(x,y),(y,t)\in T$, т.е. $(z,t)\in T^{\circ^3}\subset S$. Итак, S содержит окрестность $T(x)\times T(y)$ каждой точки $(x,y)\in T$, откуда $T\subset \mathrm{int}(S)$, и значит, $\mathrm{int}(S)\in\theta$ – открытое окружение, содержащееся в S. Тогда $\mathrm{int}(S)\cap[\mathrm{int}(S)]^{-1}$ – симметричное открытое (обращение – гомеоморфизм $X\times X$ на себя) окружение, содержащееся в S. Наконец, по доказанному выше $\mathrm{cl}(T)\subset T^{\circ^3}\subset S$, причём $\mathrm{cl}(T)$ – замкнутое окружение (оно содержит T), симметричное ввиду симметричности T.

□

Задача 1.10.26. В произвольном РП выполнена аксиома отделимости T_3

Решение. Указание: использовать задачи 1.5.43, 1.7.21 и 1.10.25 □

Задача 1.10.27. РП (X,θ) регулярно (а значит и хаусдорфово) тогда и только тогда, когда $\Delta=\cap\theta$

Решение. $\Longrightarrow$ Поскольку выполнена аксиома T_1, для любой пары различных точек $x\neq y$ найдётся $S(x):\ y\notin S(x)$, что означает $(x,y)\notin S$,

т.е. для любой точки $(x, y) \notin \Delta_X$ найдётся окружение, не содержащее этой точки. Завершите решение. □

Определение 1.10.28. Фильтр φ на РП (X, θ) называется *фильтром Коши*, если его декартов квадрат мажорирует фильтр окружений, т.е. $\theta \subset \varphi \times \varphi$

Задача 1.10.29. Фильтр φ является фильтром Коши тогда и только тогда, когда $\forall S \in \theta\ \exists U \in \varphi :\ U \times U \subset S$.

Задача 1.10.30. Фильтр φ_x окрестностей точки x в РП (X, θ) есть фильтр Коши.

Решение. Множества вида $S(x)$, где S симметричное окружение, образуют базис фильтра φ_x. Если теперь T произвольное окружение и S такое симметричное окружение, что $S \circ S \subset T$, то из того, что $(y, z) \in S(x) \times S(x)$ следует, что (y, x) и (x, z) лежат в S, а значит $(y, z) \in T$. Итак, установлено включение $S(x) \times S(x) \subset T$, что равносильно утверждению задачи. □

Задача 1.10.31. Любой сходящийся фильтр есть фильтр Коши.

Решение. Сходимость фильтра φ означает, что он мажорирует фильтр φ_x окрестностей некоторой точки x. Тогда $\theta \subset \varphi_x \times \varphi_x \subset \varphi \times \varphi$. □

Задача 1.10.32. Для любого фильтра Коши φ существует единственный минимальный (по включению) фильтр Коши μ, мажорируемый фильтром φ. Если α базис фильтра θ, а β базис фильтра φ, то семейство $\gamma = \{S(U) \mid S \in \alpha\ \wedge\ U \in \beta\}$ есть базис фильтра μ.

Решение. Если $S_1(U_1),\ S_2(U_2)$ лежат в γ, то в α найдётся $S \subset S_1 \cap S_2$, а в β найдётся $U \subset U_1 \cap U_2$. Тогда $S(U) \subset S_1(U_1) \cap S_2(U_2)$ и значит γ базис фильтра в X.

Если $T \in \theta$ произвольное окружение, S симметричное окружение такое, что $S^{\circ^3} \subset T$ и $U \in \beta$ такое, что $U \times U \subset S$, то $S(U) \times S(U) \subset T$. Действительно, $(x, y) \in S(U) \times S(U) \implies (x, p) \in S\ \wedge\ (q, y) \in S$ для некоторых p, q из U. Но тогда $(p, q) \in U \times U \subset S$ и значит $(x, y) \in S^{\circ^3} \subset T$. Взяв $S' \in \alpha$ с $S' \subset S$, получим $S'(U) \subset S(U)$, откуда $S'(U) \times S'(U) \subset T$. Итак, γ базис фильтра Коши.

Наконец, для любых $S \in \alpha$, $U \in \beta$ и для любого фильтра Коши $\psi \subset \varphi$ найдём $V \in \psi$ такой, что $V \times V \subset S$. Пусть теперь $y \in U \cap V \in \varphi$. Для любого $x \in V :\ (y, x) \in V \times V \subset S$, что означает $x \in S(U)$. Итак, $\psi \ni V \subset S(U)$ или $S(U) \in \psi$, т.е. фильтр порождённый γ лежит во всех фильтрах Коши, мажорируемых φ. □

Задача 1.10.33. Фильтр φ_x окрестностей любой точки x РП (X, θ) есть минимальный фильтр Коши.

Решение. Мы уже знаем, что φ_x есть фильтр Коши. Если теперь ψ фильтр Коши, для которого $\psi \subset \varphi_x$, а $U_x = S(x)$ произвольная окрестность точки x, где $S \in \theta$ некоторое окружение, то найдётся $V \in \psi$ такое, что $V \times V \subset S$. Но так как V окрестность x, то $x \in V$ и $V = (V \times V)(x) \subset S(x)$, т.е. $S(x) \in \psi$, что устанавливает включение $\varphi_x \subset \psi$ и завершает доказательство минимальности. □

Задача 1.10.34. Минимальный фильтр Коши μ обладает базисом, состоящим из открытых множеств. В частности, $\forall U \in \mu\ \exists x \in U :\ U \in \varphi_x$ (любой элемент минимального фильтра Коши является окрестностью некоторой своей точки).

Решение. Указание: применить результаты задач 1.10.25, 1.10.32 и 1.7.21. Проверьте, что второе утверждение следует из первого. □

Задача 1.10.35. Предельная точка фильтра Коши является его пределом.

Решение. Пусть φ фильтр Коши на X и x его предельная точка, тогда любое $U \in \varphi$ и любая окрестность $U_x \in \varphi_x$ точки x имеют непустое пересечение, а значит найдётся фильтр ψ с базисом $\{U_x \cap U \mid U_x \in \varphi_x,\ U \in \varphi\}$, который является фильтром Коши, поскольку мажорирует фильтр Коши φ. Пусть μ единственный минимальный фильтр Коши, содержащийся в φ и значит в ψ. Тогда μ и φ_x минимальные фильтры Коши, содержащиеся в ψ, откуда $\varphi_x = \mu \subset \varphi$ и $x \in \lim \varphi$. □

Пусть (X, θ) произвольное РП и $\hat{X} \subset \mathbf{F}(X)$ подмножество минимальных фильтров Коши в множестве всех фильтров на X.

Определение 1.10.36. Пусть $U \subset X,\ S \subset X \times X$ произвольные множества. Определим множества:

$$\hat{U} = \{\varphi \in \hat{X} \mid U \in \varphi\} \subset \hat{X}$$

$$\hat{S} = \{(\varphi, \psi) \in \hat{X} \times \hat{X} \mid \exists U \in \varphi \cap \psi :\ U \times U \subset S\} \subset \hat{X} \times \hat{X}$$

Задача 1.10.37. Для любых $U, V \subset X;\ S, T \subset X \times X$:

1. $\widehat{U \cap V} = \hat{U} \cap \hat{V};\ \widehat{S \cap T} = \hat{S} \cap \hat{T}$
2. $U \subset V \implies \hat{U} \subset \hat{V};\ S \subset T \implies \hat{S} \subset \hat{T}$
3. $\hat{S}^{-1} = \hat{S}$
4. $\hat{S} \circ \hat{S} \subset \widehat{S \circ S}$

Решение. 1. $(\varphi, \psi) \in \widehat{S \cap T} \iff \exists U \in \varphi \cap \psi :\ U \times U \subset S \cap T \iff U \times U \subset S \ \wedge\ U \times U \subset T \iff (\varphi, \psi) \in \hat{S} \ \wedge\ (\varphi, \psi) \in \hat{T} \iff (\varphi, \psi) \in \hat{S} \cap \hat{T}$

4. $(\varphi, \psi) \in \hat{S} \circ \hat{S} \iff \exists \xi \in \hat{X} :\ (\varphi, \xi) \in \hat{S} \ \wedge\ (\xi, \psi) \in \hat{S} \iff \exists U \in \varphi \cap \xi\ \exists V \in \xi \cap \psi :\ U \times U \subset S \ \wedge\ V \times V \subset S$. Но $U \cap V \in \xi$ и значит непусто. Откуда заключаем, что $(U \cup V) \times (U \cup V) \subset S \circ S$. И так как $U \cup V \in \varphi \cap \psi$, то $(\varphi, \psi) \in \widehat{S \circ S}$.

Проверьте оставшиеся факты. □

Задача 1.10.38. Для любого базиса β фильтра окружений θ семейство $\hat{\beta} = \{\hat{S} \mid S \in \beta\}$ составляет базис некоторого фильтра $\hat{\theta}$, задающего равномерную структуру на $\hat{X}$.

Решение. То, что любой элемент семейства содержит диагональ, сразу следует из определения фильтра Коши. А так как $\widehat{S \cap T} = \hat{S} \cap \hat{T}$, то $\hat{\beta}$ базис фильтра, пересечение которого содержит диагональ.

Пусть теперь $S, T \in \beta$ окружения такие, что $S \circ S \subset T$. Тогда $\hat{S} \circ \hat{S} \subset \widehat{S \circ S} \subset \hat{T}$. □

Задача 1.10.39. РП $(\hat{X}, \hat{\theta})$ регулярно.

Решение. Для пары точек $\mu, \nu \in \hat{X}$ обозначим через γ фильтр $\mu \cap \nu$. Если пара (μ, ν) лежит в любом окружении $\hat{S}$, то это значит, что для любого $S \in \theta$ найдётся $U \in \gamma$ такое, что $U \times U \subset S$, это значит, что γ фильтр Коши. Откуда по минимальности μ и ν получаем $\mu = \nu = \gamma$. Итак, для $\mu \neq \nu$ найдётся симметричное окружение S такое, что $(\mu, \nu) \notin \hat{S}$ или $\nu \notin \hat{S}(\mu) \ \wedge \ \mu \notin \hat{S}(\nu)$, что равносильно аксиоме T_1 для $\hat{X}$ и вместе с полученным ранее результатом означает регулярность $\hat{X}$. □

Рассмотрим отображение $\iota : X \to \hat{X}, \ x \mapsto \varphi_x$, переводящее каждую точку $x \in X$ в фильтр её окрестностей φ_x.

Задача 1.10.40. Образ $\iota(X)$ всюду плотен в $\hat{X}$. Для любого минимального фильтра Коши μ $\lim \iota_* \mu = \mu$, т.е. спуск минимального фильтра Коши, как фильтр на $\hat{X}$ сходится к точке $\mu \in \hat{X}$.

Решение. Пусть $\mu \in \hat{X}$ произвольная точка и $\hat{S}(\mu)$ произвольная окрестность из базиса $\hat{\beta}$. Пусть $\hat{U}_S = \hat{S}(\mu) \cap \iota(X)$ след $\hat{S}(\mu)$ на образе $\iota(X)$. Согласно определениям $\hat{U}_S = \{\varphi_x \mid \exists V \in \varphi_x \cap \mu : \ V \times V \subset S\}$. Как нам известно, множество $\hat{U}_S$ не пусто. Таким образом, пересечение любой окрестности любой точки из $\hat{X}$ с образом $\iota(X)$ непусто, что означает плотность $\iota(X)$ в $\hat{X}$.

Поскольку для любого открытого $U \in \mu : \ \iota(U) = \{\varphi_x \mid x \in U\} = \{\varphi_x \mid U \in \mu \cap \varphi_x\}$, то $\hat{U}_S = \bigcup\limits_{U \times U \subset S} \iota(U)$. Откуда заключаем, что все $\hat{U}_S$, а значит и все $\hat{S}(\mu)$ лежат в $\iota_* \mu$. Итак, весь фильтр φ_μ окрестностей точки $\mu \in \hat{X}$ лежит в $\iota_* \mu$, что в точности означает $\mu \in \lim \iota_* \mu$, а с учётом регулярности (а значит и хаусдорфовости) $\hat{X}$ имеем $\lim \iota_* \mu = \mu$. □

Задача 1.10.41. Подъём $\iota^* \hat{\theta}$ равномерной структуры $\hat{\theta}$ на X совпадает с θ. В частности, $\iota : (X, \theta) \to (\hat{X}, \hat{\theta})$ равномерно непрерывно.

Решение. Пусть $\lambda = \iota \times \iota$. Для произвольного $S \in \theta$ имеем: $(x, y) \in \lambda^{-1}(\hat{S}) \iff (\varphi_x, \varphi_y) \in \hat{S} \iff \exists U \in \varphi_x \cap \varphi_y : \ (x, y) \in U \times U \subset S \implies \lambda^{-1}(\hat{S}) \subset S$. Мы установили, что $\theta \subset \iota^* \hat{\theta}$.

Пусть теперь $T^{\circ^3} \subset S$ для некоторого симметричного, открытого $T \in \theta$, и $(x, y) \in T$ произвольная точка. Положим $U = T(x) \cap T(y)$. U открыто, как пересечение открытых и так как T симметрично $x, y \in U$. Стало быть для $(\varphi_x, \varphi_y) \in \lambda(T)$ имеем $U \in \varphi_x \cap \varphi_y$. А для любой точки $(z, t) \in U \times U$, поскольку $(z, x), (x, y), (y, t) \in T$, имеем $(z, t) \in T^{\circ^3} \subset S$, что означает $(\varphi_x, \varphi_y) \in \hat{S}$. Таким образом, $\lambda(T) \subset \hat{S}$, т.е. $T \subset \lambda^{-1}(\hat{S})$. Мы установили обратное включение $\theta \supset \iota^*\hat{\theta}$. Итак, $\theta = \iota^*\hat{\theta}$ □

Задача 1.10.42. Пусть $f : X \to Y$ произвольное отображение в РП (Y, θ). Тогда подъём фильтра Коши с Y на X есть фильтр Коши в равномерной структуре $f^*\theta$.

Решение. Пусть φ фильтр Коши на Y и $S \in f^*\theta$ произвольное окружение. Найдётся $P \in \theta$, прообраз которого $(f \times f)^{-1}(P)$ содержится в S и $U \in \varphi$ такое, что $U \times U \subset P$. Откуда $(f \times f)^{-1}(U \times U) = f^{-1}(U) \times f^{-1}(U) \subset (f \times f)^{-1}(P) \subset S$. Осталось заметить, что $f^{-1}(U) \in f^*\varphi$. □

Задача 1.10.43. Спуск фильтра Коши при равномерно непрерывном отображении есть фильтр Коши.

Определение 1.10.44. РП называется полным, если любой фильтр Коши сходится.

Задача 1.10.45. Если $Y \subset X$ плотно в РП X и для любого фильтра Коши φ на Y фильтр $i_*\varphi$ на X, где $i : Y \to X$ вложение, сходится, то X полно.

Решение. Поскольку фильтр, мажорирующий сходящийся фильтр сходится, достаточно доказать сходимость любого минимального фильтра Коши μ на X. Но подъём $i^*\mu$ фильтра μ на Y определён, так как любой элемент фильтра содержит открытое множество, которое имеет непустое пересечение с Y по определению всюду плотности. Из результатов задач 1.10.19 и 1.10.42 заключаем, что $i^*\mu$ фильтр Коши на Y, но тогда, как мы знаем $\mu \subset i_*(i^*\mu)$ и к тому же $i_*(i^*\mu)$ фильтр Коши, который по условию сходится. Но поскольку предел фильтра является предельной точкой любого мажорируемого фильтра и предельная точка фильтра Коши является его пределом, можем заключить, что фильтр μ сходится. □

Задача 1.10.46. Полное подпространство хаусдорфова РП замкнуто.

Решение. Указание: если x точка прикосновения подпространства Y, то след фильтра окрестностей точки x на Y является фильтром Коши; по полноте он сходится к некоторому $y \in Y$, и по хаусдорфовости $x = y$. □

Задача 1.10.47. РП $(\hat{X}, \hat{\theta})$ является полным.

Решение. Пусть ψ произвольный фильтр Коши в $\hat{X}$ и ψ' – минимальный фильтр Коши, содержащийся в ψ. По задаче 1.10.34 фильтр ψ' обладает базисом из открытых множеств, а всякое непустое открытое множество пересекает плотный образ $\iota(X)$, поэтому подъём $\iota^*\psi'$ определён и является фильтром Коши на (X,θ) ввиду задач 1.10.42 и 1.10.41 ($\iota^*\hat{\theta}=\theta$). Пусть μ – минимальный фильтр Коши, содержащийся в $\iota^*\psi'$. Тогда $\iota_*\mu\subset\iota_*(\iota^*\psi')$ и как мы знаем $\lim\iota_*\mu=\mu$, поэтому фильтр $\iota_*(\iota^*\psi')$, мажорирующий $\iota_*\mu$, также сходится к μ. С другой стороны, поскольку $\psi'\subset\iota_*(\iota^*\psi')$, точка μ является предельной точкой фильтра Коши ψ', а значит, его пределом. Мажорирующий ψ' фильтр ψ тем более сходится к μ.

□

Замечание 1.10.48. Подведём итоги: для любого РП (X,θ) мы построили регулярное полное пространство $(\hat{X},\hat{\theta})$ и равномерно непрерывное отображение $\iota: X\to\hat{X}$ такое, что образ $\iota(X)$ плотен в $\hat{X}$.

Определение 1.10.49. РП $(\hat{X},\hat{\theta})$ вместе с отображением $\iota: X\to\hat{X}$ называется *пополнением* РП X. РП назовём *квазикомпактным*, если его пополнение компактно. Предупреждение: в литературе такие РП обычно называют предкомпактными или вполне ограниченными, а «квазикомпактным» там называют компактное, не обязательно хаусдорфово ТП. Термин «предкомпактный» мы сохраняем за введённым ранее понятием.

Задача 1.10.50. РП (X,θ) квазикомпактно тогда и только тогда, когда для любого окружения $S\in\theta$ найдётся конечное покрытие X открытыми множествами $U_1,\dots,U_n$ такое, что $U_i\times U_i\subset S$ для всех i.

Задача 1.10.51. Как мы знаем все утверждения о фильтрах могут быть переформулированы на языке сетей. Сделайте это для всех определений и задач о фильтрах Коши и полноте.

1.10.1 Равномерные структуры в функциональных пространствах

Определение 1.10.52. Пусть X произвольное множество, (Y,θ) равномерное пространство, $\mathscr{F}=\mathscr{F}(X,Y)$ множество отображений из X в Y.

1. Для произвольных $K\subset X$, $S\in\theta$ положим $W(K,S)=\{(f,g)\in\mathscr{F}\times\mathscr{F}\mid\forall x\in K:\ (f(x),g(x))\in S\}$. Множества $W(K,S)$ образуют базис равномерной структуры (проверьте) θ_K на $\mathscr{F}$, которую мы

будем называть равномерной структурой равномерной сходимости на K или просто равномерной структурой K-сходимости. Соответствующее равномерное пространство обозначим $\mathscr{F}_K(X,Y)$.

2. Пусть $\sigma \subset \mathscr{P}(X)$ семейство подмножеств X. Обозначим $\theta_\sigma = \sup\limits_{K\in\sigma} \theta_K$ и назовём θ_σ структурой равномерной σ-сходимости. Соответствующее равномерное пространство обозначим $\mathscr{F}_\sigma(X,Y)$
3. Если X ТП, а $\mathscr{C}(X,Y) \subset \mathscr{F}(X,Y)$ множество непрерывных отображений из X в Y, то ограничение соответствующих равномерных структур с $\mathscr{F}$ будем обозначать соответственно $\mathscr{C}_K(X,Y)$ и $\mathscr{C}_\sigma(X,Y)$.
4. Важные частные случаи:
   (a) Описанная выше равномерная сходимость на множестве: $\sigma = \{K\}$
   (b) Поточечная (простая) сходимость: $\sigma = \{\{x\} \mid x \in X\}$ семейство одноточечных множеств
   (c) Равномерная сходимость на компактах: X – ТП, $\sigma = \{K \subset X \mid K -$ компакт $\}$

Задача 1.10.53. Проверьте следующие утверждения:

1. Для ТП X поточечная сходимость грубее равномерной сходимости на компактах, которая в свою очередь грубее равномерной сходимости на всём X.
2. Фильтр φ на $\mathscr{F}_\sigma(X,Y)$ сходится к f тогда и только тогда, когда для любого $K \in \sigma$ φ равномерно сходится к f на K.
3. φ фильтр Коши на $\mathscr{F}_\sigma(X,Y)$ тогда и только тогда, когда φ фильтр Коши на $\mathscr{F}_K(X,Y)$ для всех $K \in \sigma$.
4. Подмножество $G \subset \mathscr{F}_\sigma(X,Y)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда G предкомпактно в $\mathscr{F}_K(X,Y)$ для всех $K \in \sigma$.

Глава 2

Элементы функционального анализа

2.1 Топологические группы

Теорию топологических групп обычно не относят к функциональному анализу, но мы включили этот раздел сюда, потому что многие свойства основных объектов изучения в функциональном анализе – топологических векторных пространств могут быть сформулированы и доказаны для топологических групп и такое изложение упрощает восприятие материала.

Определение 2.1.1. Пара (G, τ), где G группа, а τ топология на множестве G, называется топологической группой, если групповая операция $\cdot : G \times G \to G,\ (a, b) \mapsto a \cdot b$ и операция взятия обратного $\mathrm{inv} : G \to G,\ x \mapsto x^{-1}$ являются непрерывными отображениями.

В случае групповой операции предполагается, что $G \times G$ наделено топологией декартова произведения.

Задача 2.1.2. Проверьте, что:

1. (G, τ) топологическая группа тогда и только тогда, когда отображение $G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto xy^{-1}$ непрерывно
2. Сопряжение $(h_g : G \ni x \mapsto gxg^{-1} \in G)$, правый $(r_g : x \mapsto xg)$ и левый $(l_g : x \mapsto gx)$ сдвиги и операция взятия обратного являются гомеоморфизмами топологической группы.
3. Гомоморфизм топологических групп непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в единице, т.е. когда прообраз любой окрестности единицы есть окрестность единицы.

4. Две топологии τ, τ', задающие на G структуру топологической группы, совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их фильтры окрестностей единицы $\varphi_e = \varphi'_e$.

Решение. Указание: воспользоваться задачами 1.6.16 и 1.7.25. □

Пример 2.1.3. Примеры топологических групп:

1. $(\mathbb{R}, +)$ – группа вещественных чисел по сложению со стандартной топологией
2. $(\mathbb{R}_+, \times)$ – группа положительных вещественных чисел по умножению со стандартной топологией
3. $(GL(n, \mathbb{R}(\text{ или } \mathbb{C})), \times) = \{A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \mid \det(A) \neq 0\}$ – группа невырожденных матриц по умножению со стандартной топологией подпространства в $\mathbb{R}^{n^2}$
4. Конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ по сложению со стандартной топологией

Задача 2.1.4. Проверьте, что примеры 2.1.3 действительно описывают топологические группы.

Пусть G топологическая группа и $U = U_e$ окрестность единицы e группы G. Рассмотрим множества вида $S_U = \{(x, y) \in G \times G \mid xy^{-1} \in U\}$

Задача 2.1.5. Семейство множеств вида S_U для всех окрестностей U единицы топологической группы G является базисом фильтра θ^r_G, задающего *правую* равномерную структуру на G. Топология, порождённая этой равномерной структурой, совпадает с исходной топологией группы.

Решение. Очевидно, что $\Delta_G \subset S_U$ для всех U и $S_U \cap S_V = S_{U \cap V}$ для любой пары окрестностей единицы U, V. Итак, семейство множеств S_U замкнуто относительно пересечений и не содержит пустого множества, а значит является базисом некоторого фильтра θ^r_G на $G \times G$, пересечение которого содержит Δ_G.

Если U окрестность единицы, то $\text{inv}(U) = \{x^{-1} \mid x \in U\}$ тоже окрестность единицы (почему?), а значит $V = U \cap \text{inv}(U)$ окрестность единицы. Легко видеть, что $S_V = S_V^{-1}$, следовательно $S_V^{-1} \in \theta^r_G$ а так как очевидно $S_V^{-1} \subset S_U^{-1}$, то $S_U^{-1} \in \theta^r_G$, а значит для всех $T \in \theta^r_G : \ T^{-1} \in \theta^r_G$ (почему?). Далее прообраз U при непрерывном отображении умножения $G \times G \to G$ является окрестностью точки $(e, e) \in G \times G$, а значит найдётся окрестность W единицы, такая что $W \cdot W = \{xy \mid x, y \in W\} \subset U$. Если теперь $(x, y), (y, z) \in S_W$, то $xy^{-1}, yz^{-1} \in W$, и следовательно $xz^{-1} = (xy^{-1})(yz^{-1}) \in U$. Мы видим, что $S_W \circ S_W \subset S_U$. Итак, θ^r_G равномерная структура. Далее, срез $S_U(x) = \{y \mid xy^{-1} \in U\}$ равен $\text{inv}(U)x$, а так как inv и правый сдвиг r_x гомеоморфизмы, такие множества образу-

ют базис фильтра окрестностей точки x в исходной топологии; остаётся применить задачу 1.10.20.

□

Аналогично доказывается, что семейства $S'_U = \{(x,y) \in G\times G \mid x^{-1}y \in U\}$ образуют базис фильтра θ^l_G, задающего *левую* равномерную структуру на G. Вообще говоря, $\theta^r_G \neq \theta^l_G$. Структуры θ^r_G и θ^l_G переходят друг в друга при гомеоморфизме $\mathrm{inv}\times\mathrm{inv}$, который является изоморфизмом РП (G,θ^r_G) и (G,θ^l_G). Очевидно, что $\theta^r_G = \theta^l_G$ в случае абелевых групп, который и будет нас интересовать в дальнейшем.

Задача 2.1.6. Непрерывный гомоморфизм $f : G \to H$ топологических групп равномерно непрерывен в каждой паре (θ^r_G, θ^r_H), (θ^l_G, θ^l_H) соответствующих канонических равномерных структур.

Решение. Достаточно рассмотреть только прообразы базиса фильтра θ_H из задачи 2.1.5 (почему?). Пусть T_V принадлежит указанному базису, где V окрестность единицы в H, а значит $U = f^{-1}(V)$ окрестность единицы в G.

Тогда $(x,y) \in S_U \iff xy^{-1} \in U \implies f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \in V \iff (f(x), f(y)) \in T_V$. Полагая $g = f \times f$ можем написать $g(S_U) \subset T_V \iff S_U \subset g^{-1}(T_V) \implies g^{-1}(T_V) \in \theta_G$. □

Задача 2.1.7. Для абелевой топологической группы G отображение взятия обратного и групповая операция равномерно непрерывны в канонической равномерной структуре

Решение. Указание: воспользоваться предыдущей задачей □

Далее мы рассматриваем только абелевы топологические группы, имея ввиду дальнейшее использование результатов в теории топологических векторных пространств. Перенесение определений и результатов на неабелев случай оставляется интересующемуся читателю.

Определение 2.1.8. (Псевдо)метрика ρ на абелевой группе $(G,+)$ называется *трансляционно инвариантной* или просто *инвариантной*, если для любых $x,y,z \in G:\ \rho(x,y) = \rho(x+z, y+z)$.

Функция $\|\cdot\| : G \to \mathbb{R}$ называется *полунормой*, если $\|0\| = 0 \ \wedge\ \forall x \in G:\ \|x\| = \|-x\| \ \wedge\ \forall x,y \in G:\ \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. Полунорма называется *нормой*, если к тому же $\|x\| = 0 \implies x = 0$

Задача 2.1.9. Полунорма неотрицательна ($\forall x \in G:\ \|x\| \ge 0$). Существует взаимнооднозначное соответствие между полунормами и инвариантными псевдометриками, при котором нормам соответствуют метрики.

Решение. Указание: по данной псевдометрике ρ нужно положить $\|x\|_\rho = \rho(0,x)$, а по данной полунорме задать псевдометрику условием $\rho(x,y) = \|x-y\|$ □

Задача 2.1.10. В топологической группе G полунорма непрерывна как функция из G в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся окрестность 0, содержащаяся в ε-шаре $B_\varepsilon(0) = \{x \in G \mid \|x\| < \varepsilon\}$. Непрерывность полунормы равносильна равномерной непрерывности относительно канонической равномерной структуры. Псевдометрика, соответствующая непрерывной полунорме, порождает топологию, содержащуюся в исходной; они совпадают тогда и только тогда, когда шары $B_\varepsilon(0)$ образуют базис фильтра окрестностей нуля – в этом случае говорим, что полунорма *порождает* топологию группы. Приведите пример непрерывной полунормы, не порождающей топологию.

Задача 2.1.11. Пусть $f : G \to \mathbb{R}$ ограниченная функция на абелевой группе G, тогда соотношение $\|x\|_f = \|x\| = \sup_{t\in G} |f(x+t) - f(t)|$ задаёт полунорму.

Решение. $\forall x, y \in G:\ \|x+y\| = \sup_{t\in G} |f(x+y+t) - f(t)| \le \sup_{t\in G} |f(x+y+t) - f(x+t)| + \sup_{t\in G} |f(x+t) - f(t)| = \sup_{t+x=t'\in G} |f(y+t') - f(t')| + \|x\| \le \|y\| + \|x\|$.

$\forall x:\ \|-x\| = \sup_{t\in G} |f(t) - f(-x+t)| = \sup_{-x+t=t'\in G} |f(x+t') - f(t')| = \|x\|$. Завершите решение. □

Задача 2.1.12. В топологической абелевой группе G существование непрерывной полунормы, порождающей топологию группы, равносильно наличию счётного базиса фильтра окрестностей 0 или, что то же самое, первосчётности.

Решение. Необходимость наличия счётного базиса фильтра φ_0 окрестностей 0 очевидна (почему?). Проверим достаточность.

Пусть $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ некоторый счётный базис φ_0. Постройте по U_n базис V_n, состоящий из симметричных окрестностей, удовлетворяющих условию $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ (воспользуйтесь непрерывностью сложения). Положим $V_0 = G$.

Пусть теперь $r = \frac{m}{2^n} \in (0;1]$, $n \ge 0$, $0 < m \le 2^n$. Построим по индукции окрестности нуля W_r следующим образом: $W_{\frac{1}{2^n}} = V_n$, $W_{\frac{2s}{2^n}} = W_{\frac{s}{2^{(n-1)}}}$, $W_{\frac{2s+1}{2^n}} = W_{\frac{s}{2^{(n-1)}}} + V_n$. Положим также $W_r = G$ при $r > 1$. Проверим индукцией по k при произвольном n, что $W_{\frac{k}{2^n}} + W_{\frac{1}{2^n}} \subset W_{\frac{k+1}{2^n}}$ для всех k, n. Заметим, что для $k \ge 2^n - 1$, а также для любых чётных k утверждение очевидно по построению. При $k = 1$ имеем $W_{\frac{1}{2^n}} + W_{\frac{1}{2^n}} = V_n + V_n \subset V_{n-1} = W_{\frac{2}{2^n}}$. Пусть теперь $k = 2s+1$. Имеем:

$$W_{\frac{k}{2^n}} + W_{\frac{1}{2^n}} = W_{\frac{2s+1}{2^n}} + V_n = W_{\frac{2s}{2^n}} + V_n + V_n \subset W_{\frac{s}{2^{n-1}}} + V_{n-1}$$

Далее по индукции:

$$W_{\frac{s}{2^{n-1}}} + V_{n-1} = W_{\frac{s}{2^{n-1}}} + W_{\frac{1}{2^{n-1}}} \subset W_{\frac{s+1}{2^{n-1}}} = W_{\frac{k+1}{2^n}}$$

Выведите отсюда, что $W_p + W_q \subset W_{p+q}$ и $p \le q \implies W_p \subset W_q$.

Положим $f(x) = \inf\{r \mid x \in W_r\}$. Проверьте, что f ограниченная, чётная функция ($f(x) = f(-x)$) и $f(0) = 0$. Введём полунорму $\|\cdot\|_f$ как в предыдущей задаче.

Проверьте, что $f(x) \le \|x\|$ и, следовательно, шар $B_{\frac{1}{2^n}}(0) = \{x \mid \|x\| < \frac{1}{2^n}\}$ содержится в V_n для всех $n \in \mathbb{N}$.

Если теперь $x \in V_{n+1}$, то $-x \in V_{n+1}$ по симметричности V_{n+1} и $f(x) = f(-x) \le \frac{1}{2^{n+1}}$. Для произвольного $y \in G$ найдём $k \in \mathbb{N}$ такой, что $\frac{k-1}{2^{n+1}} \le f(y) < \frac{k}{2^{n+1}}$. Так как $y \in W_{\frac{k}{2^{n+1}}}$, то $y \pm x \in W_{\frac{k}{2^{n+1}}} + W_{\frac{1}{2^{n+1}}} \subset W_{\frac{k+1}{2^{n+1}}}$. Откуда $f(y \pm x) \le \frac{k+1}{2^{n+1}}$. И поскольку $\frac{k-1}{2^{n+1}} \le f(y)$, то $f(y \pm x) - f(y) \le \frac{k+1}{2^{n+1}} - \frac{k-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$ для всех $y \in G$. Положив $y' = y \pm x$, получим $f(y') - f(y' \pm x) \le \frac{1}{2^n}$. Окончательно $|f(y) - f(y \pm x)| \le \frac{1}{2^n}$ и значит $V_{n+1} \subset B_{\frac{1}{2^{n-1}}}(0)$, что завершает рассуждение. □

2.2 Топологические векторные пространства

Считаем, что читатель знаком с определением векторного (линейного) пространства (ВП) над произвольным полем $\mathbb{F}$. Под *базисом* ВП понимаем максимальное (по включению) линейно независимое множество векторов.

Задача 2.2.1 (базис Гамеля)**.** Любое ВП L имеет базис, который в бесконечномерном случае называется *базис Гамеля*. Любое линейно независимое множество может быть включено в некоторый базис Гамеля.

Решение. Если в L нет ненулевых векторов, то базисом будет пустое множество. Иначе множество $\beta(L) = \{S \subset L \mid S - \text{линейно независимо}\}$ непусто и упорядочено по включению. Если $\alpha \subset \beta(L)$ произвольная цепь, то $\cup\alpha$ линейно независимо (почему?). Применив лемму Цорна, найдём в $\beta(L)$ максимальный элемент, который и будет базисом Гамеля. Напомним также, что любой элемент $\beta(L)$ подчинён некоторому максимальному, что равносильно второму утверждению задачи. □

Задача 2.2.2. Любые два базиса Гамеля ВП L равномощны (существует биекция из одного в другой). Мощность базиса Гамеля называется алгебраической размерностью пространства.

Решение. Конечномерный случай – известная теорема линейной алгебры: “все базисы конечномерного пространства имеют одинаковое число элементов”.

Пусть теперь L бесконечномерно и E, E' два базиса Гамеля. Рассмотрим функцию $f : E \to \mathscr{P}_f(E')$ сопоставляющую каждому элементу e базиса E конечное множество векторов имеющих ненулевые коэффициенты в разложении e через E', т.е. $f(e) = \{e'_1, \dots, e'_n\}$, где $e = a_1 e'_1 + \dots a_n e'_n,\ e_i \in E',\ a_i \neq 0,\ i = 1, \dots, n$. Теперь вспомним, что $|E'| = |\mathscr{P}_f(E')|$. Кроме того, $|f^{-1}(\{e'_1, \dots, e'_k\})| \leq k$, так как линейная оболочка k векторов не может содержать более k линейно независимых векторов, а значит, $|E| = |f(E)|$. Откуда получаем $|E| \leq |E'|$. Обратное неравенство получается аналогично. Итак, по теореме Кантора-Бернштейна $|E| = |E'|$. □

Далее мы работаем с линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и используем обозначение $\mathbb{F}$ в смысле “$\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$”, $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Определение 2.2.3. Топологию на линейном пространстве L над $\mathbb{F}$ назовём *согласованной* с линейной структурой, или короче *линейной топологией*, если операции сложения $+ : L \times L \to L$ и умножения на число $\cdot : \mathbb{F} \times L \to L$ непрерывны в этой топологии и топологиях декартовых произведений в $L \times L$ и $\mathbb{F} \times L$. *Топологическое векторное пространство (ТВП)* L над полем $\mathbb{F}$ – это векторное пространство с линейной топологией.

Задача 2.2.4. Пусть L ТВП.

1. $(L, +)$ является топологической группой.
2. Все *параллельные переносы (сдвиги)* $l_x : L \to L,\ y \mapsto x + y,\ x \in L$ – гомеоморфизмы.
3. Все операторы $h_a : L \to L,\ x \mapsto ax,\ a \in \mathbb{F}^*$ – гомеоморфизмы.
4. Две линейные топологии совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их фильтры окрестностей нуля.

Решение. Указание: сравните с задачей 2.1.2 □

Замечание 2.2.5. Таким образом, любое ТВП наделяется равномерной структурой (правая и левая равномерности совпадают ввиду абелевости аддитивной группы линейного пространства) и все понятия теории равномерных пространств могут применяться к ТВП. В частности, понятие полноты определено даже для неметризуемых ТВП.

Пример 2.2.6. Проверьте, что все примеры ниже – ТВП:

1. Конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{F}$ со стандартной топологией

2. Пространство $C([a;b])$ непрерывных функций на отрезке с обычными операциями сложения и умножения на число и топологией, порождённой метрикой $\rho(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.
3. Пространство l_∞ всех ограниченных последовательностей в $\mathbb{F}$ с покомпонентно определёнными операциями и топологией, порождённой метрикой $\rho(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$, где $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. Пространство $l_p,\ 1 \le p < \infty$ всех последовательностей в $\mathbb{F}$ абсолютно суммируемых с p-ой степенью ($\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty$) с топологией, порождённой метрикой $\rho(x,y) = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^p)^{1/p}$, где $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$
5. Пусть I бесконечное множество. Пространство $\mathbb{F}^I$ с покомпонентными операциями и топологией Тихонова
6. То же пространство $\mathbb{F}^I$ с коробочной топологией является топологической группой, но НЕ является ТВП: покажите, что умножение на скаляр разрывно по скалярному аргументу

Задача 2.2.7. Для любого ТВП L и набора векторов $\{x_1, \dots, x_n\} \subset L$ линейное отображение $f_n : \mathbb{F}^n \to L,\ (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_i a_i x_i$ непрерывно.

Решение. Индукция. Отображение $h : \mathbb{F} \to L,\ a \mapsto ax_n$ распадается в композицию непрерывного отображения $g : \mathbb{F} \to \mathbb{F} \times L,\ a \mapsto (a, x_n)$ и умножения на число, и поэтому непрерывно. А f_n является композицией произведения отображений $f_{n-1} \times h$ и сложения и поэтому тоже непрерывно. □

Определение 2.2.8. Введём некоторые понятия для произвольного ВП L над полем $\mathbb{F}$.

1. Для $\forall a \in \mathbb{F}$ назовём *гомотетией* оператор $h_a : L \to L,\ x \mapsto ax$. При $|a| \le 1$ будем называть гомотетию *сжатием*, при $|a| \ge 1$ – *растяжением*
2. Подмножество $X \subset L$ называется *выпуклым*, если оно с любыми двумя своими точками x и y содержит соединяющий их отрезок $[x;y] = \{z \in L \mid \exists a \in [0;1] \subset \mathbb{R} :\ z = ax + (1-a)y\}$. ТВП обладающее базой, состоящей из выпуклых множеств называется *локально выпуклым*. Фильтр на L назовём *выпуклым*, если он обладает базисом, состоящим из выпуклых множеств.
3. Подмножество $X \subset L$ называется *уравновешенным*, если содержит любое своё сжатие, т.е. $\forall a \in \mathbb{F} :\ |a| \le 1 \implies aX \subset X$
4. Уравновешенное выпуклое подмножество называется *абсолютно выпуклым*.
5. Подмножество $X \subset L$ *поглощает* подмножество $Y \subset L$, если Y содержится во всех достаточно больших растяжениях множества

X, т.е.: $\exists a > 0 (a \in \mathbb{R})\ \forall b \in \mathbb{F} :\ a \le |b| \implies Y \subset bX$. X называется просто *поглощающим*, если оно поглощает любую точку из L.

6. Фильтр φ на L назовём *линейным*, если он
   (a) *аддитивен* ($\forall U \in \varphi\ \ \exists V \in \varphi :\ V + V \subset U$)
   (b) *однороден* ($\forall U \in \varphi\ \ \forall a \in \mathbb{F}^* :\ aU \in \varphi$)
   (c) содержит базис, состоящий из уравновешенных, поглощающих множеств

Задача 2.2.9. Выведите условие однородности в определении линейного фильтра из двух других условий.

Решение. Пусть $U \in \varphi$ и $a \in \mathbb{F}^*$. Выберем уравновешенное $W \in \varphi$, $W \subset U$. Если $|a| \ge 1$, то $a^{-1}W \subset W$ по уравновешенности, откуда $W \subset aW \subset aU$ и $aU \in \varphi$. Если же $|a| < 1$, выберем $k \in \mathbb{N}$ с $2^{-k} \le |a|$ и, пользуясь аддитивностью, множества $V_1, \dots, V_k \in \varphi$ с $V_1 + V_1 \subset W$, $V_{i+1} + V_{i+1} \subset V_i$. Тогда для $x \in V_k$ имеем $2x = x + x \in V_{k-1}$ и по индукции $2^k x \in W$, т.е. $V_k \subset 2^{-k}W$. Наконец, $2^{-k}W = a\left(a^{-1}2^{-k}W\right) \subset aW \subset aU$, поскольку $|a^{-1}2^{-k}| \le 1$ и W уравновешено. Итак, $aU \supset V_k$ и $aU \in \varphi$. □

Замечание 2.2.10. В дальнейшем, мы не будем проверять однородность при установлении линейности фильтра, с учётом задачи 2.2.9

Задача 2.2.11. Пусть $f : L \to M$ линейное отображение из ВП L в ВП M.

1. Прообраз $f^{-1}(V)$ выпуклого (уравновешенного, поглощающего) множества $V \subset M$ есть выпуклое (уравновешенное, поглощающее) множество.
2. Образ $f(U)$ выпуклого (уравновешенного) множества $U \subset L$ есть выпуклое (уравновешенное) множество. Образ поглощающего множества поглощающее тогда и только тогда, когда f сюръективно.
3. Декартово произведение $U \times V$ двух выпуклых (уравновешенных, поглощающих) множеств есть выпуклое (уравновешенное, поглощающее) множество в $L \oplus M$.
4. Подъём $f^*\varphi_M$ линейного (выпуклого) фильтра φ_M всегда определён и есть линейный (выпуклый) фильтр на L.
5. След $(f_*\varphi_L)|_{f(L)}$ на образе $f(L)$ спуска линейного (выпуклого) фильтра φ_L есть линейный (выпуклый) фильтр на $f(L)$.
6. Произведение $\varphi_L \times \varphi_M$ линейных (выпуклых) фильтров есть линейный (выпуклый) фильтр на $L \oplus M$.

Решение. Проверим 5. По определениям $\varphi = (f_*\varphi_L)|_{f(L)} = \{V \subset f(L) \mid f^{-1}(V) \in \varphi_L\}$. По аддитивности φ_L найдётся $U \in \varphi_L :\ U + U \subset f^{-1}(V)$, откуда $f(U + U) = f(U) + f(U) \subset f(f^{-1}(V)) = V$. Так как

$U \subset f^{-1}(f(U))$, то $f(U) \in \varphi$, что устанавливает аддитивность φ. Остальные свойства следуют из предыдущих пунктов. Проверьте оставшиеся утверждения. □

Задача 2.2.12. Фильтр φ_0 окрестностей нуля в линейной топологии линеен

Решение. Пусть U произвольная окрестность 0.

По непрерывности сложения найдутся окрестности нуля V_1 и V_2 такие, что $V_1 + V_2 \subset U$. Положив $V = V_1 \cap V_2$ получим $V + V \subset U$.

По непрерывности умножения на число найдётся ε-шар $B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{F}$ и $V' \in \varphi_0$ такие, что $B_\varepsilon(0) \cdot V' \subset U$. Положим $V'' = \frac{\varepsilon}{2} \cdot V'$, $V = \bigcup\limits_{|c|\le 1} cV''$. Тогда V уравновешенная окрестность нуля, содержащаяся в U (проверьте!).

И наконец, поскольку отображение $t_x : \mathbb{F} \to L,\ a \mapsto ax$ непрерывно для любого $x \in L$ (почему?), то $t_x^{-1}(U) = \{a \in \mathbb{F} \mid ax \in U\}$ есть окрестность нуля в $\mathbb{F}$. А значит, $x \in a^{-1}U$ для любого $a \in t_x^{-1}(U)$, если $a \neq 0$. Это означает, что любая окрестность нуля U является поглощающим множеством. □

Задача 2.2.13. Любой линейный фильтр φ_0 на линейном пространстве L является фильтром окрестностей нуля однозначно определённой линейной топологии.

Решение. Пересечение любого линейного фильтра содержит 0, так как все уравновешенные множества содержат 0. Рассмотрим семейство фильтров $\varphi_x = x + \varphi_0 = \{x + U \mid U \in \varphi_0\}$. Ясно, что $x \in \cap\varphi_x$. Проверим, что семейство фильтров φ_x задаёт топологию на L. Любое $U \in \varphi_x$ имеет вид $x + U_0$, где $U_0 \in \varphi_0$. Пусть $V \in \varphi_0$ окрестность нуля такая, что $V + V \subset U_0$. Тогда $x + V \subset U$ и для любого $y \in x + V$ имеем $y + V \in \varphi_y$ и $y + V \subset x + V + V \subset x + U_0 = U$, т.е. $U \in \varphi_y$, что означает, что семейство фильтров φ_x однозначно задаёт топологию, в которой эти фильтры являются фильтрами окрестностей точек.

Осталось проверить линейность этой топологии. Пусть $U_x = x + U \in \varphi_x$ и $y + z = x$. Тогда найдём $V \in \varphi_0$ такое, что $V + V \subset U$ и рассмотрим окрестность $(y+V)\times(z+V)$ точки $(y, z) \in L \times L$. Образ этой окрестности равен $y + V + z + V = x + V + V$ и содержится в $x + U = U_x$, что равносильно непрерывности сложения. Если теперь V уравновешенная окрестность нуля с $V + V \subset U$ (внутри окрестности V' с $V' + V' \subset U$ найдётся уравновешенная) и $ay = x$ для некоторых $a \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$, и $y \in L$, то найдём δ в открытом интервале от нуля до $\frac{|a|}{2}$ такое, что $cy \in V$ для всех c, для которых $|c| < \delta$. Это всегда можно сделать,

так как V поглощающее (проверьте!). Теперь рассмотрим окрестность $B_\delta(a) \times (y + dV)$ точки (a, y) в $\mathbb{F} \times L$, где $B_\delta(a)$ шар в $\mathbb{F}$, а $d = \frac{2}{3}|a|^{-1}$. Её образ при отображении умножения на число состоит из элементов вида $(a + b)(y + dv) = x + by + (a + b)dv$, где $v \in V$, $|b| < \delta$. Тогда $by \in V$ и так как $|a + b| < \frac{3}{2}|a|$, то $|a + b| \cdot |d| \leq 1$ и $(a + b)dv \in V$. Откуда заключаем, что $(a + b)(y + dv) \in x + V + V \subset U_x$. В случае $a = 0$ (т.е. $x = 0$): для уравновешенной V с $V + V \subset U_0$ по поглощению найдётся $\delta \leq 1$ такое, что $by \in V$ при $|b| < \delta$; тогда образ окрестности $B_\delta(0) \times (y + V)$ состоит из элементов $b(y + v) = by + bv \in V + V \subset U_0$ (уравновешенность даёт $bv \in V$). Это завершает доказательство непрерывности умножения на число.

Однозначность следует из задачи 2.2.4. □

Задача 2.2.14. Если $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ произвольное семейство линейных фильтров, то определён фильтр $\sup_{i\in I} \varphi_i$, который линеен. Если все фильтры φ_i выпуклы, то φ также выпуклый.

Решение. Поскольку для любого i : $0 \in \cap\varphi_i$, то, как мы знаем супремум определён. Пусть $\varphi = \sup_i \varphi_i$ и $U \in \varphi$. Тогда найдутся $V_{i_p} \in \varphi_{i_p}$ для некоторого конечного набора индексов i_p такие, что $\cap_p V_{i_p} \subset U$. По аддитивности фильтров φ_i найдутся $W_{i_p} \in \varphi_{i_p}$ такие, что $W_{i_p} + W_{i_p} \subset V_{i_p}$ и положив $W = \cap_p W_{i_p}$, получим $W + W \subset U$, что означает аддитивность φ.

Заметим, что если множества V, W поглощающие и уравновешенные, то таково же их пересечение. Действительно, для любого $x \in L$ найдутся $v \in V$, $w \in W$, $a, b \in \mathbb{F}$ такие, что $av = bw = x$. Так как одно из чисел $b^{-1}a, a^{-1}b$ по модулю не превосходит 1, то по крайней мере один из элементов v, w лежит в пересечении $V \cap W$. По индукции если все V_{i_p} поглощающие и уравновешенные, то таково же их пересечение. Итак, всевозможные конечные пересечения поглощающих, уравновешенных множеств из фильтров φ_i дают искомый базис для φ. Проверьте утверждение о выпуклости. □

Задача 2.2.15. Для того, чтобы ТВП было локально выпуклым необходимо и достаточно, чтобы фильтр окрестностей нуля был линейным и выпуклым.

Решение. $\Longrightarrow$ очевидно. $\Longleftarrow$ Пусть C выпуклая окрестность нуля. Проверим, что $\operatorname{int} C$ выпукла: для $x, y \in \operatorname{int} C$ и $a \in (0; 1)$ множество $a \operatorname{int} C + (1 - a) \operatorname{int} C$ открыто (сдвиг и умножение на $a \neq 0$ – гомеоморфизмы, а сумма открытого множества с произвольным открыта) и по выпуклости C лежит в C, значит $ax + (1 - a)y \in \operatorname{int} C$. Итак, откры-

тые выпуклые окрестности нуля образуют базис φ_0, а их сдвиги – базу топологии. □

Задача 2.2.16. ТВП локально выпукло тогда и только тогда, когда всякое его непустое открытое множество содержит непустое открытое выпуклое подмножество.

Решение. $\Longrightarrow$ Непустое открытое множество есть объединение элементов базы, состоящей из выпуклых множеств.

$\Longleftarrow$ Пусть U произвольная окрестность нуля. Фильтр окрестностей нуля линеен, поэтому найдётся уравновешенная окрестность нуля V с $V+V\subset U$. Внутри непустого открытого множества $\operatorname{int}(V)$ найдётся непустое открытое выпуклое W. Для любого $x\in W$ множество $W-x$ – открытая выпуклая окрестность нуля, причём $W-x\subset V-V\subset V+V\subset U$ по уравновешенности V. Сдвигами заключаем, что открытые выпуклые множества составляют базу топологии, т.е. фильтр окрестностей нуля выпуклый, и остаётся применить задачу 2.2.15. □

Задача 2.2.17. Для любой концентрической пары шаров $B_r(x)\subset B_q(x)\subset\mathbb{R}^n$, $r<q$ (концентрической пары кубов $C_r(x)\subset C_q(x)\subset\mathbb{R}^n$, $r<q$, где $C_r(x)=\{y\in\mathbb{R}^n\mid\forall i:\ |x_i-y_i|<r\}$) существует C^∞-функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ такая, что $f(y)=1$ при $y\in\operatorname{cl}B_r(x)$ ($\operatorname{cl}C_r(x)$), $f(y)=0$ при $y\in\mathbb{R}^n\setminus B_q(x)$ ($\mathbb{R}^n\setminus C_q(x)$) и $0<f(y)<1$ на $B_q(x)\setminus\operatorname{cl}B_r(x)$ ($C_q(x)\setminus\operatorname{cl}C_r(x)$). Будем называть такие функции *шапками*.

Решение. Указание: рассмотреть следующие функции на $\mathbb{R}$:

$$h(y)=\begin{cases}e^{-1/y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases},\ h_{rq}(y)=\frac{h(y)}{h(y)+h(q-r-y)},$$

$$g_{rq}(y)=h_{rq}(q+y)h_{rq}(q-y)$$

Положить $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(y)=g_{r^2q^2}((y-x)^2)$ для шаров, $f(y)=g_{rq}(y_1-x_1)\cdot\ldots\cdot g_{rq}(y_n-x_n)$ для кубов. □

Обозначим через $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ линейное пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций на $\mathbb{R}^n$; шапки показывают, что оно нетривиально: в любом непустом открытом множестве есть ненулевая функция из $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 2.2.18. *Мультииндекс* это вектор $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}_0^n$ ($\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$). $|\mathbf{k}|=k_1+\cdots+k_n$, $\dim\mathbf{k}=n$.

Пример 2.2.19. Обозначим $D^{\mathbf{k}}:\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ оператор взятия частной производной $D^{\mathbf{k}}(f)=\frac{\partial^{|\mathbf{k}|}f}{\partial x^{k_1}\ldots\partial x^{k_n}}$, где $\mathbf{k}$ произвольный мультииндекс (при $\mathbf{k}=(0,\ldots,0)$ оператор $D^{\mathbf{k}}$ тождественный). Пусть $C_+(\mathbb{R}^n)$

множество функций, непрерывных и строго положительных на $\mathbb{R}^n$ и $h \in C_+(\mathbb{R}^n)$. Положим $U_{\mathbf{k},h} = \{g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \mid |D^{\mathbf{k}}g| < h\}$. Определим фильтр $\varphi_{\mathbf{k}}$ окрестностей нуля в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, выбрав в качестве базиса фильтра $\beta_{\mathbf{k}} = \{U_{\mathbf{k},h} \mid h \in C_+(\mathbb{R}^n)\}$.

Задача 2.2.20. Фильтр $\varphi = \sup_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}$ задаёт на $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ локально выпуклую топологию τ_s. В дальнейшем мы рассмотрим также другую топологию на $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Решение. Указание: каждое множество $U_{\mathbf{k},h}$ выпукло, уравновешено и поглощающе (на компакте $\operatorname{supp} g$ функция h отделена от нуля), причём $U_{\mathbf{k},h/2} + U_{\mathbf{k},h/2} \subset U_{\mathbf{k},h}$. Значит, все фильтры $\varphi_{\mathbf{k}}$ линейны и выпуклы, а тогда таков же и их супремум φ, задающий линейную топологию, локально выпуклую. □

Задача 2.2.21. Последовательность $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ сходится к 0 в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда все $D^{\mathbf{k}}f_m$ равномерно сходятся к 0 в обычном смысле и объединение носителей функций f_m ограничено в $\mathbb{R}^n$.

Решение. Напомним определение равномерной сходимости к нулю функциональной последовательности g_m из стандартного курса анализа: $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N} :\ \forall m \geq p \quad \sup_x |g_m(x)| < \varepsilon$.

$\Longrightarrow$. Пусть последовательность f_m сходится к 0 в топологии $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Это значит, что для любого мультииндекса $\mathbf{k}$ и для любого $h \in C_+(\mathbb{R}^n)$ найдётся $p \in \mathbb{N}$ такой, что $f_m \in U_{\mathbf{k},h}$ как только $m \geq p$. В частности, если $h = \varepsilon > 0$ константа, то $f_m \in U_{\mathbf{k},\varepsilon}$ в точности означает $\sup_x |D^{\mathbf{k}}f_m(x)| \leq \varepsilon$, т.е. равномерную сходимость к 0 всех последовательностей $D^{\mathbf{k}}f_m$ (при каждом фиксированном $\mathbf{k}$). Если же объединение $\operatorname{supp} f_m$ неограничено, то вне любого компакта лежит бесконечное число носителей функций f_m (почему?), и значит можно построить последовательность точек $x_i \in \mathbb{R}^n$, стремящуюся к бесконечности, и последовательность положительных чисел $t_i \in \mathbb{R}_+$ такие, что для каждого i найдётся $f_{s_i},\ s_i < s_{i+1}$, для которой $|f_{s_i}(x_i)| > t_i$. Если теперь $h \in C_+(\mathbb{R}^n)$ такая, что $h(x_i) = t_i$ (почему h существует?), то $U_{\mathbf{0},h}$ не содержит все f_m, начиная с некоторого, и значит f_m не сходится к 0 в топологии $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

$\Longleftarrow$. Пусть теперь имеем равномерную сходимость к 0 всех $D^{\mathbf{k}}f_m$ и U произвольная окрестность 0 в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда найдётся конечный набор мультииндексов $\mathbf{k}_i$ и функций $h_i \in C_+(\mathbb{R}^n)$ такой, что $U_{\mathbf{k}_1,h_1} \cap \cdots \cap U_{\mathbf{k}_s,h_s} \subset U$. Пусть X компакт, содержащий объединение носителей функций f_m и $\varepsilon = \min_{x\in X}\{h_1(x), \ldots, h_s(x)\}$. Так как $\varepsilon > 0$ (почему?), то для всех $i \in \{1; \ldots; s\}$ найдётся номер $m_i \in \mathbb{N}$ такой, что $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^{\mathbf{k}_i}f_m(x)| < \varepsilon$ для всех $m \geq m_i$, откуда заключаем, что все f_m с номерами большими, чем максимум m_i лежат в U (почему?), что завершает решение. □

Задача 2.2.22. ТВП $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ не первосчётно и следовательно неметризуемо.

Решение. Используем признак неметризуемости. Выберем произвольную последовательность X_m компактов, которая не ограничена в совокупности (например, последовательность замкнутых единичных шаров с центрами, стремящимися к бесконечности). Пусть $f_m \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ произвольные ненулевые функции, носители которых лежат в соответствующих X_m, положим $f_{mk} = \frac{1}{k} f_m$. Тогда f_{mk} сходится к 0 при фиксированном m и $k \to \infty$ (почему?). В то время как для любой возрастающей последовательности k_m последовательность f_{mk_m} не сходится к 0, так как объединение носителей функций f_{mk_m} неограничено по построению. □

Задача 2.2.23 (Критерий метризуемости ТВП)**.** ТВП метризуемо тогда и только тогда, когда оно первосчётно и является T_1-пространством, причём метрика может быть выбрана трансляционно инвариантной.

Решение. Указание: применить задачу 2.1.12. □

Задача 2.2.24. Для любого линейного фильтра φ пересечение $\cap\varphi$ есть линейное подпространство. Топология τ_φ, порождённая фильтром φ хаусдорфова тогда и только тогда, когда $\cap\varphi = \{0\}$. Подпространство $\cap\varphi$ есть минимальное топологически замкнутое подпространство в τ_φ.

Решение. Пусть $x, y \in \cap\varphi$ и $U \in \varphi$. Тогда по аддитивности φ найдётся $V \in \varphi$ такое, что $V + V \subset U$ и так как $x, y \in V$ имеем $x + y \in U$. Из произвольности U заключаем, что $x + y \in \cap\varphi$. Если теперь $a \in \mathbb{F}^*$, то $a^{-1}U \in \varphi$ в силу однородности φ. Но так как $x \in a^{-1}U$, имеем $x = a^{-1}y,\ y \in U$. Откуда $ax \in U$. Опять в силу произвольности U заключаем, что $ax \in \cap\varphi$.

Хаусдорфовость. Если $\cap\varphi \neq \{0\}$, то ненулевая точка $x \in \cap\varphi$ лежит в каждой окрестности нуля, поэтому любые окрестности точек 0 и x пересекаются (обе содержат x), и τ_φ не хаусдорфова. Наоборот, пусть $\cap\varphi = \{0\}$ и $x \neq y$. Тогда найдётся $U \in \varphi$, не содержащее $x - y$, и уравновешенное $V \in \varphi$ с $V + V \subset U$ (почему?). Окрестности $x + V$ и $y + V$ не пересекаются: иначе $x - y \in V - V = V + V \subset U$.

Если φ_x фильтр окрестностей точки $x \in \cap\varphi$ и $U \in \varphi$, то, выбрав $V \in \varphi$ с $V + V \subset U$, из $\pm x \in V$ получаем $x + V \subset U$ и $V \subset x + U$. Значит, фильтры $\varphi_x = x + \varphi$ и φ содержат друг друга: $\varphi_x = \varphi$. Если y предельная точка $\cap\varphi$, то любая её открытая окрестность содержит точку из $\cap\varphi$, значит является её окрестностью, т.е. окрестностью нуля, откуда $\varphi_y = \varphi$ и $y \in \cap\varphi$, что устанавливает замкнутость $\cap\varphi$. Проверьте, что любое замкнутое подпространство содержит $\cap\varphi$. □

Определение 2.2.25. Последовательность уравновешенных, поглощающих подмножеств $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в произвольном линейном пространстве назовём *аддитивной*, если для всех n имеет место включение $U_{n+1}+U_{n+1}\subset U_n$.

Задача 2.2.26. Если линейный фильтр φ имеет счётный базис, то в качестве базиса может быть выбрана аддитивная последовательность. Наоборот, любая аддитивная последовательность является базисом некоторого линейного фильтра.

Решение. Пусть $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ счётный базис фильтра φ, состоящий из уравновешенных, поглощающих множеств и уже построена аддитивная последовательность $U_1,\dots,U_n$ ($U_1=V_1$). Тогда по аддитивности фильтра найдётся уравновешенное, поглощающее W такое, что $W+W\subset U_n$. Положим $U_{n+1}=W\cap V_{n+1}$. Завершите рассуждение.

Наоборот, пусть $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ аддитивная последовательность. Так как $0\in U_{n+1}$, то $U_{n+1}\subset U_{n+1}+U_{n+1}\subset U_n$, и убывающее семейство $\{U_n\}$ является базисом некоторого фильтра φ. Его аддитивность и наличие уравновешенного поглощающего базиса очевидны. □

Задача 2.2.27. Фильтр φ линеен тогда и только тогда, когда он является супремумом множества линейных фильтров со счётным базисом.

Решение. Достаточность установлена в задаче 2.2.14. Для проверки необходимости нужно рассмотреть множество всех супремумов линейных подфильтров со счётным базисом в φ упорядоченных по включению, убедиться, что оно не пусто и удовлетворяет условиям леммы Цорна. Если теперь φ' максимальный элемент этого множества и $U\in\varphi$ произвольно, то по U можно построить аддитивную последовательность и значит найдётся линейный фильтр, содержащий U. Следовательно U должно лежать в φ' и $\varphi'=\varphi$. Формализуйте рассуждение. □

Терминология в следующем определении отличается у разных авторов.

Определение 2.2.28. Пусть L произвольное ВП.

1. (Полу)норма на абелевой группе $(L;+)$ называется *G-(полу)нормой* на L
2. G-(полу)норма с непрерывным относительно порождённой ею топологии умножением на число ($\cdot : L\times\mathbb{F}\to L$) называется *$F$-(полу)нормой* на L
3. *Однородная* ($\forall a\in\mathbb{F}\ \forall x\in L : \|ax\|=|a|\|x\|$) F-(полу)норма называется *(полу)нормой* на L

4. Топология (равномерная структура), *индуцированная (*G, F*, полу)нормой* – это топология (равномерная структура), индуцированная соответствующей (псевдо)метрикой.
5. ТВП назовём *(*F*-)нормируемым*, если существует (F-)норма, индуцирующая данную топологию
6. (G, F, полу)-нормы назовём (сильно, слабо) эквивалентными, если (сильно, слабо) эквивалентны соответствующие (псевдо)метрики.

Замечание 2.2.29. Наличие префикса "полу-" означает возможное отсутствие хаусдорфовости. Фильтр окрестностей 0 в индуцированной топологии имеет базис вида $\beta = \{B_\varepsilon(0) \subset L \mid B_\varepsilon(0) = \{x \in L \mid \|x\| < \varepsilon\}\}$.

Поскольку каждая F-полунорма порождает (инвариантную) псевдометрику, к пространствам с F-полунормой могут быть применены все понятия теории метрических и равномерных пространств. Равномерная структура порождённая полунормой может не совпадать с равномерной структурой топологической абелевой группы на L.

Пример 2.2.30. Пусть L произвольное ВП и $\{e_i\}_{i\in I}$ базис Гамеля в L. Определим F-норму (p-норму), положив:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \sum\limits_{i\in I} |a_i|^p, & 0 < p < 1 \\ \left(\sum\limits_{i\in I} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty \\ \max |a_i|, & p = \infty \end{cases}$$

где a_i коэффициенты разложения вектора x по базису. Заметим, что указанные суммы и максимум определены, так как лишь конечное число коэффициентов отлично от нуля. Функция $\|\cdot\|_p$ задаёт F-норму, не являющуюся нормой при $0 < p < 1$ и норму при $1 \le p$. Соответствующее ТВП хаусдорфово при любом p и локально выпукло при $1 \le p$.

Задача 2.2.31. Проверить утверждения в примере 2.2.30.

Задача 2.2.32. ТВП несчётной размерности из примера 2.2.30 не является локально выпуклым при $0 < p < 1$.

Решение. Проверим, что единичный шар $B_1(0)$ не содержит поглощающего абсолютно выпуклого множества. Если бы такое множество $U \subset B_1(0)$ существовало, то для любого $i \in I$ нашлось бы число $a_i > 0$ такое, что $a_i e_i \in U$, так как U поглощающее. Поскольку I несчётно, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что множество $I_\varepsilon = \{i \in I \mid a_i > \varepsilon\}$ бесконечно (почему?). Из $i \in I_\varepsilon$ следует $\varepsilon e_i = \frac{\varepsilon}{a_i}(a_i e_i) \in U$, так как U уравновешено. Для любого конечного набора $\{i_1; \ldots; i_s\} \subset I_\varepsilon$ сумма $\sum\limits_{k=1}^{s} \frac{1}{s}(\varepsilon e_{i_k})$ лежит в U по

выпуклости. А так как U лежит в единичном шаре, то F-норма любого такого вектора должна быть меньше 1, т.е. $\sum_{k=1}^{s}(\frac{\varepsilon}{s})^p = s(\frac{\varepsilon}{s})^p = s^{1-p}\varepsilon^p < 1$. Но поскольку $1-p>0$, величина $s^{1-p}\varepsilon^p$ неограничена. Противоречие (формализуйте). □

Задача 2.2.33. В конечномерном ВП L все нормы сильно эквивалентны.

Решение. Заметим, что все p-нормы $(1 \le p)$ в произвольном базисе $\{e_1,\dots,e_n\} \subset L$ сильно эквивалентны ∞-норме поскольку выполнены неравенства $\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le \sqrt[p]{n}\|x\|_\infty$ (проверьте) и значит эквивалентны друг другу.

Пусть теперь $N : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}$ произвольная норма на $\mathbb{F}^n$ и $x = (x_1,\dots,x_n)$. Тогда $N(x) \le \sum_i |x_i| N(e_i) \le C\|x\|_\infty$, где $C = \sum_i N(e_i)$, $\{e_i\}$ стандартный базис.

Далее, неравенство $|N(x) - N(y)| \le N(x-y) \le C\|x-y\|_\infty$ влечёт непрерывность N в топологии нормы $\|\cdot\|_\infty$. Поскольку сфера $S = \{x \in \mathbb{F}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$ компактна в $\mathbb{F}^n$, то по теореме Вейерштрасса N достигает на S минимума, скажем m. Очевидно, $m > 0$. Значит для любого $x \neq 0$: $m \le N(\frac{x}{\|x\|_\infty})$, т.е. $m\|x\|_\infty \le N(x)$. Для $x = 0$ это неравенство, очевидно, тоже выполняется. Итак, для всех x : $m\|x\|_\infty \le N(x)$. Этим установлена эквивалентность всех норм на $\mathbb{F}^n$. Завершите рассуждение. □

Задача 2.2.34. Пусть $\mathbf{T}_c(L) \subset \mathbf{T}_l(L) \subset \mathbf{T}(L)$ ЧУМ локально выпуклых, линейных и всех топологий соответственно на произвольном ВП L. Оба ЧУМ обладают наибольшим и наименьшим элементом, а также супремумами и инфимумами произвольных подмножеств.

Решение. Антидискретная топология, очевидно линейна и выпукла, а значит является наименьшим элементом обоих ЧУМ. Для получения супремума произвольного семейства в обоих ЧУМ нужно взять топологию, порождённую супремумом фильтров окрестностей нуля и воспользоваться задачей 2.2.14. Наибольшим элементом очевидно будет супремум по всему ЧУМ. Для получения инфимума семейства нужно взять супремум по непустому (почему?) множеству всех топологий мажорируемых каждым элементом семейства. Заметим, что из задачи 2.2.32 следует, что в случае несчётной размерности L : $\mathbf{T}_c(L) \neq \mathbf{T}_l(L)$. □

Задача 2.2.35. Пусть $f_i : L_i \to L$ семейство линейных отображений из (локально выпуклых) ТВП L_i с топологиями τ_i в ВП L. Тогда существует максимальная линейная (локально выпуклая) топология τ на L, в которой все отображения f_i непрерывны. Будем называть τ *финальной*

линейной (выпуклой) топологией (относительно семейства f_i). Заметим, что эта топология может не быть T_1-отделимой.

Решение. Поскольку антидискретная топология на L, являясь линейной и выпуклой, обеспечивает непрерывность всех f_i, то множество линейных (выпуклых) топологий, для которых все f_i непрерывны, непусто и его супремум в $\mathbf{T}_l$ ($\mathbf{T}_c$) обеспечивает требуемую топологию. Проверьте, что все f_i непрерывны в топологии-супремуме. □

Задача 2.2.36. Пусть L наделено финальной выпуклой топологией относительно семейства $f_i : L_i \to L$. Если выпуклое уравновешенное поглощающее множество $U \subset L$ таково, что все прообразы $f_i^{-1}(U)$ являются окрестностями нуля в L_i, то U окрестность нуля в L.

Решение. Указание: семейство $\{\varepsilon U \mid \varepsilon > 0\}$ является базисом фильтра окрестностей нуля некоторой выпуклой топологии на L (проверьте, используя $\frac{\varepsilon}{2}U + \frac{\varepsilon}{2}U \subset \varepsilon U$), в которой все f_i непрерывны; супремум этой топологии и финальной снова обладает этим свойством, а значит совпадает с финальной по максимальности, т.е. U окрестность нуля. □

Определение 2.2.37. Пусть L (локально выпуклое) ТВП и L_0 алгебраическое подпространство в L. Тогда алгебраическое факторпространство L/L_0 с финальной относительно канонической проекции $\pi : L \to L/L_0$ линейной (локально выпуклой) топологией называется *топологическим фактор-пространством* L по L_0.

Задача 2.2.38. L/L_0 хаусдорфово тогда и только тогда, когда L_0 замкнуто.

Решение. $\Longrightarrow$ Если $y \notin L_0$ то $\overline{y} \neq \overline{0}$ в L/L_0 и по хаусдорфовости найдутся непересекающиеся окрестности U, V точек $\overline{y}$ и $\overline{0}$ в L/L_0. Тогда $\pi^{-1}(U)$ окрестность y не пересекающаяся с L_0.

$\Longleftarrow$ Указание: фильтром окрестностей нуля в L/L_0 служит спуск $\pi_*\varphi = \{V \subset L/L_0 \mid \pi^{-1}(V) \in \varphi\} = \{\pi(U) \mid U \in \varphi\}$ фильтра φ окрестностей нуля в L: ввиду сюръективности π он линеен, а любой линейный фильтр, задающий топологию с непрерывной π, в нём содержится. Если теперь $\overline{y} \in \cap\pi_*\varphi$, то $y \in L_0 + U$ для всех уравновешенных $U \in \varphi$, т.е. каждая окрестность точки y пересекает L_0, и по замкнутости $y \in L_0$, откуда $\overline{y} = \overline{0}$. Остаётся применить задачу 2.2.24.

□

Задача 2.2.39. ТВП F-нормируемо тогда и только тогда, когда оно метризуемо.

Решение. Указание: рассуждение аналогично решению задач 2.2.23, 2.1.12. Соответствующая последовательность выбирается аддитивной, что всегда можно сделать. Остаётся проверить, что при таком

выборе умножение будет непрерывным в полученной топологии. На самом деле ввиду уравновешенности множеств аддитивной последовательности, будет также выполняться дополнительное условие $|a| \le 1 \implies \|ax\| \le \|x\|$ для любых $a \in \mathbb{F}$ и $x \in L$, которое часто включают в определение F-нормы. □

Определение 2.2.40. Для произвольного семейства (F, полу)-норм $\{\|\cdot\|_i \mid i \in I\}$ топология $\tau = \sup_{i\in I} \tau_i$, где τ_i – топология, порождённая i-ой (F, полу)-нормой, называется *топологией, порождённой семейством (F, полу)-норм.*

Задача 2.2.41. Любая линейная топология в произвольном ВП порождается некоторым семейством F-полунорм.

Решение. Указание: применить результаты задач 2.2.23, 2.2.27, 2.2.39. □

Задача 2.2.42. Любая локально выпуклая топология в произвольном ВП порождается некоторым семейством полунорм.

Решение. Указание: использовать задачи 2.2.41, 2.2.14, 2.2.15. □

Задача 2.2.43. ТВП метризуемо тогда и только тогда, когда оно хаусдорфово и топология может быть задана не более чем счётной системой F-норм.

Решение. Указание: проверить, что супремум не более, чем счётного числа фильтров со счётным базисом имеет счётный базис (если существует) и применить задачу 2.2.23. □

Определение 2.2.44. Некоторые важные классы ТВП:

1. F-нормируемое (=метризуемое) ТВП, полное относительно какой-либо (а значит и любой) F-нормы, индуцирующей топологию, называется *F-пространством.*
2. Локально выпуклое F-пространство называется *пространством Фреше.*
3. Нормируемое ТВП, полное относительно какой-либо (а значит и любой) нормы, индуцирующей топологию, называется *банаховым* пространством.

Определение 2.2.45. *Функционал Минковского* $\mu_U : L \to \mathbb{R}$ поглощающего множества $U \subset L$ на ВП L определяется соотношением $\mu_U(x) = \inf\{a \in \mathbb{R}_+ \mid x \in aU\}$

Задача 2.2.46. Если поглощающее множество U абсолютно выпукло, то функционал Минковского $\mu = \mu_U$ является полунормой, причём $\{x \mid \mu_U(x) < 1\} \subset U \subset \{x \mid \mu_U(x) \le 1\}$. Обратно, любая полунорма μ является функционалом Минковского абсолютно выпуклого поглощающего множества, например $U = \{x \mid \mu(x) < 1\}$.

Решение. Пусть U абсолютно выпуклое и поглощающее. Поскольку для всех $a \in \mathbb{R}_+ :\ 0 \in aU$, то $\mu(0) = 0$. Далее для $b \in \mathbb{R}_+$ имеем $\mu(bx) = \inf\{a \in \mathbb{R}_+ \mid bx \in aU\} = \inf\{b\cdot\frac{a}{b} \in \mathbb{R}_+ \mid x \in \frac{a}{b}U\} = b\inf\{a' \in \mathbb{R}_+ \mid x \in a'U\} = b\mu(x)$. Если же теперь $b \in \mathbb{F}$ и $|b| = 1$, то $x \in aU \iff \frac{1}{a}x \in U \iff \frac{b}{a}x \in U \iff bx \in aU$ и значит $\mu(x) = \mu(bx)$. Завершите проверку однородности.

Пусть теперь для произвольных $x_i \in L :\ \mu(x_i) = r_i,\ i = 1; 2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $a_i \in \mathbb{R}_+$ такие, что $r_i \leq a_i < r_i + \varepsilon$ и $x_i \in a_iU$ или $\frac{x_i}{a_i} \in U$. Теперь по выпуклости U имеем $\frac{a_1}{a_1+a_2}\frac{x_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_1+a_2}\frac{x_2}{a_2} = \frac{x_1+x_2}{a_1+a_2} \in U$ или $x_1+x_2 \in (a_1+a_2)U$. Откуда $\mu(x_1+x_2) \leq a_1+a_2 < r_1+r_2+2\varepsilon = \mu(x_1)+\mu(x_2)+2\varepsilon$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем субаддитивность. Включения: из $x \in U$ следует $\mu_U(x) \leq 1$; если же $\mu_U(x) < 1$, то $x \in aU$ при некотором $a < 1$, откуда $x = a\,u+(1-a)\,0 \in U$ по выпуклости ($0 \in U$, поскольку U поглощает нуль).

Обратно, пусть μ полунорма и $U = \{x \mid \mu(x) < 1\}$. Множество U поглощающее: $x \in aU$ при $a > \mu(x)$. Для $|a| \leq 1$ и $x \in U$ имеем $\mu(ax) = |a|\mu(x) < 1$, а для $x, y \in U$ и $0 \leq a \leq 1$: $\mu(ax + (1-a)y) \leq a\mu(x) + (1-a)\mu(y) < 1$ – абсолютная выпуклость U установлена. Наконец, $\mu_U(x) = \inf\{a \in \mathbb{R}_+ \mid \mu(x) < a\} = \mu(x)$. □

Определение 2.2.47. Подмножество $X \subset L$ ТВП L называется *ограниченным*, если оно поглощается любой окрестностью нуля.

Определение 2.2.48. ТВП называется *локально ограниченным*, если в нём существует ограниченная окрестность нуля.

Задача 2.2.49. Для ТВП L равносильны условия: 1) L локально ограничено; 2) в L существует непустое открытое ограниченное множество; 3) каждая точка L имеет ограниченную окрестность.

Решение. Импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) и 3) $\Longrightarrow$ 2) получаются взятием внутренности, а 1) $\Longrightarrow$ 3) – сдвигом: то же вычисление, что и ниже, показывает, что вместе с ограниченной окрестностью нуля U ограничена и окрестность $x+U$ любой точки x. Осталось из 2) вывести 1). Пусть U непустое открытое ограниченное множество и $x \in U$. Тогда $U - x$ – окрестность нуля; проверим её ограниченность. Для произвольной окрестности нуля W выберем уравновешенную окрестность нуля V с $V + V \subset W$. Найдутся $s, t \geq 1$ такие, что $U \subset aV$ при $|a| \geq s$ и $x \in aV$ при $|a| \geq t$, поскольку V поглощает ограниченное U и точку x. При $|a| \geq \max(s, t)$ имеем $U - x \subset aV + aV = a(V + V) \subset aW$ (уравновешенность V даёт $-x \in aV$), т.е. $U - x$ ограничено. □

Задача 2.2.50. При линейном непрерывном отображении $f : L \to M$ ТВП L в ТВП M ограниченность множества $X \subset L$ влечёт ограничен-

ность образа $f(X)$, ограниченность прообраза $f^{-1}(Y)$ влечёт ограниченность множества $Y \subset f(L)$.

Решение. Пусть U окрестность нуля в M, тогда $V = f^{-1}(U)$ окрестность нуля в L и найдётся $a \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $b \in \mathbb{F}: \ |b| > a$ влечёт $X \subset bV$, откуда $f(X) \subset f(bV) = bf(V) \subset bU$. Завершите решение. □

Задача 2.2.51 (Критерий А.Н. Колмогорова)**.** ТВП нормируемо тогда и только тогда, когда оно хаусдорфово и существует ограниченная, выпуклая окрестность нуля.

Решение. $\Longrightarrow$ Легко видеть (проверьте), что все шары с центром в нуле абсолютно выпуклы, поглощают друг друга и составляют базис фильтра окрестностей нуля. Откуда следует, что все они ограничены.

$\Longleftarrow$ Если теперь U ограниченная выпуклая окрестность нуля и $V \subset U$ уравновешенная окрестность, то выпуклая оболочка $\check{V} = \mathrm{conv}(V)$ – множество всех выпуклых комбинаций точек V – является абсолютно выпуклой окрестностью нуля (проверьте уравновешенность), причём $\check{V} \subset U$ по выпуклости U, так что $\check{V}$ ограничена. Согласно задаче 2.2.46 функционал Минковского $\mu = \mu_{\check{V}}$ суть полунорма. Равенство $\mu(x) = 0$ означает, что $x \in a\check{V}$ для всех $a \in \mathbb{R}_+$, а ограниченность $\check{V}$ означает, что для любой окрестности нуля W найдётся b такой, что $b\check{V} \subset W$. Значит x лежит в пересечении фильтра окрестностей и по хаусдорфовости $x = 0$, т.е. μ – норма, причём $\{\mu < 1\} \subset \check{V} \subset \{\mu \leq 1\}$ (задача 2.2.46). Объясните, почему топология, порождённая этой нормой, совпадает с исходной.

□

Задача 2.2.52. Если фильтр окрестностей нуля ТВП обладает базисом, состоящим из неограниченных окрестностей, то ТВП не нормируемо.

Задача 2.2.53. Все конечномерные хаусдорфовы ТВП размерности n гомеоморфны $\mathbb{F}^n$ со стандартной топологией, а значит гомеоморфны друг другу.

Решение. Пусть L n-мерное ТВП. Фиксировав базис в L, получим непрерывную линейную биекцию $f: \mathbb{F}^n \to L$ в стандартной топологии $\mathbb{F}^n$. Пусть $K = f(S) \subset L$ образ единичной сферы $S = \{x \in \mathbb{F}^n \mid \|x\| = 1\}$. K компактен, как образ компакта при непрерывном отображении и значит замкнут по хаусдорфовости L. Поскольку $0 \notin K$, найдётся уравновешенная окрестность нуля U, которая не пересекается с K. Тогда прообраз $V = f^{-1}(U)$ есть уравновешенная окрестность нуля, не пересекающаяся с единичной сферой. Окрестность V не содержит векторов x с нормой больше 1. Иначе, вектор $\frac{x}{\|x\|}$ принадлежал бы $V \cap S$ по уравновешенности V. Значит V содержится в (выпуклом) единичном шаре вместе со

своей выпуклой оболочкой V' образ которой $U' = f(V')$ будет ограниченной выпуклой окрестностью нуля, как образ ограниченного выпуклого множества, содержащего окрестность U. По критерию Колмогорова L нормируемо, а все нормы на L сильно эквивалентны и, значит, эквивалентны. □

Задача 2.2.54. Для любых хаусдорфовых конечномерных ТВП любое линейное отображение непрерывно, а любое алгебраическое подпространство топологически замкнуто.

Решение. Указание: по задаче 2.2.53 можно считать, что оба пространства суть $\mathbb{F}^n$ со стандартной топологией; линейное отображение $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ непрерывно по задаче 2.2.7. Подпространство в $\mathbb{F}^n$ есть пересечение ядер координатных функционалов, непрерывных по той же задаче, а значит замкнуто. □

Задача 2.2.55. Любое конечномерное подпространство L_0 хаусдорфова ТВП L топологически замкнуто.

Решение. Пусть $x \notin L_0$ и $L_1 = \langle x; L_0\rangle$ линейная оболочка $\{x\} \cup L_0$. Тогда ввиду замкнутости L_0 в L_1 найдётся окрестность x в L_1 не пересекающаяся с L_0. Но эта окрестность является следом некоторой окрестности из L. □

Задача 2.2.56. Всякое локально компактное хаусдорфово ТВП L конечномерно.

Решение. Пусть U открытая окрестность нуля в L с компактным замыканием $K = \mathrm{cl}(U)$. Сдвиги $x + \frac{1}{2}U$, $x \in K$ покрывают K. Пусть $\{x_i + \frac{1}{2}U\}_{i=1}^n$ конечное подпокрытие, а L_0 конечномерное подпространство, порождённое векторами x_i. Очевидно, $K \subset L_0 + \frac{1}{2}U$. Заметим, что множества $\{\frac{x_i}{2} + \frac{1}{4}U\}$ покрывают $\frac{1}{2}U$, откуда следует, что $K \subset L_0 + \frac{1}{4}U$. По индукции, $K \subset L_0 + \frac{1}{2^n}U$ для всех n.

По непрерывности умножения на число для любой окрестности нуля $V \subset L$ и для любой точки $x \in K$ найдётся окрестность этой точки V_x и окрестность нуля $W_x \subset \mathbb{F}$ такие, что $W_x \cdot V_x \subset V$. Выбирая из семейства $\{V_x\}_{x\in K}$ конечное подпокрытие $K : \{V_{x_1}, \ldots, V_{x_k}\}$, найдём такое $n \in \mathbb{N}$, что круг $\{a \in \mathbb{F} \mid |a| \le \frac{1}{2^n}\}$содержится в $W_{x_1} \cap \cdots \cap W_{x_k}$. Тогда $\frac{1}{2^n}K \subset V$. Итак, для любой окрестности нуля V имеем $K \subset L_0 + V$. Из замкнутости L_0 следует, что $K \subset L_0$, так как в любой уравновешенной окрестности любой точки $x \in K$ есть точки из L_0. И наконец, поскольку K поглощающее, $L = L_0$ (почему?). □

Определение 2.2.57. Пусть L – ТВП. Обозначим за L^* – векторное пространство непрерывных линейных функционалов $f : L \to \mathbb{F}$. Введём

на нём равномерную структуру с помощью определения 1.10.52, положив $\sigma = \{B \subset L \mid B \text{ ограничено}\}$.

Определение 2.2.58. Рассмотрим ТВП L с топологией, поднятой с $\mathbb{F}$ семейством функционалов L^*. Назовём эту топологию *слабой топологией* на L.

Замечание 2.2.59. Слабая топология в L является по определению слабейшей топологией, в которой непрерывны все функционалы, непрерывные в исходной топологии.

Задача 2.2.60. Рассмотрим ТВП L и все непрерывные линейные функционалы на нем. Рассмотрим все конечные наборы таких функционалов $f_1, ..., f_n$. Пусть $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, рассмотрим семейство множеств вида $B^\varepsilon_{f_1,...f_n} = \{x \in L : |f_i(x)| < \varepsilon, i \in \overline{1, ..., n}\}$. Покажите, что описанное семейство является базисом фильтра окрестностей нуля. Покажите, что получившаяся топология мажорируется исходной топологией на L. Покажите, что эта топология есть в точности слабая топология на L.

Решение. Указание: фильтрованность семейства следует из $B^\varepsilon_{f_1,...,f_n} \cap B^{\varepsilon'}_{g_1,...,g_m} \supset B^{\min(\varepsilon,\varepsilon')}_{f_1,...,f_n,g_1,...,g_m}$; мажорирование – из непрерывности функционалов f_i в исходной топологии. Наконец, слабая топология поднята семейством L^*, а прообразы $f^{-1}(B_\varepsilon(0)) = B^\varepsilon_f$ вместе с их конечными пересечениями образуют базис фильтра окрестностей нуля поднятой топологии. □

Задача 2.2.61. Последовательность $x_n \in L$ слабо сходится к $x_0 \in L$ $\iff$ для любого линейного непрерывного функционала f выполнено условие $f(x_n) \to f(x_0)$.

Решение. Ясно, что достаточно доказать это утверждение для $x_0 = 0$.
$\implies$ Для функционала f и $\varepsilon > 0$ рассмотрим B^ε_f – слабую окрестность. Из сходимости получаем $\exists N : \forall n > N\ x_n \in B^\varepsilon_f \implies |f(x_n)| < \varepsilon$, ч.т.д.
$\impliedby$ Рассмотрим произвольную слабую окрестность $B = \{x \in L : |f_i(x)| < \varepsilon, i \in \overline{1, ..., n}\}$. Из сходимости получаем $\forall i \in \overline{1, ..., n}\ \exists N_i : \forall m > N_i\ |f_i(x_m)| < \varepsilon$.
Тогда получаем $\forall m > \max(N_1, ..., N_n)\ x_m \in B$. □

Метаопределение 2.2.62. Понятия, в определении которых используется сходимость последовательностей, называют *секвенциальными*. Приведём несколько примеров. Пусть X, Y – ТП.

1. Функция $f : X \to Y$ *секвенциально непрерывна* в точке x, если для любой последовательности x_m, сходящейся к x, последовательность $f(x_m)$ сходится к $f(x)$; f *секвенциально непрерывна*, если она секвенциально непрерывна в каждой точке.

2. Точка x называется *секвенциальной точкой прикосновения* множества $S \subset X$, если некоторая последовательность точек S сходится к x; множество всех таких точек называется *секвенциальным замыканием* S.
3. Множество $S \subset X$ *секвенциально замкнуто*, если все пределы любой сходящейся последовательности точек S лежат в S.

Секвенциальный вариант компактности был определён ранее.

Задача 2.2.63. Непрерывная функция секвенциально непрерывна, замкнутое множество секвенциально замкнуто, секвенциальная точка прикосновения является точкой прикосновения, а секвенциальное замыкание содержится в замыкании.

Решение. Указание: последовательность есть частный случай сети; примените задачи 1.5.36, 1.6.10 и 1.5.40. □

Задача 2.2.64. В косчётной топологии на $\mathbb{R}$ множество $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ секвенциально замкнуто, но не замкнуто: точка 0 является его точкой прикосновения, но не секвенциальной точкой прикосновения. Таким образом, секвенциальные определения в общем случае не эквивалентны топологическим.

Решение. Дополнение любой окрестности нуля не более чем счётно, поэтому окрестность пересекает S и 0 – точка прикосновения S. Но в косчётной топологии сходятся лишь стационарные последовательности, так что все пределы последовательностей точек S лежат в S. □

Задача 2.2.65. В первосчётном ТП секвенциальное замыкание совпадает с замыканием, а секвенциальная замкнутость – с замкнутостью. Секвенциально непрерывная функция на первосчётном ТП непрерывна.

Решение. Ввиду задачи 2.2.63 достаточно проверить обратные утверждения. Пусть x точка прикосновения множества S, а $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ счётный базис фильтра окрестностей x, который можно считать убывающим, перейдя к пересечениям $U_1 \cap \dots \cap U_m$. Каждое U_m пересекает S, и, выбрав $x_m \in U_m \cap S$, получим последовательность точек S, сходящуюся к x (почему?). Первые два утверждения доказаны (замкнутость равносильна совпадению с замыканием).

Пусть теперь f секвенциально непрерывна, но не непрерывна в точке x: найдётся окрестность U точки $f(x)$, для которой $f(V) \not\subset U$ при любой окрестности V точки x. Выбирая в убывающем счётном базисе $\{V_m\}$ точки $x_m \in V_m$ с $f(x_m) \notin U$, получим последовательность, сходящуюся к x, образы которой не сходятся к $f(x)$. Противоречие. □

Замечание 2.2.66. Секвенциальное замыкание может не быть идемпотентным: секвенциальное замыкание секвенциального замыкания иногда строго больше. Компактность и секвенциальная компактность в общем случае не следуют одна из другой, хотя в метрических пространствах они эквивалентны.

Определение 2.2.67. Определим несколько ТВП, важных для приложений:

1. Обозначим $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ВП бесконечно дифференцируемых функций со значениями в $\mathbb{F}$ с топологией, порождённой семейством полунорм:
$$\|f\|_k = \max_{x\in\overline{B}_k(0),|\mathbf{k}|<k} |D^{\mathbf{k}}f(x)|$$
где $\mathbf{k}$ произвольный мультииндекс, $k\in\mathbb{N}$, а $\overline{B}_k(0) = \{y\in\mathbb{R}^n \mid |y|\le k\}$ замкнутый шар с центром в нуле радиуса k в стандартной метрике $\mathbb{R}^n$.
2. Пространство Шварца. Функцию $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ назовём *быстроубывающей*, если для любого мультииндекса $\mathbf{k}$ и любого $m\in\mathbb{N}_0$: $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|x|^m|D^{\mathbf{k}}f(x)| < \infty$, другими словами, функция и все её производные стремятся к 0 быстрее любой отрицательной степени $|x|$ при $|x|\to\infty$. Обозначим $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\subset\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ВП всех быстроубывающих функций и зададим топологию в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ с помощью счётного семейства норм $\|f\|_{m,\mathbf{k}} = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|x|^m|D^{\mathbf{k}}f(x)|$.

Задача 2.2.68. Пространство $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ – ненормируемое пространство Фреше.

Решение. Для проверки метризуемости воспользуйтесь примером 1.2.4.7 и постройте метрику по системе полунорм. Проверьте, что получается метрика. Для проверки полноты воспользуйтесь следующей теоремой анализа (ср. [14, гл. XVI] – вариант для последовательностей):

Теорема 2.2.69. Пусть $\{f_i : X\to\mathbb{F}\}_{i\in I}$ семейство дифференцируемых функций, определённых на выпуклом ограниченном множестве $X\subset\mathbb{R}^n$ и φ фильтр на I. Если для каждого $p = 1,\dots,n$ семейство $\{\partial_p f_i\}_{i\in I}$ частных производных равномерно сходится по фильтру φ к некоторой функции g_p $(\forall\varepsilon>0\ \exists J\in\varphi\ \forall i\in J:\ \sup_{x\in X}|\partial_p f_i(x) - g_p(x)| < \varepsilon)$

и найдётся $x_0\in X$ такой, что существует $\lim\limits_{\varphi} f_i(x_0)$, то $\{f_i\}$ равномерно сходится к некоторой функции f, причём $\overset{\varphi}{\partial}_p f = g_p$ для всех p

Для проверки ненормируемости используем задачу 2.2.52. Согласно определению топологии базис фильтра окрестностей нуля состоит из окрестностей вида $U = B^{k_1}_{\varepsilon_1}(0)\cap\dots\cap B^{k_s}_{\varepsilon_s}(0)$, где верхний индекс –

номер нормы. Если теперь $k > \max_i k_i$, то шар $B_r^k(0)$ не может поглощать U так как максимум $D^{\mathbf{k}} f$ может быть сколь угодно большим при $\max_i k_i \leq |\mathbf{k}| < k$ (формализуйте). Итак, мы проверили, что базис состоит из неограниченных окрестностей. □

Задача 2.2.70. Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ – ненормируемое пространство Фреше.

Решение. Указание: рассуждение аналогично предыдущей задаче. □

Определение 2.2.71. Линейные непрерывные отображения ТВП будем называть для краткости *морфизмами*.

Определение 2.2.72. Пусть I направленное множество. Семейство $\{f_i^j : L_i \to L_j \mid i \leq j\}_{i,j\in I}$ морфизмов из (локально выпуклого) ТВП L_i в (локально выпуклое) ТВП L_j, удовлетворяющих условиям $f_j^k \circ f_i^j = f_i^k$ для всех $i \leq j \leq k$ и $f_i^i = 1_{L_i}$ – тождественно, называется *индуктивной системой*. Индуктивную систему назовём *строгой*, если все морфизмы f_i^j суть гомеоморфизмы на свой образ и $I = \mathbb{N}$ с обычным порядком.

Определение 2.2.73. *(Строгим) индуктивным пределом* (строгой) индуктивной системы $\{f_i^j : L_i \to L_j \mid i \leq j\}_{i,j\in I}$ (локально выпуклых) ТВП L_i называется семейство морфизмов $\{f_i : L_i \to L\}_{i\in I}$ в некоторое (локально выпуклое) ТВП L такое, что для любого семейства морфизмов $\{g_i : L_i \to M\}$ в произвольное (локально выпуклое) ТВП M, удовлетворяющих условию $g_j \circ f_i^j = g_i$ для всех $i \leq j$ существует единственный морфизм $g : L \to M$ такой, что для всех $i \in I:\ g \circ f_i = g_i$. Обозначение: $\varinjlim L_i = L$, опуская указание на морфизмы $f_i^j,\ f_i$.

Строгий индуктивный предел индуктивной системы, состоящей из пространств Фреше называется *LF-пространством*.

В случае строгих индуктивных пределов мы отождествляем пространства L_i с их образами $f_i^j(L_i) \subset L_j$, т.е. пишем $L_i \subset L_j$ при $i < j$.

Задача 2.2.74. Для любой индуктивной системы (локально выпуклых) ТВП $\{f_i^j : L_i \to L_j \mid i \leq j\}_{i,j\in I}$ существует (локально выпуклый) индуктивный предел.

Решение. Пусть $L' = \sqcup_i L_i$ – дизъюнктное объединение. Введём на L' отношение: для $x \in L_i,\ y \in L_j$ положим $x \sim y \iff \exists k \geq i, j:\ f_i^k(x) = f_j^k(y)$, другими словами, x и y будем считать эквивалентными, если их образы совпадают в некотором общем L_k. Проверьте, что $\sim$ – отношение эквивалентности (транзитивность следует из направленности I и условия согласования $f_j^k \circ f_i^j = f_i^k$). Обозначим через $L = L'/\sim$ множество классов эквивалентности по $\sim$. Для $\overline{x}, \overline{y} \in L$, где $x \in L_i,\ y \in L_j$, и $a, b \in \mathbb{F}$ определим операции, переведя представителей в общее пространство:

$a\overline{x} + b\overline{y} = \overline{af_i^k(x) + bf_j^k(y)}$ при $k \geq i, j$. Проверьте корректность определения операций.

Определим (очевидно, линейные) отображения $f_i : L_i \to L$, положив $f_i(x) = \overline{x}$. Наконец, наделим L финальной линейной (выпуклой) топологией относительно семейства морфизмов f_i.

Если $g_i : L_i \to M$ произвольное семейство линейных непрерывных отображений в (локально выпуклое) пространство M таких, что $g_j \circ f_i^j = g_i$, то положив $f(\overline{x}) = g_i(x)$ для любого $\overline{x} \in L$, $x \in L_i$, мы получим корректно определённое линейное отображение $f : L \to M$ (проверьте). Для любой (выпуклой) окрестности нуля $U \subset M$ все прообразы $f_i^{-1}(f^{-1}(U)) = g_i^{-1}(U)$ являются (выпуклыми) окрестностями нуля в соответствующих L_i, а значит (взяв U абсолютно выпуклой, что законно в локально выпуклом M, и заметив, что $f^{-1}(U)$ абсолютно выпукло и поглощает, поскольку $L = \bigcup_i f_i(L_i)$) по задаче 2.2.36 $f^{-1}(U)$ (выпуклая) окрестность нуля в L, что означает непрерывность f. Итак, $\varinjlim L_i = L$ (единственность f следует из $L = \bigcup_i f_i(L_i)$). □

Задача 2.2.75. Пусть L локально выпуклое ТВП, L_0 (топологически) замкнутое линейное подпространство в L, U выпуклая окрестность 0 в L_0, $x_0 \in L \setminus U$, тогда существует выпуклая окрестность нуля $V \subset L$ такая, что $V \cap L_0 = U$ и $x_0 \notin V$.

Решение. (см. [6, лемма 13.1]) Во-первых, по определению индуцированной топологии найдётся окрестность нуля W в L такая, что $U = W \cap L_0$. По локальной выпуклости L найдём выпуклую окрестность $W_0 \subset W$ в L; обозначим через W_1 выпуклую оболочку $U \cup W_0$. Любой $x \in W_1 \cap L_0$ имеет вид $x = ay + (1-a)z$ для некоторых $a \in [0;1]$, $y \in U$, $z \in W_0$. При $a = 1$: $x \in U$. При $a < 1$: $z = \frac{x-ay}{1-a} \in L_0$. Значит $z \in W_0 \cap L_0 \subset W \cap L_0 = U$. Откуда по выпуклости U : $x \in U$. Мы получили включение $W_1 \cap L_0 \subset U$ и поскольку обратное включение очевидно, то $W_1 \cap L_0 = U$.

Если $x_0 \in L_0$, то поскольку $x_0 \notin U = W_1 \cap L_0$, значит $x_0 \notin W_1$ и можно положить $W_1 = V$. Если же $x_0 \notin L_0$, рассмотрим проекцию $\pi : L \to L/L_0$ на хаусдорфово локально выпуклое пространство L/L_0. Возьмём прообраз $U' = \pi^{-1}(V')$ выпуклой окрестности V' точки 0 в L/L_0, которая не содержит $\pi(x_0)$. U' выпуклая окрестность L_0, не содержащая x_0 и можно положить $V = W_1 \cap U'$. □

Задача 2.2.76. Если L – LF-пространство, а $f_i : L_i \to L$ соответствующие вложения пространств Фреше, то f_i являются гомеоморфизмами L_i на образ $f_i(L_i) \subset L$.

Решение. Поскольку f_i непрерывные вложения, то топология на $f_i(L_i)$, индуцированная из L, слабее топологии спущенной с L_i (почему?). Об-

ратно, пусть U_0 выпуклая окрестность нуля в L_i. Поскольку L_i полно, то L_i замкнутое подпространство в L_{i+1} и согласно задаче 2.2.75 найдётся выпуклая окрестность нуля $U_1 \subset L_{i+1}$ такая, что $U_0 = U_1 \cap L_i$. По индукции построим выпуклые окрестности нуля $U_k \subset L_{i+k}$ такие, что $U_k = U_{k+1} \cap L_{i+k}$ и положим $U = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} f_{i+k}(U_k)$. Можно считать все U_k абсолютно выпуклыми: за U_0 возьмём абсолютно выпуклую окрестность нуля (в локально выпуклом L_i такие образуют базис), а каждое полученное по 2.2.75 множество U_{k+1} заменим его уравновешенным ядром $\bigcap_{|a|=1} aU_{k+1}$ – это снова окрестность нуля (она содержит уравновешенную окрестность), и след не меняется, так как $aL_{i+k} = L_{i+k}$ и U_k уравновешено. Тогда U абсолютно выпукло и поглощает. По построению, $f_p^{-1}(U)$ есть выпуклая окрестность нуля в L_p для всех $p \in \mathbb{N}$ (проверьте для $p < i$), а значит по задаче 2.2.36 множество U есть окрестность нуля в L, причём $U \cap f_i(L_i) = U_0$. Итак, U_0 окрестность нуля в индуцированной топологии на $f_i(L_i)$. Совпадение индуцированной из L и спущенной с L_i топологий на $f_i(L_i)$ установлено. □

Задача 2.2.77. LF-пространство регулярно.

Решение. Указание: ТВП равномерно, а равномерное пространство регулярно тогда и только тогда, когда оно хаусдорфово, поэтому по критерию хаусдорфовости достаточно проверить $\cap\varphi_0 = \{0\}$. Пусть $0 \neq x$, скажем $x \in L_n$. Возьмём абсолютно выпуклую окрестность нуля $U_n \subset L_n$, не содержащую x, и продолжим её цепочкой 2.2.75 так же, как в решении 2.2.76, до окрестности нуля $U \subset L$ с $U \cap L_n = U_n$. Тогда $x \notin U$. □

Замечание 2.2.78. Используя результат задачи 2.2.76 мы можем отождествить L_i с $f_i(L_i)$ в случае LF-пространств и в дальнейшем считать все пространства Фреше L_i вложенными в свой индуктивный предел L. Заметим также, что пространства Фреше L_i замкнуты в L, так как они полны (задача 1.10.46).

Задача 2.2.79. Пусть φ, ψ пара фильтров на ВП L. Положим $\varphi + \psi = \{W \subset L \mid \exists U \in \varphi\ \exists V \in \psi :\ U + V \subset W\}$. Показать, что $\varphi + \psi$ фильтр на L, который назовём *суммой* фильтров φ и ψ.

Решение. Указание: проверьте, что для $U, U' \in \varphi\ \ V, V' \in \psi :\ (U \cap U') + (V \cap V') \subset (U + V) \cap (U' + V')$. □

Задача 2.2.80. Если φ фильтр Коши на ТВП L (относительно канонической равномерной структуры), а φ_0 фильтр окрестностей нуля, то $\varphi + \varphi_0$ есть фильтр Коши и $\varphi + \varphi_0 \subset \varphi$.

Решение. Если $S_U = \{(x; y) \mid x - y \in U\}$ $(U \in \varphi_0)$, произвольное базисное окружение, $V \in \varphi_0$ такое, что $V + V - V \subset U$ и $M \in \varphi$ такое, что

$M\times M\subset S_V$, то это значит, что $M-M\subset V$, а значит $(M+V)-(M+V)=(M-M)+(V-V)\subset V+V-V\subset U$ или $(M+V)\times(M+V)\subset S_U$. Восстановите недостающие детали рассуждения. □

Задача 2.2.81. Пусть $L=\varinjlim L_i$ – LF-пространство и φ фильтр Коши на L. Тогда найдётся такой индекс n, что след $\psi=(\varphi+\varphi_0)|_{L_n}$ фильтра $\varphi+\varphi_0$ на L_n есть фильтр Коши.

Решение. (Ф.Трев) Убедимся сперва, что для некоторого n след не содержит пустого множества. Рассуждаем от противного: пусть для любого n найдутся $M_n\in\varphi,\ V_n\in\varphi_0:\ (M_n+V_n)\cap L_n=\varnothing$, причём V_n могут быть выбраны уравновешенными, выпуклыми и содержащимися друг в друге: $V_{n+1}\subset V_n$ (почему?). Пусть W_n выпуклая оболочка множества $V_n\cup\bigcup\limits_{k<n}(V_k\cap L_k)$.

Если $w\in M_n+W_n$, то поскольку $\bigcup\limits_{k<n}(V_k\cap L_k)\subset L_{n-1}$, найдутся $x\in M_n,\ y\in V_n,\ z\in L_{n-1},\ a\in[0;1]$ такие, что $w=x+ay+(1-a)z$. Но $ay\in V_n$ (по уравновешенности), а $(1-a)z\in L_{n-1}\subset L_n$ и если $w\in L_n$, то $x+ay\in(M_n+V_n)\cap L_n=\varnothing$. Итак, $w\notin L_n$, другими словами, $(M_n+W_n)\cap L_n=\varnothing$.

Пусть теперь W выпуклая оболочка множества $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(V_k\cap L_k)$. Поскольку W выпукло и $V_k\cap L_k\subset W\cap L_k$ окрестность нуля в L_k для всех k, то W окрестность нуля в L. С другой стороны, поскольку последовательность V_n убывает, то $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}(V_k\cap L_k)\subset\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}V_k=V_n$. Откуда:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(V_k\cap L_k)\subset V_n\cup\bigcup_{k<n}(V_k\cap L_k)\text{ и }W\subset W_n\text{ для всех }n$$

Поскольку φ фильтр Коши, то найдётся $B\in\varphi$ такой, что $B-B\subset W\subset W_n$ для всех n. А так как $B\cap M_n\neq\varnothing$, то $B-(B\cap M_n)\subset W_n$, откуда $B\subset W_n+(B\cap M_n)\subset W_n+M_n$ и, следовательно, $B\cap L_n=\varnothing$ для всех n и значит $B=\varnothing$. Но фильтр не содержит пустого множества. Итак, проверено что след ψ фильтра $\varphi+\varphi_0$ на некотором L_n не содержит пустого множества, но тогда ψ фильтр, являющийся подъёмом фильтра $\varphi+\varphi_0$ при каноническом вложении $f_n:L_n\to L$, более того ψ фильтр Коши. □

Задача 2.2.82. Произвольное LF-пространство $L=\varinjlim L_i$ полно.

Решение. Пусть φ произвольный фильтр Коши на L, а φ_0 фильтр окрестностей нуля. Согласно предыдущей задаче для некоторого n определён подъём $\psi=f_n^*(\varphi+\varphi_0)$ фильтра Коши $\varphi+\varphi_0$ на L_n относительно вложения $f_n:L_n\to L$, и ψ является фильтром Коши.

Ввиду полноты L_n существует предел $x = \lim \psi$. Далее, по непрерывности вложения f_n: $x = \lim f_{n*}\psi$, где $f_{n*}\psi$ спуск фильтра ψ. Так как $\varphi + \varphi_0 \subset f_{n*}(f_n^*(\varphi + \varphi_0)) = f_{n*}(\psi)$, можем заключить, что x предельная точка фильтра Коши $\varphi + \varphi_0$, а поскольку предельная точка фильтра Коши является его пределом, получаем $x = \lim(\varphi + \varphi_0)$. Наконец, $\varphi + \varphi_0 \subset \varphi$, так что φ содержит фильтр окрестностей точки x и $x = \lim \varphi$. □

Задача 2.2.83. Пусть $L = \varinjlim L_i$ строгий индуктивный предел, а $\{i_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ возрастающая последовательность индексов. Тогда $\varinjlim L_{i_k} = L$: оба предела состоят из одних и тех же векторов и несут одну топологию.

Решение. Указание: $\bigcup_k L_{i_k} = \bigcup_i L_i$, поскольку каждое L_i лежит в L_{i_k} при $i_k \geq i$. Обозначим через τ и τ' финальные топологии по семействам $\{f_i\}$ и $\{f_{i_k}\}$. Вложения f_{i_k} непрерывны в τ, поэтому $\tau' \geq \tau$ по максимальности τ'; обратно, каждое f_i разлагается в композицию $f_{i_k} \circ (L_i \hookrightarrow L_{i_k})$ при $i_k \geq i$ и потому непрерывно в τ', откуда $\tau \geq \tau'$. □

Задача 2.2.84. Пусть ВП L наделено финальной выпуклой топологией τ относительно семейства линейных отображений $f_i : L_i \to L$, а $g : L \to M$ линейное отображение в локально выпуклое ТВП M. Если все композиции $g \circ f_i$ непрерывны, то g непрерывно.

Решение. Пусть σ топология на L, поднятая с M отображением g: базис её фильтра окрестностей нуля составляют прообразы $g^{-1}(V)$ окрестностей нуля $V \subset M$. Топология σ линейна и локально выпукла, так как подъём линейного выпуклого фильтра линеен и выпуклый. Супремум $\tau \vee \sigma$ в ЧУМ выпуклых топологий обеспечивает непрерывность всех f_i: прообразы базисных множеств $U \cap g^{-1}(V)$ открыты, поскольку $f_i^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f_i)^{-1}(V)$ открыто по условию. По максимальности финальной топологии $\tau \vee \sigma = \tau$, откуда $\sigma \subset \tau$, что означает непрерывность g. □

Задача 2.2.85 (лемма Дьёдонне–Шварца)**.** Ограниченное подмножество LF-пространства $L = \varinjlim L_i$ содержится в некотором L_n и ограничено в нём.

Решение. Пусть $B \subset L$ не лежит ни в одном L_n. Выбирая возрастающую последовательность индексов, согласно задаче 2.2.83 можно считать, что найдутся $x_k \in (B \cap L_{k+1}) \setminus L_k$. Построим по индукции выпуклые окрестности нуля $U_k \subset L_k$ так, что $U_{k+1} \cap L_k = U_k$ и $\frac{1}{k}x_k \notin U_{k+1}$: пространство L_k полно и, значит, замкнуто в L_{k+1}, точка $\frac{1}{k}x_k$ не лежит в $L_k \supset U_k$, и работает задача 2.2.75. Внутри каждого U_k найдётся выпуклая уравновешенная окрестность нуля W_k (почему?); положим $U = \operatorname{conv}\bigl(\bigcup_k W_k\bigr)$.

Множество U выпукло, уравновешено и поглощающе, а его след на каждом L_k содержит W_k, поэтому U – окрестность нуля в L. При этом $U \subset \bigcup_k U_k$ ввиду возрастания цепи выпуклых множеств U_k (проверьте), откуда $U \cap L_k \subset U_k$ (следы $U_m \cap L_k$ равны U_k при $m \geq k$) и $\frac{1}{k} x_k \notin U$. Итак, $x_k \notin kU$ и окрестность U не поглощает B – противоречие с ограниченностью.

Пусть теперь $B \subset L_n$ и W произвольная окрестность нуля в L_n. Топология L_n индуцирована из L, поэтому $W \supset V \cap L_n$ для некоторой окрестности нуля $V \subset L$, поглощающей B. Из $B \subset aV$ и $B \subset L_n$ следует $B \subset a(V \cap L_n) \subset aW$, т.е. B ограничено в L_n. □

Задача 2.2.86. Сходящаяся последовательность в ТВП вместе со своими пределами образует ограниченное множество. Компактное, а также секвенциально компактное подмножество ТВП ограничено.

Решение. Пусть $x_m \to x$ и W произвольная окрестность нуля. Выберем уравновешенную окрестность нуля V с $V + V \subset W$. Почти все члены лежат в $x + V$, а конечный набор оставшихся вместе с x поглощается V: все они лежат в aV при $|a| \geq s$ для некоторого $s \geq 1$. Тогда при $|a| \geq s$ имеем $x + V \subset aV + aV \subset aW$ (уравновешенность), и всё множество лежит в aW.

Если K компактно, а V открытая уравновешенная окрестность нуля, то растяжения mV, $m \in \mathbb{N}$ открыты и покрывают K (V поглощает точки); конечное подпокрытие вложено по уравновешенности, поэтому $K \subset mV$ для некоторого m, а значит $K \subset aV$ при $|a| \geq m$.

Если K секвенциально компактно, но не ограничено, то найдутся уравновешенная окрестность нуля V и точки $x_k \in K \setminus kV$. Некоторая подпоследовательность x_{k_j} сходится, значит, по первому утверждению множество $\{x_{k_j}\}$ лежит в aV для некоторого a, что противоречит $x_{k_j} \notin k_j V \supset aV$ при $k_j \geq a$. □

Задача 2.2.87. Линейное отображение $f : L \to M$ из LF-пространства $L = \varinjlim L_i$ в локально выпуклое ТВП M непрерывно тогда и только тогда, когда оно секвенциально непрерывно. В частности, непрерывность линейных функционалов на LF-пространствах и линейных операторов между ними равносильна секвенциальной непрерывности.

Решение. Непрерывность влечёт секвенциальную непрерывность всегда. Обратно, композиция $f \circ f_i : L_i \to M$ секвенциально непрерывна, поскольку вложение f_i переводит сходящиеся последовательности в сходящиеся. Пространство Фреше L_i метризуемо и потому первосчётно, значит, $f \circ f_i$ непрерывна. Остаётся применить задачу 2.2.84. □

Теорема 2.2.88. Подмножество LF-пространства компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.

Доказательство. Компактное или секвенциально компактное множество K ограничено и по лемме Дьёдонне–Шварца лежит в некотором пространстве Фреше L_n, топология которого индуцирована из L. Оба свойства K равносильны тем же свойствам K как подмножества L_n: компактность внутреннее свойство подпространства K, а сходимость последовательности точек L_n к точке L_n равносильна сходимости в L (проверьте). Пространство L_n метризуемо, а в метрических пространствах компактность равносильна секвенциальной компактности. □

Применим полученные результаты к пространству основных функций. Для компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ положим $\mathscr{D}(K) = \{f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp} f \subset K\}$ и введём на $\mathscr{D}(K)$ счётное семейство норм

$$\rho_N^K(f) = \max_{|\mathbf{k}|\le N} \sup_{t\in K} |D^{\mathbf{k}} f(t)|,\ N \in \mathbb{N}_0$$

Задача 2.2.89. $\mathscr{D}(K)$ с топологией, порождённой семейством норм $\{\rho_N^K\}$, есть пространство Фреше.

Решение. Шары норм выпуклы, поэтому соответствующие фильтры окрестностей нуля линейны и выпуклы, как и их супремум, т.е. $\mathscr{D}(K)$ – локально выпуклое ТВП. Оно хаусдорфово ($\rho_0^K(f) = 0 \implies f = 0$) и метризуемо инвариантной метрикой. Пусть f_m фундаментальная последовательность. Тогда она фундаментальна по каждой норме ρ_N^K (почему?), т.е. все последовательности $D^{\mathbf{k}} f_m$ равномерно фундаментальны на K. По теоремам анализа о пределе равномерно сходящейся последовательности и о почленном дифференцировании (см. [14, гл. XVI]) существует $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с $\operatorname{supp} f \subset K$, для которой $\rho_N^K(f_m - f) \to 0$ при всех N, что означает сходимость $f_m \to f$ в метрике (проверьте). □

Задача 2.2.90. Если компакты $K \subset K'$, то $\mathscr{D}(K) \subset \mathscr{D}(K')$ и топология $\mathscr{D}(K)$ индуцирована топологией $\mathscr{D}(K')$.

Решение. Для $g \in \mathscr{D}(K)$ имеем $\rho_N^{K'}(g) = \rho_N^K(g)$, поскольку вне K функция g и все её производные равны нулю. Поэтому для шаров $B_N^K(f, r) = \{g \in \mathscr{D}(K) \mid \rho_N^K(f - g) < r\}$ выполнено равенство $B_N^K(f, r) = B_N^{K'}(f, r) \cap \mathscr{D}(K)$, а конечные пересечения таких шаров составляют базы топологий. □

Задача 2.2.91. Пусть $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ компактное исчерпание пространства $\mathbb{R}^n$ (см. пр. 1.8.41). Тогда:

1. $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_i \mathscr{D}(K_i)$, а вложения $\mathscr{D}(K_i) \subset \mathscr{D}(K_{i+1})$ образуют строгую индуктивную систему пространств Фреше, т.е. $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ с топологией $\tau_{\mathscr{D}}$ строгого индуктивного предела $\varinjlim \mathscr{D}(K_i)$ есть LF-пространство;
2. топология $\tau_{\mathscr{D}}$ не зависит от выбора исчерпания.

Топологию $\tau_{\mathscr{D}}$ называем *стандартной топологией пространства основных функций*. Будучи LF-пространством, $(\mathscr{D}(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathscr{D}})$ полно.

Решение. Носитель любой $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ компактен и покрывается возрастающим семейством открытых множеств $\operatorname{int}(K_i)$, значит, лежит в некотором K_m и $f \in \mathscr{D}(K_m)$. Строгость системы установлена в задаче 2.2.90, а $\mathscr{D}(K_i)$ – пространства Фреше.

Если $\{K'_j\}$ другое исчерпание, то по тем же соображениям каждый K_i лежит в некотором K'_j и наоборот, так что найдётся перемежающаяся цепочка $K_{i_1} \subset K'_{j_1} \subset K_{i_2} \subset \dots$ Смешанная последовательность компактов задаёт строгую индуктивную систему, в которой подсистемы $\{K_{i_s}\}$ и $\{K'_{j_s}\}$ кофинальны, и по задаче 2.2.83 все три индуктивных предела совпадают. □

Задача 2.2.92. Последовательность f_m сходится к 0 в топологии $\tau_{\mathscr{D}}$ тогда и только тогда, когда выполнен критерий задачи 2.2.21: все $D^{\mathbf{k}} f_m$ равномерно сходятся к 0 и объединение носителей функций f_m ограничено в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, сходимость последовательностей в $\tau_{\mathscr{D}}$ и в топологии супремума одна и та же.

Решение. $\Longrightarrow$ Сходящаяся последовательность ограничена и по лемме Дьёдонне–Шварца лежит в некотором $\mathscr{D}(K_i)$, т.е. носители лежат в K_i. Топология $\mathscr{D}(K_i)$ индуцирована из $\tau_{\mathscr{D}}$, поэтому $f_m \to 0$ в $\mathscr{D}(K_i)$, что означает равномерную сходимость всех производных.

$\Longleftarrow$ Замыкание ограниченного объединения носителей компактно и лежит в некотором K_i; условие равномерной сходимости производных означает $f_m \to 0$ в $\mathscr{D}(K_i)$, а вложение $\mathscr{D}(K_i) \to (\mathscr{D}(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathscr{D}})$ непрерывно. □

Задача 2.2.93. Пусть $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – компактное исчерпание $\mathbb{R}^n$, $K_0 = \varnothing$. Существуют функции $\chi_i \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ со значениями в $[0;1]$ и носителями $\operatorname{supp}\chi_i \subset K_{i+1} \setminus \operatorname{int}(K_{i-1})$, для которых $\sum_i \chi_i = 1$ (*гладкое разбиение единицы* на $\mathbb{R}^n$).

Решение. Указание: положим $V_i = \operatorname{int}(K_{i+1}) \setminus K_{i-1}$. Эти открытые множества покрывают $\mathbb{R}^n$: если i – наименьший индекс с $x \in K_i$, то $x \in K_i \subset \operatorname{int}(K_{i+1})$ и $x \notin K_{i-1}$, т.е. $x \in V_i$. Покрытие локально конечно: компакт лежит в некотором K_N и не задевает V_i при $i-1 \geq N$. Для каждой точки x возьмите шапку θ_x, равную 1 в окрестности x, с носителем в том

V_i, которому x принадлежит; для каждого i выберите из компактности $K_i \setminus \operatorname{int}(K_{i-1})$ конечное подпокрытие множествами $\{\theta_x = 1\}$ и сложите все отобранные шапки с общим индексом j в $\psi_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\psi_j \geq 0$ и $\operatorname{supp}\psi_j \subset V_j \subset K_{j+1} \setminus \operatorname{int}(K_{j-1})$, а сумма $\psi = \sum_j \psi_j$ локально конечна, гладка и всюду положительна; положите $\chi_j = \psi_j/\psi$. Это частный случай гладких разбиений единицы, строящихся в главе о многообразиях. □

Задача 2.2.94. Пусть $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ компактное исчерпание $\mathbb{R}^n$, $K_0 = \varnothing$. Для последовательности натуральных чисел $c = \{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ положим

$$p_c(f) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \left[c_i \max_{|\mathbf{k}|\leq c_i} \sup_{x\in K_i\setminus K_{i-1}} |D^{\mathbf{k}} f(x)| \right] \tag{2.2.1}$$

Семейство $\{p_c\}$ по всем последовательностям c состоит из полунорм на $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ и порождает топологию $\tau_{\mathscr{D}}$.

Решение. (ср. [12]) Для $f \in \mathscr{D}(K_m)$ пересечение $K_i \setminus K_{i-1}$ с K_m пусто при $i > m$, поэтому супремум в (2.2.1) берётся по конечному набору индексов и конечен, а субаддитивность и однородность p_c наследуются от супремума полунорм. Шар $\{p_c < 1\}$ выпукл, уравновешен и поглощает каждую $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ ($f \in a\{p_c < 1\}$ при $a > p_c(f)$), а его след на $\mathscr{D}(K_m)$ открыт, так как $p_c(f) \leq N\rho_N^{K_m}(f)$ при $f \in \mathscr{D}(K_m)$, где $N = \max_{i\leq m} c_i$. Значит, каждый шар $\{p_c < 1\}$ – окрестность нуля в $\tau_{\mathscr{D}}$, т.е. топология, порождённая семейством $\{p_c\}$, содержится в $\tau_{\mathscr{D}}$.

Обратно, пусть U выпуклая уравновешенная окрестность нуля в $\tau_{\mathscr{D}}$ (базис из таких множеств существует – почему?). Для каждого m след $U \cap \mathscr{D}(K_m)$ – окрестность нуля в $\mathscr{D}(K_m)$, значит, найдутся $N_m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_m \in (0;1)$ с $\{f \in \mathscr{D}(K_m) \mid \rho_{N_m}^{K_m}(f) < \varepsilon_m\} \subset U$. Фиксируем разбиение единицы $\{\chi_i\}$ и константы Лейбница $C_i \geq 1$, для которых $\rho_{N_{i+1}}^{K_{i+1}}(\chi_i g) \leq C_i \max_{|\mathbf{k}|\leq N_{i+1}} \sup_{\operatorname{supp}\chi_i} |D^{\mathbf{k}} g|$ для всех $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ (продифференцируйте произведение $\chi_i g$). Выберем неубывающую последовательность c так, что $c_{i-1} \geq N_{i+1}$ и $c_{i-1} > 2^i C_i/\varepsilon_{i+1}$ при $i \geq 2$, а c_1 превосходит соответствующие величины для $i \in \{1;2\}$.

Пусть $p_c(f) < 1$. Носитель $\chi_i f$ лежит в $K_{i+1} \setminus \operatorname{int}(K_{i-1}) \subset (K_{i-1} \setminus K_{i-2}) \cup (K_i \setminus K_{i-1}) \cup (K_{i+1} \setminus K_i)$, причём на каждом из трёх множеств $|D^{\mathbf{k}} f| < 1/c_{i-1}$ при $|\mathbf{k}| \leq N_{i+1} \leq c_{i-1}$ (неубывание c). Отсюда $\rho_{N_{i+1}}^{K_{i+1}}(\chi_i f) \leq C_i/c_{i-1} < \varepsilon_{i+1} 2^{-i}$ и $2^i \chi_i f \in U$. Тогда конечная сумма $f = \sum_i \chi_i f = \sum_i 2^{-i}(2^i \chi_i f)$ есть выпуклая комбинация элементов U и нуля ($\sum_i 2^{-i} \leq 1$, а $0 \in U$ по уравновешенности), т.е. $f \in U$. Итак, $\{p_c < 1\} \subset U$, откуда $\tau_{\mathscr{D}}$ содержится в топологии, порождённой семейством $\{p_c\}$. □

Задача 2.2.95. Топология $\tau_{\mathscr{D}}$ мажорирует топологию τ_s, порождённую фильтром $\sup_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}$, причём строго: $\tau_s \subsetneq \tau_{\mathscr{D}}$.

Решение. Каждое множество $U_{\mathbf{k},h}$ выпукло, уравновешено и поглощающе (см. зад. 2.2.20), а его след на $\mathscr{D}(K_i)$ открыт: если $f \in U_{\mathbf{k},h} \cap \mathscr{D}(K_i)$, то $\varepsilon = \min_{K_i}(h - |D^{\mathbf{k}} f|) > 0$ и шар $B^{K_i}_{|\mathbf{k}|}(f, \varepsilon)$ лежит в $U_{\mathbf{k},h}$ (проверьте). Значит, $U_{\mathbf{k},h}$ окрестность нуля в $\tau_{\mathscr{D}}$ и $\tau_s \subset \tau_{\mathscr{D}}$.

Проверим, что включение строгое. Полунорма $q = p_c$ из задачи 2.2.94 с $c_i = i$ непрерывна в $\tau_{\mathscr{D}}$ (первая часть решения этой задачи). Покажем, что шар $\{q < 1\}$ не содержит ни одного базисного множества $V = U_{\mathbf{k}_1,h_1} \cap \dots \cap U_{\mathbf{k}_s,h_s}$ топологии τ_s. Пусть $N = \max_j |\mathbf{k}_j|$; выберем $m > N$ так, чтобы открытое множество $W = \operatorname{int}(K_m) \setminus K_{m-1}$ было непусто (иначе $K_{m-1} = \operatorname{int}(K_m)$ было бы непустым открыто-замкнутым подмножеством связного $\mathbb{R}^n$, т.е. всем $\mathbb{R}^n$, что невозможно для компакта; поэтому $W \neq \varnothing$ при всех достаточно больших m), и положим $\delta = \min_j \min_{K_m} h_j > 0$. Зафиксируем шапку $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, с носителем в W, равную 1 в окрестности некоторой точки $x_0 \in W$, и для $a > 0,\ \lambda \geq 1$ рассмотрим $f_\lambda(x) = a\lambda^{-N}\varphi(x)\sin(\lambda x_1)$. По формуле Лейбница $|D^{\mathbf{k}_j} f_\lambda| \leq aC\lambda^{|\mathbf{k}_j|-N} \leq aC$, где константа C зависит лишь от φ и N, поэтому при $a < \delta/C$ все f_λ лежат в V. С другой стороны, взяв точку, в окрестности которой $\varphi = 1$, при больших λ найдём $x \in W$ с $|\partial^m f_\lambda / \partial x_1^m(x)| \geq a\lambda^{m-N}/2$ (почему?), откуда $q(f_\lambda) \geq ma\lambda^{m-N}/2 \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Итак, $V \not\subset \{q < 1\}$ и шар $\{q < 1\}$ не является окрестностью нуля в τ_s. □

Замечание 2.2.96. Хотя $\tau_s \neq \tau_{\mathscr{D}}$, сходящиеся последовательности в этих топологиях одни и те же, поэтому результаты задач 2.2.21 и 2.2.22 относятся к обеим топологиям; в частности, $(\mathscr{D}(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathscr{D}})$ неметризуемо. Система полунорм (2.2.1) несчётна (последовательностей c континуум), и по задаче 2.2.95 счётной системой из конечнопорядковых полунорм здесь не обойтись. В дальнейшем под пространством основных функций мы понимаем $(\mathscr{D}(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathscr{D}})$.

Замечание 2.2.97. По задаче 2.2.87 и теореме 2.2.88 непрерывность линейных функционалов и операторов на $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ и других LF-пространствах можно проверять секвенциально, а компактность равносильна секвенциальной. Вместе с явным описанием сходимости (задача 2.2.92) это делает работу с неметризуемым пространством $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ почти столь же удобной, как с метрическими пространствами, чем постоянно пользуются специалисты по теории обобщённых функций и смежным дисциплинам.

Глава 3

Элементы дифференциальной геометрии

3.1 Предварительные сведения

Основным объектом изучения в дифференциальной геометрии являются гладкие многообразия и расслоения над ними. Для определения этих объектов нам понадобятся некоторые факты из алгебры и анализа.

3.1.1 Алгебра

Задача 3.1.1. Пусть S произвольное множество, L линейное пространство над полем $\mathbb{F}$, $\phi : S \to L$ биекция. Тогда соотношения $x + y = \phi^{-1}(\phi(x) + \phi(y))$, $ax = \phi^{-1}(a\phi(x))$ для произвольных $x, y \in S$, $a \in \mathbb{F}$ задают структуру линейного пространства на S, которую назовём *индуцированной* биекцией ϕ. Две структуры индуцированные биекциями $\phi_i : S \to L_i$, $i = 1; 2$ совпадают тогда и только тогда, когда $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : L_1 \to L_2$ изоморфизм.

Определение 3.1.2. *Конусом (с сокращением)* назовём множество C с операциями сложения $+ : C \times C \to C$ и умножения на неотрицательные скаляры $\cdot : \mathbb{R}_{\geq 0} \times C \to C$, являющееся коммутативным моноидом (с сокращением: $a + c = b + c \implies a = b$) по сложению и удовлетворяющее всем аксиомам линейного пространства, в которых участвуют лишь неотрицательные скаляры по умножению: $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$, $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$, $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$, $1a = a$, $0a = 0$. Отображение конусов, сохраняющее обе операции, называется *конусным*.

Замечание 3.1.3. Линейное пространство очевидным образом наделяется структурой конуса и может рассматриваться как частный случай конуса.

Задача 3.1.4. Для любого конуса с сокращением C существуют линейное пространство $\hat{C}$ и инъективное конусное отображение $\iota : C \to \hat{C}$ такие, что $\hat{C} = \iota(C) - \iota(C)$. Пара $(\hat{C}, \iota)$ единственна с точностью до изоморфизма: если пара (L, κ) обладает теми же свойствами, то существует единственный изоморфизм $\alpha : \hat{C} \to L$ такой, что $\alpha \circ \iota = \kappa$. Пространство $\hat{C}$ назовём *линейным продолжением* конуса C.

Решение. Указание: положить $\hat{C} = C \times C/\sim$, где $(a, b) \sim (a', b') \iff a+b' = a'+b$ (пара (a, b) играет роль разности $a-b$); операции определить покомпонентно, умножение на -1 – перестановкой компонент, $\iota(a) = \overline{(a, 0)}$. Сокращение обеспечивает транзитивность $\sim$ и инъективность ι. □

Задача 3.1.5. Любое конусное отображение $f : C \to L$ конуса с сокращением в линейное пространство L единственным образом продолжается до линейного отображения $\hat{f} : \hat{C} \to L$, то есть $\hat{f} \circ \iota = f$.

Решение. Указание: $\hat{f}(\overline{(a, b)}) = f(a) - f(b)$. □

Определение 3.1.6. Если в определении линейного пространства заменить основное поле на кольцо k, то мы получим определение *k-модуля* (подмодуля, фактор-модуля, гомоморфизма и т.д.). k-модуль A, снабженный k-билинейной операцией $* : A \times A \to A$ называется (ассоциативной) *k-алгеброй*, если операция $*$ ассоциативна (в этом случае пишем $a \cdot b = ab$ вместо $a * b$); гомоморфизмом алгебр с единицей всюду ниже называем гомоморфизм модулей, сохраняющий умножение и единицу ($\varphi(1) = 1$); называется *k-алгеброй Ли*, если операция $*$ антикоммутативна ($a*b = -b*a$) и удовлетворяет тождеству Якоби:$(a*b)*c+(b*c)*a+(c*a)*b = 0$ (в этом случае пишем $[a, b]$ вместо $a * b$). A-подмодуль алгебры (кольца) A относительно умножения на элементы кольца слева (справа, с двух сторон) называется *левым (правым, двусторонним) идеалом*. Таким образом, для левого (правого, двустороннего) идеала I выполняется $AI \subset I$ ($IA \subset I$, $AI \subset I$ и $IA \subset I$).

Задача 3.1.7. Пусть A – k-алгебра, а I – двусторонний идеал в A. Фактормодуль A/I наделяется структурой k-алгебры, если положить $(a + I)(b + I) = ab + I$, где $a, b \in A$

Решение. Для краткости пишем $\overline{a} = a + I$. Если $\overline{a} = \overline{a'}$, $\overline{b} = \overline{b'}$ то $ab - a'b' = (a - a')b + a'(b - b') \in I$, т.е. $\overline{ab} = \overline{a'b'}$ и операция корректно определена. Завершите рассуждение. □

Пример 3.1.8.

1. $\Bbbk = \mathbb{R}$, A – алгебра непрерывных или гладких функций на $\mathbb{R}^n$, операции поточечные, $I_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$ – идеал, множество вектор-функций (со значениями в $\mathbb{R}^m$) – A-модуль.
2. $\Bbbk = A$ – тривиальная $\Bbbk$-алгебра, в частности, любое поле.
3. $\iota : \Bbbk \to A$ – гомоморфизм ассоциативных, коммутативных колец с единицей (наделите A структурой $\Bbbk$-алгебры)
4. $\Bbbk = \mathbb{R}$, $M(n)$ – алгебра вещественных квадратных матриц
5. если A ассоциативная $\Bbbk$-алгебра, то операция $[a, b] = ab - ba$ определяет структуру алгебры Ли на A
6. $\mathbb{R}^3$ с векторным произведением – алгебра Ли над $\Bbbk = \mathbb{R}$.

Метатеорема 3.1.9. Если $\varphi : A \to B$ гомоморфизм алгебраических структур (модулей, алгебр...), который обращается в ноль на подструктуре (подмодуле, идеале...) $A_0 \subset A$, то существует гомоморфизм $\tilde{\varphi} : A/A_0 \to B$ такой, что $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$, где $\pi : A \to A/A_0$ отображение факторизации.

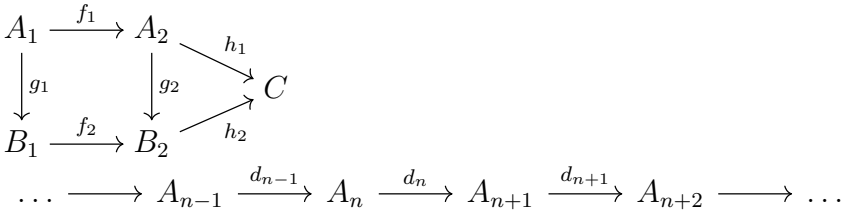
Доказательство. Просто полагаем $\tilde{\varphi}(\overline{a}) = \varphi(a)$ и проверяем корректность и гомоморфность $\tilde{\varphi}$. □

Определение 3.1.10. $\Bbbk$-алгебра A называется *(G-)градуированной*, где G некоторый аддитивно записываемый моноид, если $A = \bigoplus\limits_{p \in G} A_p$, где A_p $\Bbbk$-модули и $A_p A_q \subset A_{p+q}$ для всех p, q. A_p очевидным образом вкладываются в A, элементы из A_p называются *однородными степени* p. M – *(G-)градуированный* A-модуль, если $M = \bigoplus\limits_{p \in G} M_p$ и $A_p M_q \subset M_{p+q}$. *Градуированный гомоморфизм степени* k градуированных модулей $f : M \to M'$ – это гомоморфизм, переводящий M_p в M'_{p+k}, для градуированного подмодуля $M \subset M'$ требуется $M_i \subset M'_i$, для фактормодуля $N = M'/M$ соответственно $N_i = M'_i/M_i$ и т.д. *Однородный* левый (правый, двусторонний) идеал $I \subset A$ – это градуированный подмодуль в A относительно умножения слева (справа, с двух сторон) на элементы из A. Нас в основном интересует случай $G = \mathbb{N}_0$, тогда пишем, например, $A = \bigoplus\limits_{p=0}^{\infty} A_p$.

Задача 3.1.11. Наделите градуированный фактормодуль A/I $\Bbbk$-алгебры A по однородному двустороннему идеалу I структурой градуированной $\Bbbk$-алгебры.

Решение. Указание: как мы знаем A/I – $\Bbbk$-алгебра, градуировка задаётся изоморфизмом $A/I \cong \bigoplus\limits_{p\in G} A_p/I_p$, который получается из гомоморфизма $A \to \bigoplus\limits_{p\in G} A_p/I_p,\ (x_p)_{p\in G} \mapsto (x_p + I_p)_{p\in G}$ □

Метаопределение 3.1.12. Всевозможные отображения математических объектов, в каком-то смысле сохраняющие их структуру (например, гомоморфизмы групп, колец, полей, модулей, непрерывные отображения ТП, отображения множеств и т.д.) будем называть коротко *стрелками*. *Диаграмма* – схема, изображающая цепочки стрелок между математическими объектами. Диаграмма *коммутативна*, если композиции стрелок, составляющих путь между любыми двумя данными точками равны. *Комплекс – линейная* (все стрелки последовательно следуют друг за другом) диаграмма такая, что композиция любых двух последовательных стрелок равна нулю. Например, для коммутативной диаграммы и комплекса на картинке $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ g_2 \circ f_1 = h_2 \circ f_2 \circ g_1,\ g_2 \circ f_1 = f_2 \circ g_1,\ d_n \circ d_{n-1} = d_{n+1} \circ d_n = 0$:



Замечание 3.1.13. На комплекс модулей можно смотреть, как на гомоморфизм степени 1 $\mathbb{Z}$-градуированного модуля $A = \bigoplus\limits_{p\in\mathbb{Z}} A_p$. Поэтому стрелки d_i в комплексах часто обозначают одной и той же буквой d, а условие комплекса принимает вид $d \circ d = 0$.

Замечание 3.1.14. Если не оговорено противное, в дальнейшем $\Bbbk$-алгебра A коммутативна, ассоциативна с единицей, $\Bbbk$ – поле, нас в основном будет интересовать случай $\Bbbk = \mathbb{R}$. Наличие единицы $1 \in A$ определяет гомоморфизм $\Bbbk \to A,\ a \mapsto a \cdot 1$, который позволяет рассматривать любой A-модуль как $\Bbbk$-модуль и различать $\Bbbk$-гомоморфизмы и A-гомоморфизмы A-модулей. Модули $\Bbbk$-гомоморфизмов и A-гомоморфизмов из модуля P в модуль Q будут обозначаться $\hom_\Bbbk(P, Q)$ и $\hom_A(P, Q)$.

Определение 3.1.15. Пусть P, Q – A-модули над $\Bbbk$-алгеброй A определим по индукции A-модули $D_n(P, Q)$ *(линейных) дифференциальных операторов (ДО) порядка* $\leq n$ из P в Q, положив $D_n(P, Q) = 0$ при $n < 0$ и $\Bbbk$-линейное отображение $d : P \to Q$ лежит в $D_n(P, Q)$ тогда и только тогда, когда для $\forall a \in A :\ [d, a] \in D_{n-1}(P, Q)$, где $[d, a](b) = d(ab) - ad(b)$ обычная скобка.

Задача 3.1.16. Проверьте, что:

1. $D_0(P,Q) = \hom_A(P,Q)$
2. $d \in D_n(P,Q),\ d' \in D_m(Q,T) \implies d' \circ d \in D_{n+m}(P,T)$
3. $n \leq m \implies D_n(P,Q) \subset D_m(P,Q)$
4. $D_n(P,Q)$ A-подмодули A-модуля $\hom_{\Bbbk}(P,Q)$

Пример 3.1.17. Обычные линейные дифференциальные операторы на пространстве $C^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^k) = P = Q$ бесконечнодифференцируемых отображений $(A = C^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}),\ \Bbbk = \mathbb{R})$.

Пример 3.1.18. *($\Bbbk$-)Дифференцирования* $\Bbbk$-алгебры A со значениями в A-модуле L: $\Bbbk$-линейные отображения $d : A \to L$, удовлетворяющие условию $d(ab) = da \cdot b + a \cdot db$, в частности, при $L = A$ говорим о дифференцированиях $\Bbbk$-алгебры.

Задача 3.1.19. A-модуль $D(A)$ дифференцирований $\Bbbk$-алгебры A вместе с обычной скобкой $[d,d'] = dd' - d'd$ есть $\Bbbk$-алгебра Ли.

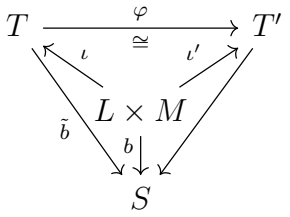
Определение 3.1.20. *Градуированное дифференцирование* это $\Bbbk$-гомоморфизм $d : A \to A$ градуированной $\Bbbk$-алгебры A в себя, удовлетворяющий условию $d(a \cdot b) = da \cdot b + (-1)^{ns} a \cdot db$ (градуированное правило Лейбница), где s степень d, а $a \in A_n$ однороден. Градуированные дифференцирования нечётной степени называем *антидифференцированиями*, чётной степени просто *дифференцированиями*.

Задача 3.1.21. Дифференцирования коммутативной $\Bbbk$-алгебры являются ДО первого порядка.

Задача 3.1.22. Покажите, что антидифференцирования могут не являться ДО первого порядка. Однако градуированная скобка $[d,a]_s(b) = d(ab) - (-1)^{sn} a\, db$, где s – степень градуированного дифференцирования d, а $a \in A_n$ однороден, является умножением на da.

Решение. Указание: пусть $\operatorname{ch}\mathbb{F} \neq 2$. Рассмотрите внешнюю алгебру одномерного пространства $\Lambda(\mathbb{F}) = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}e$ (здесь $\deg e = 1$ и $e \wedge e = 0$) и её антидифференцирование ι степени -1: $\iota(1) = 0,\ \iota(e) = 1$. Скобка $[\iota,e]$ не является $\Lambda(\mathbb{F})$-линейной: $[\iota,e](1) = 1$, тогда как $[\iota,e](e) = -e \neq e = e \cdot [\iota,e](1)$. □

3.1.2 Тензоры



Задача 3.1.23. Для любых A-модулей L и M найдётся A-модуль T и A-билинейное отображение $\iota : L \times M \to T$ такое, что для любого A-билинейного отображения $b : L \times M \to S$ существует единственное A-линейное отображение $\tilde{b} : T \to S$, удовлетворяющее условию $\tilde{b} \circ \iota = b$. Для любой другой пары (T', ι'), удовлетворяющей этому условию, существует единственный изоморфизм $\varphi : T \to T'$ такой, что $\varphi \circ \iota = \iota'$, т.е. коммутативна изображенная диаграмма.

Решение. Пусть $\mathscr{F}$ A-модуль функций из $L \times M$ в A почти всюду обращающихся в ноль. Обозначим $\delta_{(x,y)}$ функцию из $\mathscr{F}$, принимающую значение 1 на паре $(x, y) \in L \times M$ и 0 в остальных точках. Рассмотрим подпространство $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$, порождённое элементами видов: $\delta_{(x+y,z)} - \delta_{(x,z)} - \delta_{(y,z)}$, $\delta_{(x,y+z)} - \delta_{(x,y)} - \delta_{(x,z)}$, $a\delta_{(x,y)} - \delta_{(ax,y)}$, $a\delta_{(x,y)} - \delta_{(x,ay)}$. Пусть π проекция $\mathscr{F}$ на факторпространство $T = \mathscr{F}/\mathscr{F}_0$ и $\iota : L \times M \to T$ определяется соотношением $\iota(x, y) = \pi(\delta_{(x,y)})$. Введём обозначение: $x \otimes y := \pi(\delta_{(x,y)})$. Для любого $b : L \times M \to S$ определим линейное отображение $\hat{b} : \mathscr{F} \to S$, задав его на базисных векторах соотношением $\hat{b}(\delta_{(x,y)}) = b(x, y)$. Билинейность b означает в точности, что $\hat{b}$ обращается в ноль на порождающих подпространства $\mathscr{F}_0$, а значит и на всём $\mathscr{F}_0$. По метатеореме о факторизации получаем линейное отображение $\tilde{b} : T \to S$, $\tilde{b}(x \otimes y) = b(x, y)$, т.е. $\tilde{b} \circ \iota = b$. Единственность $\tilde{b}$ следует из того, что элементы $x \otimes y$ порождают T, поскольку $\delta_{(x,y)}$ составляют базис в $\mathscr{F}$ (проверьте!). Завершите решение. □

Определение 3.1.24. Модуль T из предыдущей задачи, определённый однозначно с точностью до единственного изоморфизма, называется *тензорным произведением* модулей L и M и обозначается $L \otimes_A M$ или просто $L \otimes M$. Элементы $x \otimes y \in L \otimes M$ называются *разложимыми тензорами*. Мы также говорим, что любое билинейное отображение $L \times M \to S$ *пропускается через* $L \otimes M$, имея в виду единственное линейное отображение $\tilde{b} : L \otimes M \to S$ такое, что $b = \tilde{b} \circ \iota$.

Задача 3.1.25. Произвольный элемент $t \in L \otimes M$ имеет вид $t = x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_p \otimes y_p$ для некоторых $p \in \mathbb{N}$, $x_i \in L$, $y_i \in M$. Тензорное произведение элементов дистрибутивно ($(x + y) \otimes z = x \otimes z + y \otimes z$) по обоим аргументам, однородно ($\forall a \in A :\ a(x \otimes y) = (ax) \otimes y = x \otimes (ay)$) и $x \otimes 0 = 0 \otimes x = 0$.

Решение. Указание: определение тензорного произведения дано таким образом, чтобы обеспечить дистрибутивность и однородность. □

Определение 3.1.26. Отображение $f : L_1 \times \cdots \times L_k \to M$ из декартова произведения A-модулей $L_1, \ldots, L_k$ в A-модуль M называется *полилинейным*, если для любого j и для любого набора векторов $x_i \in L_i,\ i \neq j$ отображение $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \ \cdot\ , x_{j+1}, \ldots, x_k) : L_j \to M$ линейно.

Задача 3.1.27. Сформулируйте и решите задачи аналогичные 3.1.23 – 3.1.25 для полилинейных отображений. В результате получится определение и свойства тензорного произведения $L_1 \otimes \cdots \otimes L_k$.

Задача 3.1.28. Уточните и докажите следующее утверждение: тензорное произведение нескольких модулей не зависит от расстановки скобок (ассоциативно) и коммутативно с точностью до однозначно определенного изоморфизма.

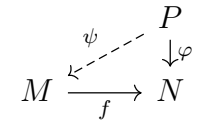
Метаопределение 3.1.29. Конструкции не зависящие от каких-либо произвольных выборов, например, выбора базиса будем называть *каноническими* или *естественными*.

Замечание 3.1.30. Точное объяснение значения термина “канонический” может быть дано в рамках теории категорий на основе понятий *функтора* и *естественного преобразования*.

Пример 3.1.31. Для любого линейного пространства L существует каноническое вложение $\iota_L : L \to L^{**}$ во второе сопряженное пространство $L^{**} = (L^*)^*$, определяемое соотношением $[\iota_L(x)](\xi) = \xi(x)$. Это отображение линейно и инъективно (для инъективности постройте по лемме Цорна базис, содержащий данный ненулевой вектор), а в случае конечномерности L является изоморфизмом ввиду совпадения размерностей L и L^{**}.

Определение 3.1.32. Модуль называется *свободным*, если имеет базис, *конечнопорождённым*, если порождается конечным числом элементов.

Модуль P называется *проективным*, если для любого эпиморфизма (сюръективного линейного отображения) $f : M \to N$ и любого линейного отображения $\varphi : P \to N$ найдётся линейное отображение $\psi : P \to M$ такое, что $f \circ \psi = \varphi$.



Задача 3.1.33. Модуль P проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым свободного модуля.

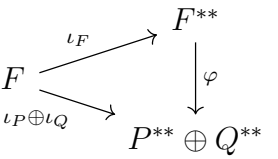
Решение. $\Longrightarrow$ Возьмём свободный модуль F с базисом $\{e_p\}$, занумерованным элементами P, и эпиморфизм $\pi : F \to P,\ e_p \mapsto p$. Подняв тождественное отображение $P \to P$ вдоль π, получим линейное $s : P \to F$ с

$\pi(s(p)) = p$. Тогда $F = s(P) \oplus \ker\pi$, поскольку $x = s(\pi(x)) + (x - s(\pi(x)))$, где второе слагаемое лежит в $\ker\pi$, а из $s(p) \in \ker\pi$ следует $p = \pi(s(p)) = 0$; при этом $s(P) \cong P$, так как s инъективно.

$\Longleftarrow$ Свободный модуль обладает свойством поднятия: для эпиморфизма $f : M \to N$ и линейного φ достаточно выбрать для каждого базисного вектора e_α прообраз $\psi(e_\alpha) \in f^{-1}(\varphi(e_\alpha))$ и продолжить ψ по линейности. Если теперь $F = P \oplus Q$ и $\varphi : P \to N$ линейно, то, подняв до ψ отображение $F \to N,\ (p, q) \mapsto \varphi(p)$, получим искомое поднятие $\psi|_P$ отображения φ. □

Задача 3.1.34. Проективный конечнопорождённый A-модуль P канонически изоморфен второму сопряжённому модулю P^{**} (как обычно $P^* = \hom_A(P, A)$).

Решение. Пусть Q прямое дополнение P до (конечнопорождённого) свободного модуля F, т.е. $F = P \oplus Q$. Как и в примере 3.1.31 легко видеть, что каноническое вложение $\iota_F : F \to F^{**}$ является изоморфизмом. Если теперь $f : P \oplus Q \to A$ линейный функционал, то $f_P : P \to A,\ p \mapsto f(p, 0)$ и $f_Q : Q \to A,\ q \mapsto f(0, q)$, очевидно линейные функционалы на P и Q соответственно. Положив, $\varphi_{PQ}(f) = (f_P, f_Q)$, мы получим отображение $\varphi_{PQ} : (P \oplus Q)^* \to P^* \oplus Q^*$, которое является изоморфизмом (проверьте!). Тогда $\varphi = \varphi_{P^*Q^*} \circ (\varphi_{PQ}^{-1})^*$, где $(\varphi_{PQ}^{-1})^* : (P \oplus Q)^{**} \to (P^* \oplus Q^*)^*,\ \Phi \mapsto \Phi \circ \varphi_{PQ}^{-1}$, задаёт изоморфизм $(P \oplus Q)^{**} \cong P^{**} \oplus Q^{**}$. С другой стороны имеется стрелка $\iota_P \oplus \iota_Q : P \oplus Q \to P^{**} \oplus Q^{**},\ (p, q) \mapsto (\iota_P(p), \iota_Q(q))$, делающая коммутативной изображённую диаграмму (проверьте!). Но $\varphi \circ \iota_F$ изоморфизм, значит ι_P и ι_Q также изоморфизмы.



□

Пример 3.1.35. Пространство $\mathscr{B}(L, M; S)$ билинейных отображений из $L \times M$ в S канонически изоморфно пространству $\hom(L \otimes M, S)$ линейных отображений из $L \otimes M$ в S. Изоморфизм задаётся соответствием $b \mapsto \tilde{b}$ из определения 3.1.24.

Пример 3.1.36. Существует каноническое вложение $\iota : L^* \otimes M \to \hom(L, M)$ в пространство линейных отображений из L в M, определяемое соотношением $[\iota(\xi \otimes y)](x) = [\xi(x)] \cdot y$, где $\xi \in L^*,\ x \in L,\ y \in M$. В конечномерном случае, ввиду совпадения размерностей, ι изоморфизм.

Пример 3.1.37. Если $\dim L = 1$, то пространство $\hom(L, L)$ канонически изоморфно основному полю $\mathbb{F}$.

Пример 3.1.38. Канонические изоморфизмы ассоциативности и коммутативности из задачи 3.1.28

Замечание 3.1.39. Далее, если не оговорено противное, рассматриваем конечномерные линейные пространства (ЛП) над полем $\mathbb{F}$ характеристики не равной двум.

Задача 3.1.40. Для конечномерных линейных пространств (ЛП) L и M над полем $\mathbb{F}$ имеет место равенство $\dim L \otimes M = \dim L \cdot \dim M$. Причём если e_i базис в L, а s_j базис в M, то векторы вида $e_i \otimes s_j$ составляют базис в $L \otimes M$.

Решение. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ базис в L, а $\{s_1, \ldots, s_k\}$ базис в M. Сначала заметим, что векторы $e_i \otimes s_j$ порождают $L \otimes M$: по задаче о свойствах тензорного произведения любой тензор есть сумма разложимых, а $x \otimes y$ выражается через $e_i \otimes s_j$ в силу билинейности. В частности, $L \otimes M$ конечномерно и $\dim L \otimes M \leq nk$. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathscr{B}(L, M; \mathbb{F}) \to \mathbb{F}^{nk}$, $b \mapsto (b(e_1, s_1), \ldots, b(e_n, s_k))$. Проверьте, что φ изоморфизм. Итак, $\dim \mathscr{B}(L, M; \mathbb{F}) = nk$, но $\mathscr{B}(L, M; \mathbb{F}) \cong \hom(L \otimes M, \mathbb{F}) = (L \otimes M)^*$ и, ввиду конечномерности $L \otimes M$, $\dim(L \otimes M)^* = \dim L \otimes M$. Завершите решение задачи. □

Метаопределение 3.1.41. Бесконечная прямая сумма алгебраических структур (групп, колец, модулей и т.д.) $L = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} L_i$ определяется как множество состоящее из бесконечных финитных последовательностей: $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$, $x_i \in L_i$, $\exists k \in \mathbb{N}_0 : \; p \geq k \implies x_p = 0$ с покомпонентно определёнными операциями ($\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$).

Определение 3.1.42. Для A-модуля L модуль

$$\mathbf{T}_q^p L = \underbrace{L \otimes \cdots \otimes L}_{p} \otimes \underbrace{L^* \otimes \cdots \otimes L^*}_{q} = L^{\otimes p} \otimes L^{*\otimes q}$$

называется *модулем тензоров типа* (p, q), а его элементы *тензорами типа* $(p; q)$ или p раз *контравариантными* и q раз *ковариантными* тензорами. Положим также $\mathbf{T}_0^0 L = A$, $\mathbf{T}L = \bigoplus\limits_{p=0}^{\infty} \mathbf{T}_0^p L$. $\mathbf{T}L$ называется *тензорной алгеброй* модуля L.

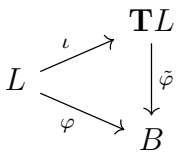
Пример 3.1.43.

1. Векторы (элементы ЛП L) – это тензоры типа $(1; 0)$
2. Линейные функционалы или ковекторы (элементы ЛП L^*) – это тензоры типа $(0; 1)$
3. Линейные операторы – это тензоры типа $(1; 1)$ ввиду отождествления $L \otimes L^* \cong \hom(L, L)$
4. Билинейные формы – это тензоры типа $(0; 2)$ (постройте соответствующий изоморфизм)

Задача 3.1.44. Постройте операцию умножения $\otimes$ на $\mathbf{T}L$, которая продолжит операцию $(x, y) \mapsto x \otimes y$ для $x, y \in L$ так чтобы получилась ассоциативная (некоммутативная) градуированная $\mathbb{F}$-алгебра. Проверьте, что двусторонний идеал J, порождённый элементами вида $x \otimes x$, где $x \in L$, однороден. Градуированная факторалгебра $\mathbf{T}L/J$ называется *внешней алгеброй* ЛП L и обозначается ΛL. Класс элемента $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$ обозначается $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ и называется *p-вектором*, (ассоциативная) операция в ΛL называется *внешним произведением* и обозначается $\wedge$.

Решение. Указание: на разложимых тензорах операция имеет вид $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_q$. □

Задача 3.1.45. Для A-модуля L и A-гомоморфизма $\varphi : L \to B$ в A-алгебру B (ассоциативную с единицей, не обязательно коммутативную) существует единственный гомоморфизм A-алгебр $\tilde{\varphi} : \mathbf{T}L \to B$ такой, что коммутативна диаграмма, где ι отождествление L с $\mathbf{T}^1_0 L$.



Решение. Указание: единственность следует из того, что для $a \in A$: $\tilde{\varphi}(a) = a\tilde{\varphi}(1) = a \cdot 1$ и $A \cup L$ порождает $\mathbf{T}L$ как A-алгебру, для доказательства существования нужно пропустить полилинейные отображения $\tau_n : L^{\times n} \to B$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \varphi(x_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(x_n)$ через $\mathbf{T}^n_0 L$ для всех $n > 0$, положить $\tau_0 : \mathbf{T}^0_0 L \cong A \to B$, $x \mapsto x \cdot 1$ и, наконец, $\tilde{\varphi} : \mathbf{T}L \to B$, $x = x_1 + \ldots + x_k \mapsto \tilde{\tau}_{i_1}(x_1) + \ldots + \tilde{\tau}_{i_k}(x_k)$, где $x_j \in \mathbf{T}^{i_j}_0 L$ однородные компоненты x. □

Задача 3.1.46. Пусть $\Lambda L = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Lambda^p L$. Покажите, что $\Lambda^0 L \cong \mathbb{F}$, $\Lambda^p L = 0$ при $p > n = \dim L$ и $\dim \Lambda^p L = C^p_n$ при $p \leq n$. Если $t_1 \in \Lambda^p L$, $t_2 \in \Lambda^q L$, то $t_1 \wedge t_2 = (-1)^{pq} t_2 \wedge t_1$.

Решение. Во-первых, убедимся, что идеал $J = \bigoplus_{p=0}^{\infty} J_p$ из определения ΛL содержит все разложимые тензоры, имеющие в некоторой своей записи пару повторяющихся векторов в произвольных двух позициях:

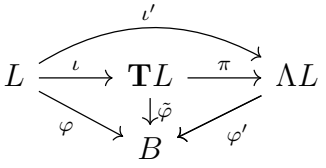
$$\ldots x \otimes y \otimes x \ldots = \ldots (x + y) \otimes (x + y) \otimes x \ldots - \ldots x \otimes x \otimes x \ldots - \ldots y \otimes y \otimes x \ldots - \ldots y \otimes x \otimes x \cdots \in J$$

Завершите рассуждение индукцией. Далее, перестановка любых двух элементов в разложимом тензоре приводит к изменению знака класса эквивалентности: $\overline{\ldots x \otimes \cdots \otimes y \ldots} = -\overline{\ldots y \otimes \cdots \otimes x \ldots}$ (почему?). По индукции любая нечётная перестановка векторов в разложимом тензоре t меняет знак класса $\bar{t}$.

Проверьте, что любой разложимый тензор $t \in \mathbf{T}_0^p L$ при $p > n$ представляется как линейная комбинация разложимых тензоров с повторениями и значит лежит в J, что даёт равенство $\Lambda^p L = 0$.

Пусть $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_p)$ мультииндекс. Обозначим $e_{\mathbf{i}} = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}$. Векторы $e_{\mathbf{i}}$ составляют базис в $\mathbf{T}_0^p L$, когда $\mathbf{i}$ пробегает все мультииндексы длины p с $1 \leq i_k \leq n$. Разобьём эти мультииндексы на три класса: 1. удовлетворяющие условию $i_1 < \dots < i_p$; 2. остальные мультииндексы без повторений; 3. мультииндексы с повторениями. Векторы второго типа могут быть записаны в виде $e_{\sigma\mathbf{i}}$, где $\sigma\mathbf{i} = (\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_p})$, $i_1 < \dots < i_p$ нетождественная перестановка преобразующая возрастающее размещение индексов в текущее. Заменим векторы второго типа на $e_{\sigma\mathbf{i}} - \operatorname{sgn}\sigma \cdot e_{\mathbf{i}}$. Новое семейство векторов снова будет базисом (почему?). Причём векторы второго и третьего типов порождают J_p. Действительно, векторы третьего типа лежат в J_p по доказанному в начале решения, а векторы второго типа – поскольку $\overline{e_{\sigma\mathbf{i}}} = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \overline{e_{\mathbf{i}}}$. Обратно, J_p как ЛП порождается тензорами вида $u \otimes x \otimes x \otimes v$, где u, v – разложимые тензоры (возможно, скаляры). Раскладывая u, x и v по базису e_i, представим такой тензор линейной комбинацией базисных векторов с повторениями (третий тип) и сумм $e_{\sigma\mathbf{i}} + e_{\sigma'\mathbf{i}}$, где перестановки σ и σ' отличаются транспозицией (слагаемые $e_l \otimes e_m + e_m \otimes e_l$, происходящие из $x \otimes x$). Но при $\operatorname{sgn}\sigma' = -\operatorname{sgn}\sigma$ имеем $e_{\sigma\mathbf{i}} + e_{\sigma'\mathbf{i}} = (e_{\sigma\mathbf{i}} - \operatorname{sgn}\sigma \cdot e_{\mathbf{i}}) + (e_{\sigma'\mathbf{i}} - \operatorname{sgn}\sigma' \cdot e_{\mathbf{i}})$ – сумма двух векторов второго типа (возможно, нулевых). Значит классы векторов первого типа составляют базис в $\mathbf{T}_0^p L / J_p$, поскольку прямое дополнение ядра изоморфно отображается на образ. Количество векторов первого типа, очевидно, C_n^p. Завершите решение задачи. □

Задача 3.1.47. Для A-модуля L и A-гомоморфизма $\varphi : L \to B$ в A-алгебру B (ассоциативную, с единицей), удовлетворяющего условию $\forall x \in L : \ (\varphi(x))^2 = 0$, существует единственный гомоморфизм A-алгебр $\varphi' : \Lambda L \to B$ такой, что $\varphi = \varphi' \circ \iota'$, где ι' отождествление L с $\Lambda^1 L$.



Решение. Указание: пропускаем φ через $\mathbf{T}L$, после чего пропускаем полученный гомоморфизм $\tilde{\varphi}$ через проекцию $\pi : \mathbf{T}L \to \Lambda L$, замечая что из условия $(\varphi(x))^2 = 0$ следует $\tilde{\varphi}(\ker\pi) = 0$ (см. диаграмму). Единственность проверяется по аналогии с задачей 3.1.45. □

Задача 3.1.48. Рассмотрим двусторонний идеал I в $\mathbf{T}L$, порождённый элементами вида $x \otimes y - y \otimes x$, где $x, y \in L$. Проверьте, что I однороден. Градуированная факторалгебра $\mathbf{T}L/I$ называется *симметрической*

алгеброй ЛП L и обозначается $SL = \bigoplus_{p=0}^{\infty} S^p L$. Операция в SL обозначается $\cdot$ или опускается. Покажите, что $\dim S^p L = C^p_{n+p-1}$ ($n = \dim L$), а операция коммутативна.

Решение. Указание: воспользовавшись тождеством $x\otimes t\otimes y - y\otimes t\otimes x = (x\otimes t\otimes y - t\otimes x\otimes y) + (t\otimes x\otimes y - t\otimes y\otimes x) + (t\otimes y\otimes x - y\otimes t\otimes x) \in I$ и индукцией проверьте, что $\overline{x_1\otimes\cdots\otimes x_p} = \overline{x_{\sigma_1}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma_p}}$ для любой перестановки σ. Далее, в обозначениях предыдущей задачи разбиваем базис $e_{\mathbf{i}}$ на два класса, относя к первому векторы $e_{\mathbf{i}}$ с неубывающими мультииндексами, а ко второму все остальные. Заменяем векторы $e_{\mathbf{i}}$ второго типа на $e_{\mathbf{i}} - e_{\sigma\mathbf{i}}$, где σ нетождественная перестановка, упорядочивающая индексы в порядке неубывания. Новые векторы второго типа будут базисом в I. □

Задача 3.1.49. Покажите, что пространство $(\mathbf{T}^p_q L)^*$ канонически изоморфно $\mathbf{T}^q_p L$, а также $\mathbf{T}^p_q(L^*)$.

Решение. Указание: постройте канонический изоморфизм $(L\otimes M)^* \cong L^*\otimes M^*$ и используйте пример 3.1.31 □

Задача 3.1.50. Покажите, что для любой пары линейных отображений $f_i : L_i \to M_i,\ i = 1; 2$. Найдётся единственное линейное отображение $f_1\otimes f_2 : L_1\otimes L_2 \to M_1\otimes M_2$, удовлетворяющее условию $(f_1\otimes f_2)(x_1\otimes x_2) = f_1(x_1)\otimes f_2(x_2)$, для всех $x_i \in L_i$. Это отображение называется тензорным произведением отображений f_1 и f_2.

Задача 3.1.51. Используя тензорное произведение отображений, постройте по линейному отображению $f : L \to M$ канонические линейные отображения $\mathbf{T}^p_0 f : \mathbf{T}^p_0 L \to \mathbf{T}^p_0 M$ и $\mathbf{T}f : \mathbf{T}L \to \mathbf{T}M$, удовлетворяющие условиям $\mathbf{T}(1_L) = 1_{\mathbf{T}L},\ \mathbf{T}(f\circ g) = \mathbf{T}f\circ\mathbf{T}g$, то же и для $\mathbf{T}^p_0$ (это означает, что $\mathbf{T},\ \mathbf{T}^p_0$ – функторы).

Задача 3.1.52. Для произвольного линейного пространства L над полем $\mathbb{F}$ постройте канонический изоморфизм $L \cong L\otimes\mathbb{F}$. В частности, $\mathbb{F}\cong\mathbb{F}\otimes\mathbb{F}\cong\mathbb{F}\otimes\mathbb{F}^*\cong\hom(\mathbb{F},\mathbb{F})$.

Задача 3.1.53. Для $p, q > 0,\ i \in \{1,\dots,p\},\ j \in \{1,\dots,q\}$ существует единственное линейное отображение $\varepsilon^j_i : \mathbf{T}^p_q L \to \mathbf{T}^{p-1}_{q-1} L$, которое действует на разложимых тензорах по правилу
$\varepsilon^j_i(x_1\otimes\cdots\otimes x_p\otimes\xi^1\otimes\cdots\otimes\xi^q) = \xi^j(x_i)\cdot x_1\otimes\ldots\widehat{x_i}\ldots\otimes x_p\otimes\xi^1\otimes\ldots\widehat{\xi^j}\ldots\otimes\xi^q$
где $x_k \in L,\ \xi^k \in L^*$, а $\widehat{\ }$, как обычно, обозначает пропуск соответствующего элемента. Отображение ε^j_i называется *свёрткой* по паре индексов i, j тензоров типа $(p; q)$.

Задача 3.1.54. По аналогии с предыдущей задачей, определите свёртку $\varepsilon^{j_1\dots j_k}_{i_1\dots i_k} : \mathbf{T}^p_q L \to \mathbf{T}^{p-k}_{q-k} L$ по двум группам индексов, где $0 < k \le \min(p, q)$.

Задача 3.1.55. Для любого подмножества индексов $\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{1,\dots,p\}$ найдутся однозначно определённые линейные отображения $\tau_{i_1\dots i_k},\ \sigma_{i_1\dots i_k}:\mathbf{T}^p_qL\to\mathbf{T}^p_qL$, действующие на разложимых тензорах по правилу:

$$\tau_{i_1\dots i_k}(x_1\otimes\dots\otimes x_p\otimes\xi^1\otimes\dots\otimes\xi^q)=$$
$$=\sum_{\nu\in S_k}\operatorname{sgn}(\nu)x_1\otimes\dots\otimes\underset{i_1}{x_{\nu_1}}\otimes\dots\otimes\underset{i_k}{x_{\nu_k}}\otimes\dots\otimes x_p\otimes\xi^1\otimes\dots\otimes\xi^q$$
$$\sigma_{i_1\dots i_k}(x_1\otimes\dots\otimes x_p\otimes\xi^1\otimes\dots\otimes\xi^q)=$$
$$=\sum_{\nu\in S_k}x_1\otimes\dots\otimes\underset{i_1}{x_{\nu_1}}\otimes\dots\otimes\underset{i_k}{x_{\nu_k}}\otimes\dots\otimes x_p\otimes\xi^1\otimes\dots\otimes\xi^q$$

где S_k – группа перестановок на множестве $\{i_1,\dots,i_k\}$, а элементы x_{ν_s} расположены в позициях i_s. Отображение $\tau_{i_1\dots i_k}$ называется *альтернированием*, а $\sigma_{i_1\dots i_k}$ симметризацией тензора типа $(p;q)$ в контравариантных позициях $i_1,\dots,i_k$. Альтернирование $\tau^{j_1\dots j_k}$ и симметризация $\sigma^{j_1\dots j_k}$ в ковариантных позициях $j_1,\dots,j_k$ определяются аналогично.

Задача 3.1.56. Положим $\tau=\tau_{1\dots p}:\mathbf{T}^p_0L\to\mathbf{T}^p_0L$ и $\sigma=\sigma_{1\dots p}:\mathbf{T}^p_0L\to\mathbf{T}^p_0L$ – альтернирование и симметрирование по всем индексам в $\mathbf{T}^p_0L$. Показать, что для поля $\mathbb{F}$ нулевой характеристики $\tau(\mathbf{T}^p_0L)$ изоморфно отображается на Λ^pL, а $\sigma(\mathbf{T}^p_0L)$ на S^pL при соответствующих отображениях факторизации.

Решение. Указание: воспользуйтесь задачами 3.1.46 и 3.1.48. □

Определение 3.1.57 (Обозначения Эйнштейна)**.** Примем некоторые соглашения, упрощающие формулы:

1. По повторяющемуся сверху и снизу индексу подразумевается суммирование: $a^ie_i=\sum\limits_{i=1}^n a^ie_i,\ x^iy^jb_{ij}=\sum\limits_{i,j=1}^n x^iy^jb_{ij}$
2. Для базиса $\{e_1,\dots,e_n\}$ пишем просто "базис e_i". Для пары базисов e_i,e'_i в "штрихованном" базисе ставим штрихи на индексы суммирования: $a^{i'}e_{i'}=\sum\limits_{i=1}^n a'^ie'_i$
3. Для обозначения матрицы, обратной к матрице перехода просто переставляем положение штриха, не меняя букв: $e_{i'}=c^i_{i'}e_i\implies e_i=c^{i'}_ie_{i'}$. Штрих внизу – матрица перехода от базиса e_i к базису e'_i, штрих наверху – обратная к ней матрица перехода от e'_i к e_i.

Задача 3.1.58. Если e_i базис в L а e^i дуальный базис в L^* (напомним, что $e^i(e_j)=\delta^i_j$, где δ^i_j – символ Кронекера, равный 1 при $i=j$ и 0 в противном случае), то векторы вида $e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes\dots\otimes e^{j_q}$ составляют базис в $\mathbf{T}^p_qL$. Если $t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ координаты тензора $t\in\mathbf{T}^p_qL$ в этом

базисе, а $t^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q}$ координаты того же тензора в штрихованном базисе, то в обозначениях Эйнштейна имеет место формула:

$$t^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q} = c^{i'_1}_{i_1}\cdot\ldots\cdot c^{i'_p}_{i_p}\cdot c^{j_1}_{j'_1}\cdot\ldots\cdot c^{j_q}_{j'_q}\cdot t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$$

Решение. Прямая подстановка формул с матрицами перехода, с учётом того, что $e^{i'} = c^{i'}_i e^i$, т.е. дуальные базисы e^i, e'^i преобразуются с матрицей обратной матрице перехода между e_i и e'_i. □

Задача 3.1.59. В случае тензоров типа $(1;0), (0;1), (1;1), (0;2)$ получаются хорошо известные из линейной алгебры формулы преобразования векторов, ковекторов, операторов и билинейных форм соответственно.

Задача 3.1.60. Семейство векторов $v_1, \dots, v_k$ в ЛП L является линейно независимым тогда и только тогда, когда $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0$.

Решение. Импликация $\Longrightarrow$ очевидна. Обратно $v_k = a^i v_i,\ i = 1, \dots, k-1$ влечёт $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = a^i v_1 \wedge \ldots \wedge v_{k-1} \wedge v_i = 0$ ввиду того, что во всех слагаемых есть повторяющиеся векторы. □

Задача 3.1.61. Линейно независимые системы векторов $v_1, \dots, v_k$ и $w_1, \dots, w_k$ порождают одно и то же подпространство тогда и только тогда, когда k-векторы $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ и $w_1 \wedge \ldots \wedge w_k$ коллинеарны. Коэффициент коллинеарности равен определителю матрицы коэффициентов в разложении $w_i = a^j_i v_j$.

Задача 3.1.62. Координаты k-вектора $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ в базисе $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k},\ i_1 < \cdots < i_k$ в $\Lambda^k L$, полученном из некоторого базиса e_i в L равны минорам $M^{i_1\dots i_k}_{1\dots k}$ порядка k расположенным в строках с номерами $i_1, \dots, i_k$ и столбцах с номерами $1, \dots, k$ в $n \times k$ матрице (x^i_j) коэффициентов векторов v_j в базисе e_i : $v_j = x^i_j e_i$.

Задача 3.1.63. Построить канонические изоморфизмы $\Lambda^p(L^*) \cong (\Lambda^p L)^* \cong A^p L$, где $A^p L$ пространство *p-форм* на L, т.е. полилинейных функционалов вида $\omega : L^{\times p} = \underbrace{L \times \cdots \times L}_{p} \to \mathbb{F}$, удовлетворяющих условию *кососимметричности*: $\omega(\dots v_i \dots v_j \dots) = -\omega(\dots v_j \dots v_i \dots)$.

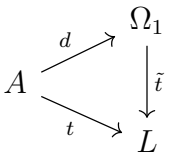
Решение. Указание: пространство p-линейных функционалов изоморфно пространству $(L^{\otimes p})^* \cong L^{*\otimes p}$. При этом линейные функционалы на $L^{\otimes p}$, соответствующие p-формам обнуляются на J_p из определения ΛL, а значит каждой p-форме соответствует линейный функционал на $\Lambda^p L$, т.е. элемент $(\Lambda^p L)^*$. Обратно, для произвольного функционала $\xi : \Lambda^p L \to \mathbb{F}$. Композиция с канонической проекцией $L^{\otimes p} \to \Lambda^p L$ задаёт p-линейный функционал на L, который кососимметричен. Построенная пара отображений суть взаимно обратные изоморфизмы $A^p L \rightleftarrows (\Lambda^p L)^*$.

Если теперь $\xi^1,\dots,\xi^p \in L^*$, то положив $\omega(x_1,\dots,x_p)=\det(c^i_j)$, $c^i_j = \xi^i(x_j)$, мы получим p-форму на L. Соответствие $(\xi_1,\dots,\xi_p)\mapsto\omega$ полилинейно и кососимметрично, а значит индуцирует линейное отображение $\Lambda^p(L^*)\to A^pL$. Остаётся проверить, что образы базисных векторов $e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_p}$, $i_1<\dots<i_p$, полученных из базиса e^i в L^* составляют базис в A^pL, т.е. построенное отображение – изоморфизм. □

Задача 3.1.64. Для линейного отображения $f: L\to M$ найдутся канонические линейные отображения $\Lambda^p f: \Lambda^pL\to\Lambda^pM$, $\Lambda f:\Lambda L\to\Lambda M$ (причём Λf гомоморфизм алгебр) такие, что $\Lambda(1_L)=1_{\Lambda L}$, $\Lambda(f\circ g)=\Lambda f\circ\Lambda g$, то же и для Λ^p (это означает, что Λ,Λ^p – функторы). В частности если $L=M$, то с учётом примера 3.1.37 канонически определено число $\det f=\Lambda^n f\in\hom(\Lambda^nL,\Lambda^nL)\cong\mathbb{F}$.

Определение 3.1.65. Пусть A – k-алгебра. Тогда на $A\otimes_k A$ можно ввести структуру A-алгебры, положив $(a\otimes b)(c\otimes d)=ac\otimes bd$, $c\cdot(a\otimes b)=ca\otimes b$ (проверьте). k-Гомоморфизм $\mu: A\otimes_k A\to A$ умножения является (сюръективным) гомоморфизмом A-алгебр (проверьте), и следовательно, его ядро $\mathscr{K}=\ker\mu$ – идеал в $A\otimes_k A$ и $A\cong(A\otimes_k A)/\mathscr{K}$. A-Модуль $\Omega_1(A)=\mathscr{K}/\mathscr{K}^2$ называется модулем *дифференциалов* алгебры A. Внешняя алгебра $\Omega=\Omega(A)=\Lambda(\Omega_1(A))$ называется *алгеброй дифференциальных форм* на A, а элементы $\Omega_p=\Lambda^p(\Omega_1(A))$ *дифференциальными p-формами.*

Задача 3.1.66. Отображение $d: A\cong\Omega_0(A)\to\Omega_1(A)$, $x\mapsto dx=\overline{1\otimes x-x\otimes 1}$ является k-дифференцированием, образ которого порождает Ω_1 как A-модуль. Элемент dx называется *дифференциалом* элемента x. Для любого дифференцирования $t: A\to L$ со значениями в A-модуле L найдётся единственный A-гомоморфизм $\tilde t:\Omega_1\to L$ такой, что коммутативна диаграмма. Соответствие $t\mapsto\tilde t$ задаёт изоморфизм A-модулей $D(A,L)$ дифференцирований и $\hom_A(\Omega_1,L)$.



Решение. Указание: учитывая, что $(x\otimes1-1\otimes x)(y\otimes1-1\otimes y)\in\mathscr{K}^2$, имеем:

$$y\cdot dx+x\cdot dy=y\cdot\overline{(1\otimes x-x\otimes1)}+x\cdot\overline{(1\otimes y-y\otimes1)}=$$
$$\overline{(y\otimes x-yx\otimes1+x\otimes y-xy\otimes1)+(x\otimes1-1\otimes x)(y\otimes1-1\otimes y)}=$$
$$\overline{1\otimes xy-xy\otimes1}=d(xy).$$

Далее $\sum_i x_i\otimes y_i\in\mathscr{K}\iff\sum_i x_iy_i=0\implies\sum_i x_i\otimes y_i=\sum_i x_i\otimes y_i-(\sum_i x_iy_i)\otimes1=\sum_i x_i(1\otimes y_i-y_i\otimes1)=\sum_i x_i\,dy_i$. Существование $\tilde t$: k-линейное отображение $A\otimes_k A\to L$, $x\otimes y\mapsto x\,t(y)$, обнуляется на $\mathscr{K}^2$ (проверьте, используя правило Лейбница и $t(1)=0$), а потому индуцирует A-гомоморфизм $\tilde t:\Omega_1\to L$ с $\tilde t(dx)=t(x)$. □

Задача 3.1.67. Покомпонентное сложение и операция $(x,y)\cdot(u,v) = (x\wedge u,\ y\wedge u+(-1)^p x\wedge v)$, где $x\in\Omega_p$, продолженная на неоднородные x естественным образом задают на $\Omega\oplus\Omega$ структуру ассоциативного кольца с единицей $(1,0)$. Вложение $\iota : A\to\Omega\oplus\Omega,\ a\mapsto(a,da)$ является гомоморфизмом колец, что задаёт на $\Omega\oplus\Omega$ структуру A-алгебры.

Решение. Выполните формальную проверку аксиом кольца. Далее, $\iota(x)\cdot\iota(y) = (x,dx)\cdot(y,dy) = (x\wedge y, dx\wedge y+(-1)^0 x\wedge dy) = (xy, xdy+ydx) = (xy, d(xy)) = \iota(xy)$, т.е. ι гомоморфизм колец. Для структуры A-алгебры проверьте также центральность образа ι: $(a,da)\cdot(x,y) = (ax,\ da\wedge x+ay) = (x,y)\cdot(a,da)$, поскольку $x\wedge da = (-1)^p\, da\wedge x$ для $x\in\Omega_p$. □

Задача* 3.1.68. Существует единственное антидифференцирование степени 1 градуированной алгебры дифференциальных форм $\Omega=\Omega A$ с нулевым квадратом ($d\circ d=0$), которое продолжает дифференцирование $d:\Omega_0\to\Omega_1$.

Решение. Так как элементы вида dx порождают Ω_1, то элементы вида $dx_1\wedge\ldots\wedge dx_p$ порождают Ω_p. Далее, $d(ydx_1\wedge\ldots\wedge dx_p) = dy\wedge dx_1\wedge\ldots\wedge dx_p$ для любого антидифференцирования с нулевым квадратом, откуда следует единственность продолжения, а также тот факт, что продолжение имеет степень 1.

Рассмотрим k-линейное отображение $\tau : A\otimes_k A\to\Omega,\ x\otimes y\mapsto dx\wedge dy$. Имеем $\tau((a\otimes1-1\otimes a)(x\otimes y)) = \tau(ax\otimes y - x\otimes ay) = d(ax)\wedge dy - dx\wedge d(ay) = da\wedge d(xy)$, откуда по k-линейности для любого $t\in A\otimes_k A$ имеем $\tau((a\otimes 1-1\otimes a)t) = da\wedge d(\mu(t))$, где $\mu : A\otimes_k A\to A$ гомоморфизм умножения, ядро которого мы обозначали $\mathscr{K}$. Поскольку $\mathscr{K}$ порождается как $A\otimes_k A$-модуль элементами вида $a\otimes1-1\otimes a$ (это показано в решении задачи 3.1.66), $\mathscr{K}^2$ порождается элементами вида $s=(a\otimes1-1\otimes a)t$, где $t\in\mathscr{K}$; для них $\tau(s) = da\wedge d(\mu(t)) = 0$, так как $\mu(t)=0$. Значит $\tau(\mathscr{K}^2)=0$ и $\tau|_{\mathscr{K}}$ пропускается через $\Omega_1=\mathscr{K}/\mathscr{K}^2$. Соответствующее отображение обозначим $d_1:\Omega_1\to\Omega$ и положим $h:\Omega_1\to\Omega\oplus\Omega,\ h(x)=(x,d_1x)$, где $\Omega\oplus\Omega$ кольцо из задачи 3.1.67.

Поскольку для $\omega=adx\in\Omega_1$, где $a,x\in A$ и $b\in A$, имеем $d_1(b\omega) = d_1(\overline{ab\otimes x - abx\otimes 1}) = d(ab)\wedge dx - d(abx)\wedge d1 = (adb+bda)\wedge dx$, откуда при $b=1$ получается $d_1\omega = da\wedge dx$ и $d_1(b\omega) = db\wedge\omega + bd_1\omega$, если и $a=1$, то $d_1(dx) = d1\wedge dx = 0$, т.е. $d_1\circ d=0$.

Теперь для $a\in A,\ \omega\in\Omega_1$ имеем $h(a\omega) = (a\omega, d_1(a\omega)) = (a\omega, da\wedge\omega + ad_1\omega)$ и $ah(\omega) = (a,da)\cdot(\omega,d_1\omega) = (a\omega, da\wedge\omega + a\,d_1\omega) = h(a\omega)$, т.е. h – A-гомоморфизм модулей. Далее, $h(\omega)\cdot h(\omega) = (\omega,d_1\omega)\cdot(\omega,d_1\omega) = (\omega\wedge\omega, (d_1\omega)\wedge\omega - \omega\wedge d_1\omega) = (0,0)=0$, поскольку $\omega\in\Omega_1,\ d_1\omega\in\Omega_2$ коммутируют. Т.е. h пропускается через Ω и мы получаем A-гомоморфизм

$\tilde{h} : \Omega \to \Omega \oplus \Omega$. Композиция $\pi_1 \circ \tilde{h}$ этого гомоморфизма с проекцией $\pi_1 : \Omega \oplus \Omega \to \Omega$ на первое слагаемое является гомоморфизмом A-алгебр и тождественна на Ω_1 и $\Omega_0 \cong A$ по построению, а значит и на всей алгебре Ω, которая порождается $\Omega_0 \cup \Omega_1$. Итак, для любой формы $\omega \in \Omega$ можно написать $\tilde{h}(\omega) = (\omega, d\omega)$, где $d : \Omega \to \Omega$, некоторый k-гомоморфизм, продолжающий исходную стрелку $d = d_0 : \Omega_0 \to \Omega_1$, так как da есть вторая компонента элемента $\iota(a) = (a, d_0 a)$. Также очевидно d совпадает с d_1 на Ω_1. Наконец, из того, что $\tilde{h}$ A-гомоморфизм алгебр для любых $\omega \in \Omega_p,\ \omega' \in \Omega$ можно написать $(\omega \wedge \omega', d(\omega \wedge \omega')) = \tilde{h}(\omega \wedge \omega') = \tilde{h}(\omega) \cdot \tilde{h}(\omega') = (\omega, d\omega) \cdot (\omega', d\omega') = (\omega \wedge \omega', d\omega \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge d\omega')$, откуда $d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge d\omega'$, т.е. d – антидифференцирование.

Наконец, для любых $a, x_1, \ldots, x_p \in A$ имеем $d^2(a\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p) = d(da \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p) = d(da) \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p - da \wedge d(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p) = 0$: первое слагаемое нулевое ввиду $d_1 \circ d = 0$, второе – по индукции. По аддитивности $d^2(\omega) = 0$ для любой формы ω, т.е. $d \circ d = 0$. □

Определение 3.1.69. Градуированный k-гомоморфизм $d : \Omega(A) \to \Omega(A)$ с нулевым квадратом, построенный в предыдущей задаче называется *комплексом де Рама* алгебры A и записывается обычно в виде:

$$0 \longrightarrow \Omega_0 \xrightarrow{d} \Omega_1 \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega_n \xrightarrow{d} \ldots$$

Антидифференцирование d называется *оператором внешнего дифференцирования* или *внешним дифференциалом* дифференциальной формы.

Задача 3.1.70. В обозначениях задачи 3.1.66 для любого дифференцирования $x \in D(A) = D(A, A) \cong \Omega_1^* = \hom_A(\Omega_1, A)$ определён A-гомоморфизм $i_x : \Omega_1 \to \Omega_0,\ \omega \mapsto x(\omega)$. Проверить что i_x однозначно продолжается до антидифференцирования на Ω степени -1 с нулевым квадратом.

Решение. В обозначениях решения задачи 3.1.68 изменим структуру A-алгебры на $\Omega \oplus \Omega$, положив $A \to \Omega \oplus \Omega,\ a \mapsto (a, 0)$. Далее, $h : \Omega_1 \to \Omega \oplus \Omega,\ \omega \mapsto (\omega, i_x(\omega))$. Для $a \in A$ имеем $ah(\omega) = (a, 0) \cdot (\omega, i_x(\omega)) = (a\omega, 0\omega + a i_x(\omega)) = (a\omega, i_x(a\omega)) = h(a\omega)$, т.е. h A-гомоморфизм, причём $h(\omega) \cdot h(\omega) = (\omega \wedge \omega, i_x(\omega) \wedge \omega - \omega \wedge i_x(\omega)) = 0$, так как $\omega \in \Omega_1,\ i_x(\omega) \in \Omega_0$. Пропуская h через Ω получаем гомоморфизм A-алгебр $\tilde{h} : \Omega \to \Omega \oplus \Omega$. Завершите решение по аналогии с задачей 3.1.68. Заметим, что полученное продолжение, которое тоже обозначим $i_x : \Omega \to \Omega$ является A-гомоморфизмом и для всех $a \in A : i_x(a) = 0$. □

Определение 3.1.71. Построенное антидифференцирование $i_x : \Omega \to \Omega$ называется *внутренним произведением* дифференцирова-

ния $x \in D(A)$ на дифференциальные формы и обозначается также $i_x(\omega) = x \lrcorner \omega$.

Задача 3.1.72. Отображение $\mathscr{L}_x = d \circ i_x + i_x \circ d : \Omega \to \Omega$ является дифференцированием степени 0 на Ω, т.е. $\mathscr{L}_x(\omega \wedge \eta) = (\mathscr{L}_x\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathscr{L}_x\eta$. Оно называется *производной Ли* дифференциальных форм.

3.1.3 Ориентация и плотности

Задача 3.1.73. Пусть L – вещественное ЛП размерности n, а $\operatorname{Or} L$ – множество функций o на $L^{\times n}$, удовлетворяющих условию

$$o(g(e_1), \dots, g(e_n)) = \operatorname{sgn}(\det g) o(e_1, \dots, e_n),$$

где $g : L \to L$ – произвольный изоморфизм, e_i произвольный базис в L и $o(x_1, \dots, x_n) = 0$ на линейно зависимом семействе x_i. Показать, что $\operatorname{Or} L$ одномерное ЛП относительно поточечно определённых операций и существует ровно два элемента o_1, o_2 удовлетворяющих условию $|o_i(e_1, \dots, e_n)| = 1$ на любом базисе e_i в L. Элементы $o_1, o_2 \in \operatorname{Or} L$ называются *ориентациями* L. Таким образом, любое вещественное ЛП имеет ровно две ориентации.

Определение 3.1.74. Одномерное ЛП $\operatorname{Or} L \otimes \Lambda^n L^*$, где $n = \dim L$ называется *пространством плотностей* на L, а его элементы *плотностями*.

Замечание 3.1.75. Плотности – это в точности формализация понятия объёма параллелепипеда, натянутого на n векторов в n-мерном ЛП, если потребовать, чтобы объём обладал двумя естественными свойствами: 1. при умножении одного из векторов на число, объём умножается на модуль этого числа; 2. при добавлении к одному из векторов линейной комбинации остальных объём не меняется.

Задача 3.1.76. Пространство $\operatorname{Vl} L$ функций $\rho : L^{\times n} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям замечания 3.1.75 канонически изоморфно пространству плотностей. В дальнейшем мы отождествляем $\operatorname{Vl} L$ и $\operatorname{Or} L \otimes \Lambda^n L^*$.

Решение. Из первого условия следует, что если среди векторов есть нулевой, то функции $\rho \in \operatorname{Vl} L$ обращаются в ноль на таком наборе. С учётом второго условия получаем, что функции обращаются в 0 на любом линейно зависимом семействе. Поскольку любой изоморфизм есть композиция элементарных (имеющих в некотором базисе элементарную матрицу), а для элементарного изоморфизма g любого из трёх типов выполнено равенство $\rho(g(e_1), \dots, g(e_n)) = |\det g| \rho(e_1, \dots, e_n)$ (для первых двух типов это в точности условия 1–2 замечания 3.1.75, а транспозиция двух векторов есть композиция преобразований этих типов: $(x, y) \mapsto (x, x + y) \mapsto (-y, x + y) \mapsto (-y, x) \mapsto (y, x)$), то оно выполнено

и для произвольного изоморфизма. Наконец, из тождества $|x| = x \operatorname{sgn} x$ получаем что совпадение значения $\rho \in \operatorname{Vl} L$ и произвольной формы ω на одном базисе влечёт равенство $\rho = \pm|\omega|$, т.е. функции из $\operatorname{Vl} L$ – это, с точностью до знака, модули n-форм. Изоморфизм $\operatorname{Or} L \otimes \Lambda^n L^* \to \operatorname{Vl} L$ задаётся соотношением $o \otimes \omega \mapsto o \cdot \omega$. □

Задача 3.1.77. Имеет место канонический изоморфизм $\operatorname{Or} L \otimes \operatorname{Vl} L \cong \Lambda^n L^*$

Замечание 3.1.78. Плотности и формы соответствуют двум теориям интегрирования на многообразиях – криволинейным интегралам первого и второго рода соответственно в классической терминологии. В евклидовом пространстве существует каноническая плотность, которая равна 1 на некотором (а значит на любом) ортонормированном базисе. Выбор ориентации даёт возможность отождествить плотности и формы.

3.1.4 Сведения из анализа

Напомним некоторые сведения из анализа. Отображение $f : U \to V$ открытых подмножеств $U, V \subset \mathbb{R}^n$ называется *диффеоморфизмом* класса C^k, где $k \in \mathbb{N}$ или $k = \infty$, если оно биективно и k раз непрерывно дифференцируемо вместе с обратным. В случае, если U не является открытым, то диффеоморфизмом (более общо, C^k-гладким отображением) на U будем называть ограничение некоторого диффеоморфизма (гладкого отображения) с открытого множества U' содержащего U. При $k = 0$ мы говорим о гомеоморфизме.

Здесь и далее $\mathbb{R}^n_+ = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \geq 0\}$ – замкнутое полупространство; открытость подмножества в $\mathbb{R}^n_+$ понимается в индуцированной топологии.

Задача 3.1.79. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n_+$ открыто в $\mathbb{R}^n_+$, а $f : A \to \mathbb{R}^m$ – C^1-гладкое отображение, то есть ограничение C^1-гладкого отображения $\hat{f} : A' \to \mathbb{R}^m$, где $A' \supset A$ открыто в $\mathbb{R}^n$. Тогда дифференциал $d\hat{f}_p$ в любой точке $p \in A$ не зависит от выбора продолжения $\hat{f}$. Будем называть его *дифференциалом* f в точке p и обозначать df_p.

Решение. Указание: A содержится в замыкании своей внутренности, а частные производные $\partial_i \hat{f}$ непрерывны и во внутренних точках A определяются значениями f. □

Теорема 3.1.80 (об обратной функции; см. [13, гл. VIII])**.** Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема в открытом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^n$ и имеет ненулевой якобиан в некоторой точке $x \in U$, тогда найдётся

окрестность U' точки x такая, что $f|_{U'} : U' \to f(U')$ – диффеоморфизм; если при этом f класса C^k, то $f|_{U'}$ – C^k-диффеоморфизм.

Теорема 3.1.81 (о гладкой зависимости решений ОДУ; см. [9])**.** Пусть $v : U \to \mathbb{R}^n$ гладкое векторное поле на открытом $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда задача Коши $\dot\gamma = v(\gamma),\ \gamma(0) = x$ имеет единственное максимальное решение $\gamma_x : (\tau_-(x); \tau_+(x)) \to U$, область $\Omega = \{(x,t) \mid \tau_-(x) < t < \tau_+(x)\}$ открыта в $U \times \mathbb{R}$, а отображение $\Omega \to U,\ (x,t) \mapsto \gamma_x(t)$ гладко.

Задача 3.1.82. В условиях теоремы 3.1.81 существует гладкая функция $f : U \to (0; +\infty)$ такая, что все траектории поля fv определены при всех $t \geq 0$.

Решение. Построение f. Ввиду открытости Ω у каждой точки $y \in U$ есть окрестность $V_y \subset U$ и константа $c_y \in (0; 1]$ такие, что $\tau_+ > c_y$ на V_y. Используя задачу 1.8.59, возьмём локально конечное покрытие U открытыми шарами $\{B_i\}$, замыкания которых вписаны в $\{V_y\}$ (фиксируем $V_{y_i} \supset \operatorname{cl} B_i$), перенесём на них шапки h_i, положительные на B_i и нулевые вне, и положим $f = \sum_i c_{y_i} h_i \big/ \sum_i h_i$. Суммы локально конечны, знаменатель положителен, так что f гладкая, а значение $f(y)$ – выпуклая комбинация констант c_{y_i} по тем i, для которых $y \in B_i \subset V_{y_i}$; каждая из них меньше $\tau_+(y)$ и не превосходит 1, поэтому $0 < f < \tau_+$ и $f \leq 1$.

Перепараметризация. Фиксируем $x \in U$; пусть $\gamma = \gamma_x$, $\tau = \tau_+(x)$. Функция $t(s) = \int_0^s du/f(\gamma(u))$ гладка и строго возрастает на $[0; \tau)$; пусть $\sigma : [0; T) \to [0; \tau)$ – обратная к ней функция, $T = \lim_{s\to\tau} t(s)$. Тогда $\sigma'(t) = f(\gamma(\sigma(t)))$, поэтому $\delta = \gamma \circ \sigma$ – решение задачи Коши $\dot\delta = (fv)(\delta),\ \delta(0) = x$ на $[0; T)$, и достаточно проверить $T = +\infty$: тогда максимальное решение для поля fv, продолжающее δ, определено при всех $t \geq 0$. Ввиду единственности максимальных решений $\tau_+(\gamma(u)) = \tau - u$ (сдвиг $t \mapsto \gamma(t + u)$ – максимальное решение с началом $\gamma(u)$), так что $f(\gamma(u)) < \min(\tau - u,\, 1)$ и $T = \int_0^\tau du/f(\gamma(u)) = +\infty$: при $\tau < \infty$ подынтегральная функция не меньше $1/(\tau - u)$, а при $\tau = \infty$ – не меньше 1. □

Кратный *интеграл Римана* $\int_I f$ функции f по замкнутому параллелепипеду $I = [a^1; b^1] \times \cdots \times [a^n; b^n] \subset \mathbb{R}^n$ определяется как предел интегральных сумм по измельчающимся разбиениям I на параллелепипеды – дословно как при $n = 1$; функция называется *интегрируемой*, если этот предел существует. Функцию $f : W \to \mathbb{R}$ с компактным носителем на открытом $W \subset \mathbb{R}^n_+$ назовём интегрируемой, если её продолжение нулём $\hat f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ интегрируемо на некотором (а тогда и на любом, проверьте) параллелепипеде $I \subset \mathbb{R}^n_+$, содержащем $\operatorname{supp} f$; положим $\int_W f = \int_I \hat f$.

Непрерывная f интегрируема: $\hat f$ непрерывна (точка множества $\mathbb{R}^n_+ \setminus W$ отделена от компакта $\operatorname{supp} f$), а непрерывные функции интегрируемы. Следующие две теоремы – стандартные факты анализа, примем их без доказательства (см. [14, гл. XI]).

Теорема 3.1.83 (Фубини)**.** Пусть функция f интегрируема на параллелепипеде $I = [a^1;b^1] \times \dots \times [a^n;b^n] \subset \mathbb{R}^n$ и при каждом $x' = (x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^n) \in I' = \prod_{j\neq i}[a^j;b^j]$ (крышка означает пропуск) существует $g(x') = \int_{a^i}^{b^i} f\,dx^i$. Тогда g интегрируема на I' и

$$\int_I f = \int_{I'} \Big(\int_{a^i}^{b^i} f(x^1, \dots, x^n)\,dx^i \Big)\, dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n.$$

Для непрерывной f внутренний интеграл непрерывен по x' (проверьте), поэтому последовательное применение теоремы Фубини вычисляет $\int_I f$ повторным интегрированием в любом порядке.

Теорема 3.1.84 (о замене переменных)**.** Пусть U, V открыты в $\mathbb{R}^n_+$, $\varphi : U \to V$ – C^1-диффеоморфизм (дифференциал в точках границы определён выше), а непрерывная функция $f : V \to \mathbb{R}$ имеет компактный носитель. Тогда функция $(f \circ \varphi) \cdot |\det d\varphi|$ непрерывна и имеет компактный носитель в U, причём

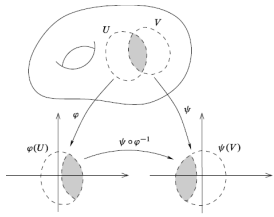
$$\int_V f = \int_U (f \circ \varphi) \cdot |\det d\varphi|.$$

Замечание 3.1.85. Шапки – C^∞-функции, равные 1 на меньшем шаре (кубе), нулю вне большего и строго между 0 и 1 в промежутке, – построены в главе о топологических векторных пространствах, где они понадобились для пространства $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Ниже мы постоянно пользуемся ими для срезки функций и сечений.

Задача 3.1.86 (Лемма Адамара)**.** Пусть $U = U(x) \subset \mathbb{R}^n$ выпуклая открытая окрестность точки x и $f : U \to \mathbb{R}$ C^k-гладкая функция. Тогда существуют C^{k-1}-гладкие функции g_i такие, что$f(y) = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - x_i)g_i(y)$ и $g_i(x) = \partial_i f(x)$, где ∂_i – i-ая частная производная.

Решение. Указание: $f(y)-f(x) = f(ty+(1-t)x)\big|_0^1 = \int\limits_0^1 f'_t(ty+(1-t)x)dt =$ $\int\limits_0^1 \sum_i (y_i - x_i)\partial_i f(ty + (1-t)x)dt = \sum_i (y_i - x_i) \int\limits_0^1 \partial_i f(ty + (1-t)x)dt =$ $\sum_i (y_i - x_i)g_i(y)$, где $g_i(y) = \int\limits_0^1 \partial_i f(ty + (1-t)x)dt$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$. □

3.2 Гладкие многообразия



Определение 3.2.1. *Картой* с *носителем (координатной окрестностью)* U на множестве X называется пара (U, φ), где $U \subset X$, а $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ (*координатное отображение*) – вложение в введённое выше полупространство такое, что образ $\varphi(U)$ открыт в $\mathbb{R}^n_+$. Координаты вектора $\varphi(x)$, где $x \in U$ называются *локальными координатами*. Пишем также (U, x^i). Две карты (U, φ) и (V, ψ) называются C^k*-согласованными*, если $U \cap V = \varnothing$, либо множества $\varphi(U \cap V)$ и $\psi(U \cap V)$ открыты в $\mathbb{R}^n_+$ и $\phi_{UV} = \psi|_{U\cap V} \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U\cap V)} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$, называемое *отображением склейки* – C^k-диффеоморфизм. Множество попарно C^k-согласованных карт, носители которых покрывают X называется C^k*-атласом* на X. Два атласа называются C^k*-эквивалентными*, если их объединение снова C^k-атлас. Объединение всех эквивалентных C^k-атласов или иначе, максимальный C^k-атлас, называется C^k*-структурой* на X. Множество X с фиксированной C^k-структурой на нём называется C^k*-многообразием* размерности n (пишем $\dim X = n$ или коротко X_n). C^0-многообразия называются *топологическими*, при $0 < k \leq \infty$ говорим о C^k*-гладких* или *гладких* многообразиях. Говоря "гладкое многообразие" или просто "многообразие" предполагаем наличие гладкости, необходимой по контексту.

Задача 3.2.2. Покажите, что носители карт C^k-структуры образуют базу топологии на X. Приведите пример нехаусдорфова многообразия.

Замечание 3.2.3. В дальнейшем мы рассматриваем на многообразиях только топологию из задачи 3.2.2.

Задача 3.2.4. Для хаусдорфова топологического многообразия X следующие условия эквивалентны:

1. X – паракомпактно с не более, чем счётным числом компонент связности
2. X второсчётно
3. X компактно исчерпываемо

Решение. Указание: использовать задачи 1.8.43, 1.8.44, 1.8.50, 1.9.15, 1.9.16. Счётность числа компонент связности в импликации (3) $\Longrightarrow$ (1) проверьте отдельно: многообразие локально связно, поэтому компоненты связности открыты; каждый компакт исчерпания покрывается компонентами и потому пересекает лишь конечное их число, а объединение компактов исчерпания есть всё X $\square$

Замечание 3.2.5. В дальнейшем все многообразия предполагаются хаусдорфовыми и удовлетворяющими эквивалентным условиям задачи 3.2.4.

Замечание 3.2.6. Любое C^k-многообразие является также C^m-многообразием для любого $m \leq k$ (почему?). Каждая точка C^k-многообразия имеет окрестность гомеоморфную открытому множеству в $\mathbb{R}^n_+$, которое может иметь непустую границу в $\mathbb{R}^n$, состоящую из точек с нулевой первой координатой. Так само $\mathbb{R}^n_+$, являясь открытым в себе, не является открытым в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3.2.7. *Краем* ∂X C^k-многообразия X называется множество точек $x \in X$, для каждой из которых найдётся карта (U, φ) такая, что $\varphi(x)$ принадлежит границе $\varphi(U)$ в $\mathbb{R}^n$.

Замечание 3.2.8. Если многообразие не имеет края, то в определении можно заменить $\mathbb{R}^n_+$ на $\mathbb{R}^n$. Часто многообразиями называют именно многообразия без края, добавляя "с краем", в случае наличия края.

Задача 3.2.9. Топологические многообразия (с краем) – это в точности хаусдорфовы, второсчётные топологические пространства локально гомеоморфные $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_+$).

Задача 3.2.10. Если $x \in \partial X$ точка края многообразия X, то в любой карте (U, φ) содержащей x точка $\varphi(x)$ лежит на границе множества $\varphi(U)$ в $\mathbb{R}^n$. Край является топологическим инвариантом многообразия: при гомеоморфизмах край переходит в край.

Решение. Указание: примените теорему Брауэра (в случае гладких многообразий достаточно теоремы об обратной функции). □

Замечание 3.2.11. Край многообразия мы обозначаем также, как и топологическую границу подмножества в ТП, хотя это разные понятия, схожесть в том, что в любой карте (U, φ) образ точки края лежит на топологической границе подмножества $\varphi(U)$ в $\mathbb{R}^n$ (но не в $\mathbb{R}^n_+$).

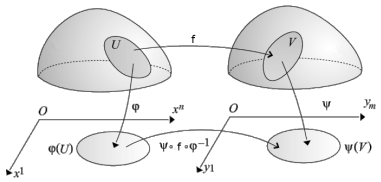
Пример 3.2.12. Приведём примеры многообразий:

1. $\mathbb{R}^n$ может быть покрыто одной картой $\mathscr{A} = \{(U, \varphi)\}$, где $U = \mathbb{R}^n$, а $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ действует по правилу $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (e^{x_1}, \ldots, x_n)$. $\partial\mathbb{R}^n = \varnothing$.
2. $\mathbb{R}^n_+$ покрывается одной картой с тождественным отображением φ. $\partial\mathbb{R}^n_+$ – это гиперплоскость $x_1 = 0$.
3. Открытое подмножество многообразия есть многообразие той же размерности (предъявите атлас).
4. Окружность $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Атлас из четырёх карт: в качестве $U_1, \ldots, U_4$ возьмём множества удовлетворяющие

соответственно четырём условиям $y > 0$, $y < 0$, $x > 0$, $x < 0$. Положим $\varphi_1 : U_1 \to (0;2)$, $\varphi_1(x,y) = x + 1$. Достройте остальные карты и проверьте что получился C^∞-атлас. Постройте C^∞-атлас состоящий из двух карт. $\partial S^1 = \varnothing$.

5. Сфера $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Постройте атласы из шести и из двух карт по аналогии с предыдущим примером. $\partial S^2 = \varnothing$.
6. Конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Покройте одной картой. Край пустой.
7. Круг $B^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Пример карты: $U = \{(x,y) \in B^2 \mid y > 0\}$, $\varphi : U \to \mathbb{R}^2_+$, $\varphi(x,y) = (\sqrt{1-x^2} - y,\, x)$. Достройте атлас. $\partial B^2 = S^1$.
8. Проективное пространство. $\mathbb{R}P^n = \{l \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \dim l = 1\}$ – множество прямых, проходящих через 0 в $\mathbb{R}^{n+1}$. U_i состоит из прямых, направляющий вектор которых имеет ненулевую i-ую координату, где $i = 0; \ldots; n$, $\varphi(l)$ определяется через единственную точку x_l пересечения прямой $l \in U_i$ с аффинной гиперплоскостью $x_i = 1$ – выбрасываем i-ую координату x_l и берём экспоненту первой из оставшихся координат, чтобы попасть в $\mathbb{R}^n_+$. Получается атлас, имеющий $n+1$ карту. Проверьте, что этот атлас задаёт структуру многообразия на $\mathbb{R}P^n$.

Определение 3.2.13. Отображение многообразий $f : X \to Y$ *имеет класс* C^k в точке $x \in X$, если для некоторой пары карт (U,φ) в X и (V,ψ) в Y таких, что $x \in U$, $f(U) \subset V$, отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ имеет класс C^k в точке $\varphi(x)$. Отображение класса C^k во всех точках называется отображением класса C^k или C^k*-гладким*. Как и в случае многообразий мы говорим о гладком отображении, подразумевая наличие гладкости класса C^k, необходимого по контексту. Отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ будем называть *изображением* f в данной паре карт.



Пример 3.2.14. Гладкими являются отображение φ из любой карты (U,φ) гладкого атласа, линейное отображение линейных пространств, вложение открытого подмножества в многообразие.

Задача 3.2.15. Если отображение $f : X \to Y$ в обозначениях определения 3.2.13 имеет класс C^k в точке, то изображение f имеет класс C^k в любой паре карт.

Определение 3.2.16. Пусть $X,\ Y$ – многообразия, $U(x),\ V(x)$ открытые окрестности точки $x \in X$, $f : U(x) \to Y,\ g : V(x) \to Y$ C^1-гладкие в x функции. Скажем, что f и g *касаются в точке* x, если $f(x) = g(x)$ и дифференциалы их изображений в некоторой, а значит и в любой (почему?) паре карт совпадают в точке $\varphi(x)$.

Задача 3.2.17. Отношение «касаются в точке x» из определения 3.2.16 является отношением эквивалентности на множестве функций, определённых в окрестности точки $x \in X_n$ и принимающих в этой точке значение $y \in Y_m$. Сопоставление классу матрицы Якоби его изображения задаёт инъекцию множества $\mathcal{T}(X_n, Y_m, x, y)$ классов эквивалентности в $\hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ и структуру конуса с сокращением на нём, не зависящую от выбора карт. Образ этой инъекции есть всё $\hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ тогда и только тогда, когда $y \notin \partial Y$; в этом случае $\mathcal{T}(X_n, Y_m, x, y)$ – линейное пространство размерности nm.

Решение. Указание: фиксируем пару карт как в определении 3.2.16. И поставим в соответствие каждому классу эквивалентности матрицу Якоби изображения любого элемента класса в точке $\varphi(x)$. Это соответствие очевидно определяет инъекцию из $\mathcal{T}(X, Y, x, y)$ в пространство линейных отображений $\hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{nm}$. Образ замкнут относительно сложения и умножения на неотрицательные скаляры, а сокращение следует из инъективности, – это и даёт конус; независимость от карт – из линейности дифференциалов склеек. которая индуцирует линейную структуру на $\mathcal{T}(X, Y, x, y)$ в случае $y \notin \partial Y$. Эта структура не зависит от выбора карт. Опишем образ. Пусть $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ и $J = dF_{\varphi(x)}$. Если $y \notin \partial Y$, то $\psi(y)$ – внутренняя точка $\mathbb{R}^m_+$, и по любой матрице J строится представитель $F(u) = \psi(y) + J(u - \varphi(x))$: получаем всё $\hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Пусть теперь $y \in \partial Y$, т.е. $F^1 \geq 0$ и $F^1(\varphi(x)) = 0$. При $x \notin \partial X$ точка $\varphi(x)$ – внутренняя точка минимума F^1, откуда $J^1 = 0$, и образ есть подпространство $\{J \mid J^1 = 0\}$ размерности $n(m-1)$ (снова линейное!). При $x \in \partial X$ векторы v с $v^1 = 0$ допустимы в обе стороны, поэтому $J^1(v) = 0$ при $v^1 = 0$, а вдоль e_1 получаем лишь $J^1(e_1) \geq 0$; обратно, все такие J реализуются той же формулой. Здесь образ – собственно конус, и его линейное продолжение имеет размерность $n(m-1)+1$. □

Определение 3.2.18. Через $\mathcal{T}(\widehat{X, Y}, x, y)$ обозначим линейное продолжение конуса $\mathcal{T}(X, Y, x, y)$. При $y \notin \partial Y$ конус уже линеен, и $\mathcal{T}(\widehat{X, Y}, x, y) = \mathcal{T}(X, Y, x, y)$.

Задача 3.2.19. Определите естественное отображение композиции $b : \mathcal{T}(Y, Z, y, z) \times \mathcal{T}(X, Y, x, y) \to \mathcal{T}(X, Z, x, z)$, конусное по каждому ар-

гументу, и покажите, что оно единственным образом продолжается до *билинейного* отображения

$$\hat{b} : \mathscr{T}(\widehat{Y, Z}, y, z) \times \mathscr{T}(\widehat{X, Y}, x, y) \to \mathscr{T}(\widehat{X, Z}, x, z)$$

линейных продолжений 3.2.18.

Решение. Указание: в картах это произведение матриц Якоби, нужно проверить независимость от выбора карт. Продолжение получается двукратным применением задачи 3.1.5. Зафиксировав первый аргумент, получим конусное отображение $\mathscr{T}(X, Y, x, y) \to \mathscr{T}(\widehat{X, Z}, x, z)$ в линейное пространство; продолжим его по второму аргументу. Полученное отображение при каждом фиксированном втором аргументе конусно по первому – продолжим и по нему. Единственность продолжения на каждом шаге (и то, что второй шаг не портит линейность по второму аргументу) следует из $\hat{C} = \iota(C) - \iota(C)$. □

Задача 3.2.20. Многообразием (с краем) является и полупрямая $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (карта – тождественное отображение), так что определение 3.2.16 задаёт множество $\mathscr{T}(\mathbb{R}_{\geq 0}, X, 0, x)$ классов касания кривых $h : U(0) \to X$, $U(0) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, $h(0) = x$. Сопоставление классу кривой производной её изображения в нуле корректно задаёт на $\mathscr{T}(\mathbb{R}_{\geq 0}, X, 0, x)$ структуру конуса с сокращением, не зависящую от выбора карты. Образ конуса в $\hom(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$ – всё $\mathbb{R}^n$ при $x \notin \partial X$ и полупространство $\{v \in \mathbb{R}^n \mid v^1 \geq 0\}$ при $x \in \partial X$.

Решение. Указание: независимость операций от карты следует из линейности дифференциала склейки, сокращение – из инъективности сопоставления. При $x \in \partial X$ кривая $h(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + tv)$ определена при малых $t \geq 0$, если $v^1 \geq 0$; обратно, $(h^1)'(0) = \lim\limits_{t \to 0^+} h^1(t)/t \geq 0$. □

Определение 3.2.21. *Касательным пространством* в точке x многообразия X называется линейное продолжение $T_x X = \mathscr{T}(\widehat{\mathbb{R}_{\geq 0}, X}, 0, x)$ конуса из задачи 3.2.20 (частный случай обозначения 3.2.18), а *кокасательным пространством* в точке x – пространство $T_x^* X = \mathscr{T}(X, \mathbb{R}, x, 0)$ (здесь $\partial \mathbb{R} = \varnothing$, поэтому конус уже линеен).

Замечание 3.2.22. При $x \notin \partial X$ конус $\mathscr{T}(\mathbb{R}_{\geq 0}, X, 0, x)$ – уже линейное пространство, канонически изоморфное $\mathscr{T}(\mathbb{R}, X, 0, x)$ (ограничение кривых с $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}_{\geq 0}$), так что во внутренних точках касательные векторы – в точности классы касания кривых. При $x \in \partial X$ разности классов доставляют и векторы, «направленные вовне края».

Задача 3.2.23. Пространства $\mathscr{T}(X, \mathbb{R}, x, t)$ для различных $t \in \mathbb{R}$ канонически изоморфны между собой; при $x \notin \partial X$ канонически изоморфны между собой и пространства $\mathscr{T}(\mathbb{R}, X, t, x)$ для различных $t \in \mathbb{R}$. Мы

отождествляем их посредством этих изоморфизмов с T^*_xX и T_xX соответственно.

Задача 3.2.24. Для конечномерного ЛП L касательное пространство T_xL в любой точке x канонически изоморфно L.

Решение. Указание: конус $\mathscr{T}(\mathbb{R}_{\geq 0}, L, 0, x)$ здесь уже линеен (задача 3.2.20). Пусть f представитель класса эквивалентности $\overline{f} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}_{\geq 0}, L, 0, x)$, тогда положим $\varphi(\overline{f}) = \lim\limits_{t\to 0+} \frac{f(t)-f(0)}{t} \in L$, φ корректно определено и задаёт требуемый изоморфизм $T_xL \to L$. Предел берётся в единственной линейной топологии в L. □

Задача 3.2.25. $\dim T_xX = \dim T^*_xX = \dim X$. $(T_xX)^*$ канонически изоморфно T^*_xX.

Решение. Первое утверждение следует из задач 3.2.20 и 3.1.4: полупространство (тем более всё $\mathbb{R}^n$) порождает $\mathbb{R}^n$.

Билинейное отображение $\hat{b}$ из задачи 3.2.19 даёт билинейную форму $T^*_xX \times T_xX \to \widehat{\mathscr{T}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}, 0, 0)} \cong \mathbb{R}$,

т.е. является (невырожденной) билинейной формой. Проверьте, что эта форма не зависит от выбора карты. А любая такая невырожденная билинейная форма задаёт изоморфизм $(T_xX)^* \cong T^*_xX$ (почему?). □

Задача 3.2.26. Пусть $f : X \to Y$ C^1-гладка в точке $x \in X$, а $\overline{f}$ – её класс в $\mathscr{T}(X, Y, x, f(x))$. Тогда подстановка $\overline{f}$ в билинейное отображение $\hat{b}$ из задачи 3.2.19 сразу даёт линейное отображение $T_xf = \hat{b}(\,\cdot\,, \overline{f}) : T_xX \to T_{f(x)}Y$,

называемого *дифференциалом* f в точке x и часто обозначаемого df_x или Df_x.

Пусть $TX = \bigcup_{x\in X} T_xX$ – объединение касательных пространств во всех точках X, а $\pi : TX \to X$, $\pi(h) = x$ при $h \in T_xX$ – проекция.

Задача 3.2.27. Постройте гладкую структуру на TX, в которой проекция $\pi : TX \to X$ является гладким отображением. Многообразие TX с этой гладкостью называется *касательным многообразием* к X.

Решение. Указание: для произвольной карты (U, φ) на X положим $TU = \bigcup_{x\in U} T_xX$, $T\varphi : TU \to \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}_+$, $T\varphi(h) = d\varphi_{\pi(h)}(h)$ ($d\varphi_{\pi(h)}$ линеен на T_xX по задаче 3.2.26). Нужно проверить, что карты $(TU_p, T\varphi_p)$ задают C^{k-1}-атлас на TX, для C^k-атласа $\{(U_p, \varphi_p)\}_{p\in I}$. Гладкость проекции в картах (U, φ) и $(TU, T\varphi)$ очевидна. □

Задача 3.2.28. Для C^k-гладкого отображения $f : X \to Y$ отображение $Tf : TX \to TY$, задаваемое правилом $Tf(h) = df_{\pi(h)}(h)$ является C^{k-1}-гладким. Оно называется *дифференциалом* f и обозначается также df или Df.

Определение 3.2.29. *Рангом* гладкого отображения $f : X_n \to Y_m$ в точке $x \in X$ называется размерность образа T_xX при df_x. Отображения постоянного ранга будем называть *плоскими*. Частный случай плоских отображений – это отображения максимального ранга. В случае $n \leq m$ они называются *иммерсии* или *погружения*, в случае $n \geq m$ – *субмерсии*; при $n = m$ отображение максимального ранга – одновременно иммерсия и субмерсия.

Задача 3.2.30. Отображение максимального ранга между многообразиями равной размерности, переводящее край в край ($f(\partial X) \subset \partial Y$), есть локальный диффеоморфизм. Приведите пример локального диффеоморфизма не являющегося диффеоморфизмом.

Задача 3.2.31. Край ∂X многообразия X размерности n (если он не пуст) канонически наделяется структурой гладкого многообразия без края ($\partial(\partial X) = \varnothing$), причём вложение $\iota : \partial X \to X$ есть иммерсия, а $\dim \partial X = n-1$. (Карты края имеют образы, открытые в гиперплоскости $\{x^1 = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$, а не в $\mathbb{R}^{n-1}_+$.)

Задача 3.2.32 (Теорема о воротнике)**.** Край многообразия X обладает окрестностью, диффеоморфной $\partial X \times [0;1)$, причём диффеоморфизм продолжает отображение $x \mapsto (x, 0)$ края.

Решение. Указание: перенесите с карт края поля $\partial/\partial x^1$ и склейте их гладким разбиением единицы в поле v, направленное внутрь во всех точках края, причём перенормированное так, чтобы траектории жили время ≥ 1. Тогда сдвиг $(x, t) \mapsto \gamma_x(t)$ вдоль траекторий, гладкий по совокупности переменных, и задаёт искомый диффеоморфизм $\partial X \times [0;1)$ на окрестность края (оба факта об ОДУ переносятся с $\mathbb{R}^n$ на многообразие покарточно; чтобы применить 3.1.81 в точках края, поле продолжается с карты края на её образ, открытый уже в $\mathbb{R}^n$). Инъективность сдвига не автоматична: траектории, выпущенные из разных точек края, могут столкнуться. Проверьте, что сдвиг – локальный диффеоморфизм в точках $t = 0$, и сузьте время гладкой функцией $\varepsilon : \partial X \to (0;1)$ так, чтобы отображение $(x, t) \mapsto \gamma_x(\varepsilon(x)t)$ стало инъективным (подробности см. [20]). □

Задача* 3.2.33. Если гладкая функция $f : X \to Y$ является плоской с рангом k в некоторой окрестности точки x_0, причём $x_0 \notin \partial X$ и $f(x_0) \notin \partial Y$, то найдутся локальные координаты $(U \ni x_0, x^i)$, $(V \ni f(x_0), y^j)$ в которых $f(x) = (x^1, \ldots, x^k, 0 \ldots 0)$

Решение. Указание: использовать теорему об обратной функции. □

Определение 3.2.34. *(Погружённым) подмногообразием* в X будем называть образ $f(Y)$ произвольной инъективной иммерсии $f : Y \to X$

вместе с гладкостью переносимой с Y посредством f (как?). Подмногообразие называется *регулярным* или *вложенным*, если f гомеоморфизм на образ в топологии, индуцированной из X.

Задача 3.2.35. ∂X регулярное подмногообразие X. Приведите пример нерегулярного подмногообразия.

Решение. Указание: рассмотрите отображение $f : (-2;1) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t^2-1; t^3-t)$. □

Задача 3.2.36. Если $Y_m \subset X_n$ вложенное подмногообразие без края, не задевающее края X ($Y \cap \partial X = \varnothing$), то для каждой точки $y \in Y$ найдётся карта $(U(y), x^i)$ такая, что $x \in Y \cap U(y) \iff x^{m+1} = 0, \dots, x^n = 0$.

Решение. Указание: использовать задачу 3.2.33 □

Задача 3.2.37. На теоретико-множественном декартовом произведении $X_n \times Y_m$ многообразий, хотя бы одно из которых не имеет края ($\partial X = \varnothing$ или $\partial Y = \varnothing$), определите естественную гладкую структуру. Полученное многообразие $X \times Y$ называется декартовым произведением многообразий. Проекции на множители являются субмерсиями, $\partial(X \times Y) = (\partial X \times Y) \cup (X \times \partial Y)$. Все множества вида $X \times \{y\}$ и $\{x\} \times Y$ – вложенные подмногообразия. $\dim X \times Y = n + m$.

Определение 3.2.38. Гладкие функции $f_1 : X_1 \to Y,\ f_2 : X_2 \to Y$ *трансверсальны* в точке $y \in f_1(X_1) \cap f_2(X_2)$, если для любых $x_i \in X_i,\ i = 1;2$ таких, что $f_i(x_i) = y$ выполняется равенство $df_{x_1}(T_{x_1}X_1) + df_{x_2}(T_{x_2}X_2) = T_yY$, т.е. образы касательных пространств в точках x_i порождают касательное пространство в точке y. Под трансверсальностью подмногообразий или подмногообразия и функции понимается трансверсальность с соответствующими отображениями вложений.

Теорема 3.2.39 (о трансверсальном прообразе; см. [20])**.** Пусть $Y'_k \subset Y_m$ – вложенное подмногообразие без края, не задевающее края ($Y' \cap \partial Y = \varnothing$), а гладкая функция $f : X_n \to Y_m$ и её ограничение $f|_{\partial X}$ трансверсальны Y'. Тогда $f^{-1}(Y')$ – вложенное подмногообразие в X размерности $n - m + k$ с краем $f^{-1}(Y') \cap \partial X$.

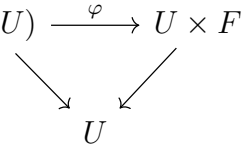
Задача 3.2.40. Если $f : X_n \to Y_m$ и $f|_{\partial X}$ – субмерсии и $y \in f(X) \setminus \partial Y$, то $f^{-1}(y)$ вложенное подмногообразие размерности $n - m$ с краем $f^{-1}(y) \cap \partial X$.

Определение 3.2.41. Гладкую сюръективную субмерсию многообразий $\pi : E \to B$ будем называть *(гладким) расслоением* с *тотальным пространством* E, *базой* B и *проекцией* π. Пример: $\pi : B \times F \to B$, где F – многообразие. Гладкое отображение (диффеоморфизм) $\varphi : E \to E'$ называется морфизмом (изоморфизмом) расслоений $\pi : E \to B$ и $\pi' :$

$E' \to B$, если $\pi = \pi' \circ \varphi$. Если существует изоморфизм $\varphi : E \to B \times F$ (*тривиализация*), то расслоение называется *тривиальным* с *типичным слоем* F. Если база или проекция очевидны из контекста, упоминание о них часто опускают, а проекции разных расслоений иногда обозначают одной и той же буквой π. Множество $E_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in B$ называется *слоем* расслоения в точке x, а гладкое отображение $s : B \to E$, удовлетворяющее условию $\pi \circ s = 1_B$ называется (гладким) *сечением* расслоения.

Задача 3.2.42. Слой гладкого расслоения есть подмногообразие тотального пространства. Любое сечение есть инъективная иммерсия.

Определение 3.2.43. Локально тривиальное расслоение $\pi : E \to B$, называется *локально тривиальным (гладким) расслоением* со *слоем* F и *структурной группой* G, где F некоторое многообразие, а G подгруппа группы диффеоморфизмов F, если найдётся семейство $\mathscr{A} = \{(U_p, \varphi_p)\}_{p\in I}$ (*тривиализующий атлас*) такое, что $\cup_{p\in I} U_p = B$, для $(U, \varphi) \in \mathscr{A}$, φ – тривиализация расслоения $\pi^{-1}(U)$ (см. диаграмму), а для $(V, \psi) \in \mathscr{A}$ и $x \in W = U \cap V$ диффеоморфизм $\tau : F \to F$, однозначно определяемый соотношением $(x, \tau(h)) = \psi(\varphi^{-1}(x, h))$ является элементом группы G. Если $F = \mathbb{R}^n$, а $G = GL(n)$ – группа невырожденных матриц, то расслоение называется *(гладким) векторным расслоением*. Далее «расслоение» означает «гладкое векторное расслоение».



Задача 3.2.44. TX и T^*X с каноническими проекциями наделяются естественной структурой векторного расслоения

Метатеорема 3.2.45. Любая (гладкая в некотором смысле) естественная конструкция для линейных пространств может быть перенесена в расслоения. Подробнее: если есть естественный способ построить по произвольным конечномерным линейным пространствам $L_1, \ldots, L_k$ линейное пространство $\Phi(L_1, \ldots, L_k)$, то по произвольным векторным расслоениям $E_1, \ldots, E_k$ над базой B можно построить расслоение $\Phi(E_1, \ldots, E_k)$ над той же базой с тотальным пространством равным объединению $\bigcup_{x\in B} \Phi(E_{1_x}, \ldots, E_{k_x})$.

Замечание 3.2.46. Метатеорема 3.2.45 может быть точно сформулирована в теории категорий с использованием понятия *гладкого k-местного функтора* в категории конечномерных линейных пространств (см. [2]). Следующая задача иллюстрирует метатеорему.

Задача 3.2.47. Постройте расслоения для следующих естественных операций с линейными пространствами: взятия прямой суммы $L_1 \oplus L_2$,

тензорного произведения $L_1 \otimes L_2$, сопряжённого пространства L^*, пространства линейных отображений $\hom(L_1, L_2)$, пространства тензоров типа (p, q) $\mathbf{T}^p_q L$, пространства p-векторов $\Lambda^p L$, пространства p-форм $\Lambda^p L^*$, пространства ориентаций $\operatorname{Or} L$, пространства плотностей $\operatorname{Vl} L$.

Определение 3.2.48. Сечения расслоений TX, T^*X, $\mathbf{T}^p_q(TX)$, $\Lambda^p(T^*X)$, $\operatorname{Vl}(TX)$ называются соответственно *векторными, ковекторными, тензорными полями*, *дифференциальными p-формами* и *плотностями* на X. Ковекторные поля – это в точности дифференциальные 1-формы. Множество $\mathscr{F}(X)$ гладких вещественнозначных функций, отождествляемое с множеством сечений тривиального расслоения $X \times \mathbb{R} \to X$ и с множеством дифференциальных 0-форм, является $\mathbb{R}$-алгеброй относительно поточечно определённых операций, а множество $\mathscr{E}(X)$ сечений расслоения $E \to X$ наделяется структурой $\mathscr{F}(X)$-модуля. Модули дифференциальных p-форм будем обозначать $\Omega_p = \Omega_p(X)$. Обозначим $\Omega(X) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Omega_p(X)$, $n = \dim X$ градуированный модуль дифференциальных форм на X. Модуль векторных полей (сечений TX) будем обозначать $\mathscr{T}X$.

Замечание 3.2.49. Операции свёртки или подстановки аргументов в (поли)линейные функционалы, выполняясь поточечно в слоях векторных расслоений, задают аналогичные операции на модулях сечений. Например, если $\omega \in \Omega_p$, а $v_1, \ldots, v_p$ векторные поля на X, то соотношение $x \mapsto \omega_x(v_{1_x}, \ldots, v_{p_x})$ определяет гладкую (проверьте) функцию $X \to \mathbb{R}$, где $\omega_x = \omega(x)$, $v_{i_x} = v_i(x)$, так как $\omega_x \in \Lambda^p(T^*_x X) \cong A^p(T_x X)$. Мы пишем $\omega(v_1, \ldots, v_p)$ и говорим о подстановке векторных полей в дифференциальную p-форму.

Другой пример, если $f : X \to \mathbb{R}$ гладкая функция, то $df_x : T_x X \to T_{f(x)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ линейная функция на $T_x X$, т.е. элемент $T^*_x X$. Значит, df определяет сечение расслоения T^*X или дифференциальную 1-форму. Каждому векторному полю v соответствует $\mathbb{R}$-линейное отображение $\partial_v : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(X)$, действующее по правилу $\partial_v(f) = df(v)$

Задача 3.2.50. Отображение ∂_v является дифференцированием $\mathbb{R}$-алгебры $\mathscr{F}(X)$

Определение 3.2.51. Мы говорим о *гладком (компактном)* разбиении единицы (*гладко (компактно)* нумерируемом покрытии) на многообразии X, если входящие в соответствующее определение функции гладки (имеют компактный носитель). *(Открытыми) шарами* на многообразии X будем называть прообразы (открытых) шаров в $\mathbb{R}^n$ при координатных

отображениях. Открытые шары составляют базу топологии многообразий без края.

Задача 3.2.52. Любое открытое покрытие α многообразия X гладко нумерируемо, и в него можно вписать гладко компактно нумерируемое открытое покрытие.

Решение. Указание: гладкое компактное разбиение единицы построим для вписанного покрытия из шаров; переиндексация по задаче 1.8.53 даёт гладкую нумерируемость самого α (компактность носителей при суммировании может теряться).

В случае $\partial X = \varnothing$ используя задачу 1.8.59 возьмём локально конечное покрытие β из открытых шаров, множество замыканий которых вписано в α и перенесём с помощью координатных отображений шапки с шаров в $\mathbb{R}^n$ на шары из β, продолжив их нулем вне замыкания шара. Обозначим это семейство функций $\{f_B\}_{B\in\beta}$. Ввиду локальной конечности, определена функция $f = \sum_{B\in\beta} f_B$, причем ввиду того, что внутренности носителей функций покрывают X, $f > 0$ всюду на X. Откуда получаем, что семейство $g_B = f_B/f$ является гладким разбиением единицы, подчинённым α. Рассмотрите случай многообразия с краем. □

Задача 3.2.53 (Свойство локальности дифференциальных операторов)**.** Пусть $D \in D_n(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ ДО, где $\mathscr{E}_i$ модули сечений расслоений $\pi_i : E_i \to B$. Тогда если сечения $s, t \in \mathscr{E}_1$ совпадают в некоторой окрестности U_x точки $x \in B$, то сечения Ds и Dt также совпадают в некоторой окрестности V_x точки x.

Решение. Ввиду аддитивности D достаточно проверить, что если $s = 0$ в U_x, то найдётся V_x такая, что $Ds = 0$ на V_x. Перенесём из $\mathbb{R}^n$ посредством координат в некоторой окрестности x какую-нибудь шапку так, чтобы полученная функция f была равна нулю вне шара, содержащегося с замыканием в U_x (как?). Тогда $fs = 0$ и $s = s - fs = (1 - f)s$. Далее индукция по n. Утверждение очевидно для $n < 0$. По предположению индукции найдётся окрестность W_x такая, что на W_x : $0 = [D, 1 - f]s = D((1-f)s) - (1-f)Ds$, откуда $D((1-f)s) = Ds = (1-f)Ds$, т.е. $fDs = 0$, но $f = 1$ на некотором шаре V_x, т.е. $Ds = 0$ на V_x. □

Замечание 3.2.54. Оказывается свойство локальности является характеристическим свойством ДО, т.е. любой линейный оператор на сечениях гладких векторных расслоений, обладающий свойством локальности, локально является ДО. Это теорема Петре (1959).

Задача 3.2.55. На C^∞-многообразии X модули векторных полей $\mathscr{T}X$ и $\mathbb{R}$-дифференцирований алгебры гладких функций $D(\mathscr{F}X)$ канонически изоморфны.

Решение. В обозначениях задачи 3.2.50 соответствие $\iota : v \mapsto \partial_v$ задаёт гомоморфизм модулей. Для построения обратного гомоморфизма рассмотрим сперва ситуацию $X = B_q(x)$ открытого шара в $\mathbb{R}^n$. Пусть D дифференцирование на $\mathscr{F}X$. Применив лемму Адамара можем написать $(Df)(y) = D(f(x)+\sum_i(y_i-x_i)g_i(y)) = \sum_i g_i(y)D(y_i)+\sum_i(y_i-x_i)(Dg_i)(y)$. Откуда $(Df)(x) = \sum_i a_i(x)\frac{\partial f}{\partial y_i}(x)$, где a_i значения D на проекциях на i-ую координату, так как согласно лемме Адамара $g_i(x) = \frac{\partial f}{\partial y_i}(x)$. Мы получили, что дифференцированию D соответствует векторное поле $v = (a_1, \ldots, a_n)$ к тому же $Df = df(v)$ согласно выражению дифференциала в координатах, т.е. $D = \partial_v$ и ι биективно.

В общем случае возьмём гладкое разбиение единицы с носителями на шарах $\{f_i\}_{i\in I}$. Если $D \in D(\mathscr{F}X)$, можно написать $D(f) = \sum_{i\in I} f_iD(f)$, для любой $f \in \mathscr{F}X$. Заметим, что $(f_iD(f))(x) = 0$ для всех $x \notin \operatorname{supp} f_i$. Дифференцирование f_iD является ДО первого порядка (задача 3.1.21) и потому обладает свойством локальности. Это позволяет индуцировать на открытом шаре $B \supset \operatorname{supp} f_i$ дифференцирование $\tilde{D}_i \in D(\mathscr{F}B)$: для $g \in \mathscr{F}B$ и $y \in B$ положим $\tilde{D}_i(g)(y) = (f_iD)(\hat{g})(y)$, где $\hat{g} \in \mathscr{F}X$ – любая функция, совпадающая с g в окрестности точки y (например, произведение g на шапку, продолженное нулём; значение не зависит от выбора $\hat{g}$ в силу локальности). По доказанному $\tilde{D}_i$ задаётся векторным полем на B; продолжив его нулём вне $\operatorname{supp} f_i$,

мы получим векторное поле V_i, для которого $f_iD(f) = V_if$ на всём X. Итак, искомое векторное поле $V = \sum_i V_i$, где сумма корректно определена. □

Замечание 3.2.56. Ниже разберём важный результат дифференциальной топологии – *слабую теорему Уитни*: любое гладкое многообразие может быть вложено в $\mathbb{R}^N$ при достаточно большом N. Под *вложением* X в $\mathbb{R}^N$ понимаем инъективную иммерсию, являющуюся гомеоморфизмом на образ, т.е. реализующую X как вложенное подмногообразие $\mathbb{R}^N$.

Задача 3.2.57. Компактное гладкое n-многообразие X без края может быть вложено в $\mathbb{R}^N$.

Решение. Ввиду компактности выделим конечное покрытие X картами $(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_k, \varphi_k)$; построим вложение при $N = k(n + 1)$. Возьмём гладкое разбиение единицы $\{\rho_i\}_{i=1}^k$, подчинённое покрытию $\{U_i\}$, и положим

$$F = (\rho_1\varphi_1,\ \rho_1,\ \ldots,\ \rho_k\varphi_k,\ \rho_k) : X \to \mathbb{R}^{k(n+1)},$$

где $\rho_i\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ продолжено нулём вне $\operatorname{supp}\rho_i$.

F иммерсия: пусть $v \in T_xX$ и $dF_x(v) = 0$. Найдётся i с $\rho_i(x) > 0$. Зануление дифференциала компоненты ρ_i даёт $d\rho_i(v) = 0$, после чего

зануление дифференциала компоненты $\rho_i\varphi_i$ по правилу Лейбница даёт $\rho_i(x)\,d(\varphi_i)_x(v) = 0$. Но карта φ_i – диффеоморфизм на образ, откуда $v = 0$.

F инъективно: пусть $F(x) = F(y)$ и $\rho_i(x) > 0$. Из равенства компонент ρ_i имеем $\rho_i(y) = \rho_i(x) > 0$, так что $x, y \in U_i$; из равенства компонент $\rho_i\varphi_i$ тогда $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ и $x = y$.

Наконец, F – непрерывная инъекция компакта в хаусдорфово ТП, поэтому собственная, и по критерию вложения – гомеоморфизм на образ. □

В некомпактном случае карт бесконечно много, и роль числа k возьмёт на себя кратность покрытия.

Задача 3.2.58 (О раскраске покрытия)**.** Пусть $\alpha = \{U_i\}_{i\in I}$ – нумерируемое открытое покрытие ТП X кратности $\operatorname{ord}\alpha \le n+1$. Тогда в α можно вписать открытое покрытие, распадающееся на $n+1$ семейство попарно непересекающихся множеств.

Решение. Пусть $\{\rho_i\}_{i\in I}$ – разбиение единицы, подчинённое α. Каждому конечному $S \subset I$ сопоставим открытое (проверьте, используя локальную конечность носителей) множество

$$V_S = \{x \in X \mid \forall i \in S:\ \rho_i(x) > 0 \text{ и } \forall i \in S\ \forall j \in I \setminus S:\ \rho_i(x) > \rho_j(x)\}.$$

Если $|S| = |S'|$, но $S \ne S'$, то $V_S \cap V_{S'} = \varnothing$: взяв $i \in S \setminus S'$ и $j \in S' \setminus S$, в точках V_S имеем $\rho_i > \rho_j$, а в точках $V_{S'}$ – наоборот. При $i \in S$ верно $V_S \subset \operatorname{supp}\rho_i \subset U_i$, т.е. семейство всех V_S вписано в α. Наконец, для любого x множество $S_x = \{i \mid \rho_i(x) > 0\}$ непусто (сумма ρ_i равна 1), содержит не более $n+1$ элементов (носители вписаны в α, а $\operatorname{ord}\alpha \le n+1$), и $x \in V_{S_x}$. Итак, семейства $\beta_k = \{V_S \mid |S| = k+1\}$, $k = 0, \dots, n$, дают искомое покрытие. □

Задача 3.2.59. На любом гладком многообразии X существует гладкая собственная функция $h : X \to \mathbb{R}$.

Решение. Указание: многообразие компактно исчерпываемо; повторите решение задачи 1.8.55, взяв гладкое разбиение единицы. □

Задача 3.2.60 (Слабая теорема Уитни о вложении)**.** Любое гладкое многообразие X размерности n без края может быть вложено в $\mathbb{R}^N$ для достаточно большого N.

Решение. Построим вложение в $\mathbb{R}^{(n+1)^2+1}$. По замечанию из теории размерности впишем в покрытие X картами открытое покрытие кратности $\le n+1$; оно гладко нумерируемо, и задача 3.2.58 позволяет вписать ещё одно покрытие $\gamma = \gamma_0 \cup \dots \cup \gamma_n$, распадающееся на $n+1$ семейство попарно непересекающихся множеств. Каждый элемент $W \in \gamma$ лежит в области

некоторой карты, ограничение которой даёт карту $\varphi_W : W \to \mathbb{R}^n$. Скомпоновав φ_W с диффеоморфизмом $\mathbb{R}^n$ на шар радиуса $1/2$ и подходящим сдвигом (покрытие γ счётно ввиду второсчётности X), добьёмся того, чтобы образы $\varphi_W(W)$ были попарно дизъюнктны.

Возьмём гладкое разбиение единицы $\{\rho_W\}_{W\in\gamma}$, подчинённое γ (задача 3.2.52), гладкую собственную функцию h из задачи 3.2.59 и положим

$$\Psi_k = \sum_{W\in\gamma_k} \rho_W\varphi_W : X \to \mathbb{R}^n, \qquad \Lambda_k = \sum_{W\in\gamma_k} \rho_W : X \to \mathbb{R}, \qquad k = 0, \dots, n,$$

$$F = (\Psi_0, \Lambda_0, \dots, \Psi_n, \Lambda_n, h) : X \to \mathbb{R}^{(n+1)^2+1}.$$

Суммы корректно определены и гладки ввиду локальной конечности носителей. Так как элементы γ_k попарно не пересекаются, при $x \in W \in \gamma_k$ на всём W отлично от нуля не более одного слагаемого: $(\Psi_k, \Lambda_k) = (\rho_W\varphi_W, \rho_W)$ на W; в частности $\Lambda_k(x) = \rho_W(x)$.

Пусть $v \in T_xX$ и $dF_x(v) = 0$. Найдутся k и $W \in \gamma_k$ с $\rho_W(x) > 0$; повторив выкладку из задачи 3.2.57 для пары (Ψ_k, Λ_k), получим $v = 0$, т.е. F иммерсия. Пусть теперь $F(x) = F(y)$ и $\rho_W(x) > 0$ для некоторого $W \in \gamma_k$. Из $\Lambda_k(y) = \Lambda_k(x) > 0$ найдётся $W' \in \gamma_k$ с $\rho_{W'}(y) = \Lambda_k(y) = \rho_W(x) > 0$. Тогда $\rho_W(x)\varphi_W(x) = \Psi_k(x) = \Psi_k(y) = \rho_{W'}(y)\varphi_{W'}(y)$, откуда $\varphi_W(x) = \varphi_{W'}(y)$, что ввиду дизъюнктности образов карт возможно лишь при $W = W'$. Теперь инъективность φ_W даёт $x = y$.

Наконец, представив $F = (G, h)$ и применив задачу 1.8.22 к собственной h, получаем, что F собственно, а тогда по критерию вложения F – гомеоморфизм на образ. Итак, F – искомое вложение при $N = (n+1)^2 + 1$. □

Замечание 3.2.61. Размерность $N = (n+1)^2 + 1$ далеко не оптимальна. Из теоремы Сарда о множестве критических значений сравнительно просто выводится вложимость в $\mathbb{R}^{2n+1}$ (см. [18]), а *сильная теорема Уитни* (1944) даёт вложение n-многообразия в $\mathbb{R}^{2n}$ и иммерсию в $\mathbb{R}^{2n-1}$; эти результаты остаются за рамками книги. Отметим, что приём «добавить собственную координату», обеспечивший топологичность вложения, уже встречался в чисто топологической ситуации в задаче 1.8.56.

Осталось разобраться с многообразиями с краем. Начнём с полезной самой по себе конструкции *удвоения*, избавляющей от края.

Определение 3.2.62. *Удвоением* многообразия X с краем называется ТП DX, полученное из $X \times \{0; 1\}$ склейкой соответственных точек края, т.е. фактормножество по отношению $(x, 0) \sim (x, 1),\ x \in \partial X$, наделённое спуском топологии вдоль проекции.

Задача 3.2.63. Удвоение DX гладкого n-многообразия X с краем является топологическим n-многообразием без края, причём хаусдорфовым, второсчётным и, если X компактно, компактным. На DX существует гладкая структура, индуцирующая исходную гладкость на обеих копиях X.

Решение. Хаусдорфовость, второсчётность и компактность проверьте непосредственно. Внутренние точки копий покрыты картами самих копий; для точки края возьмём карту (U, φ), $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$, и на склейке $U \times \{0;1\}$ зададим $\psi[y,0] = \varphi(y)$, $\psi[y,1] = r\varphi(y)$, где r – отражение первой координаты. Итак, DX – топологическое многообразие без края. Однако отражённые карты, вообще говоря, гладко не согласованы: производные перехода при подходе к краю с двух сторон различаются знаками (проверьте). Гладкий атлас дают внутренние карты копий вместе с произведениями карт $(n-1)$-многообразия ∂X на интервал $(-1;1)$: воротники обеих копий склеиваются в гомеоморфизм окрестности склеенного края на $\partial X \times (-1;1)$. □

Задача 3.2.64. Гладкое многообразие X с краем также может быть вложено в $\mathbb{R}^N$ при достаточно большом N.

Решение. Указание: есть два пути. Либо проверьте, что решения задач 3.2.58, 3.2.59 и 3.2.60 дословно проходят для карт со значениями в $\mathbb{R}^n_+$, либо вложите копию X в удвоение DX (задача 3.2.63) и примените к DX – многообразию без края – задачу 3.2.60, заметив, что ограничение вложения на копию X остаётся вложением. □

3.3 Интегрирование на многообразиях

В этом разделе все многообразия предполагаются C^∞-гладкими, так как внешний дифференциал понижает класс гладкости.

3.3.1 Внешний дифференциал

Определим структуру $\mathscr{F}(X)$-алгебры на модуле $\Omega(X) = \bigoplus_p \Omega_p(X)$ дифференциальных форм на многообразии X.

Задача 3.3.1. Поточечное внешнее произведение $(\omega \wedge \eta)_x = \omega_x \wedge \eta_x$, где $\omega_x \in \Lambda^p(T^*_x X)$, определяет (корректно, т.е. с сохранением гладкости) операцию на $\Omega(X)$, превращающую его в градуированную ассоциативную $\mathscr{F}(X)$-алгебру, в которой $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq}\eta \wedge \omega$ для $\omega \in \Omega_p(X)$, $\eta \in \Omega_q(X)$. В частности, $df \wedge dg = -dg \wedge df$ для $f, g \in \mathscr{F}(X)$, а $\Omega_p(X) = 0$ при $p > \dim X$.

Решение. Указание: в карте координаты произведения – полиномы от координат сомножителей, так что гладкость сохраняется; тождества проверяются поточечно во внешней алгебре слоя. □

Замечание 3.3.2. Ниже мы хотим показать связь между алгеброй дифференциальных форм $\Omega(X)$ и алгебраическим комплексом де Рама алгебры $A = \mathscr{F}(X)$. В традиционном изложении этого обычно не делают. Но этот подход показывает алгебраическую природу внешнего дифференциала. Подробности можно найти в книге [3], авторство которой принадлежит группе российских математиков, работавших над математическими основами квантовой теории поля и теории нелинейных дифференциальных уравнений под руководством А.М. Виноградова и взявших себе коллективный псевдоним Джет Неструев (по аналогии с Никола Бурбаки).

Определение 3.3.3. Пусть $A = \mathscr{F}(X)$ – алгебра гладких функций на многообразии X, а P – A-модуль. Обозначим $\mu_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$ (максимальный) идеал точки $x \in X$. *Значением* элемента $p \in P$ в точке x называется его класс $p(x) = p + \mu_x P$ в фактормодуле $P/\mu_x P$. Модуль P называется *геометрическим*, если всякий ненулевой элемент имеет ненулевое значение хотя бы в одной точке: $\bigcap_{x\in X} \mu_x P = 0$. Фактормодуль $P/\bigcap_{x\in X} \mu_x P$ называется *геометризацией* модуля P.

Задача 3.3.4. Модуль $\mathscr{E}(X)$ сечений векторного расслоения $\pi : E \to X$ геометричен, причём соответствие $s + \mu_x\mathscr{E}(X) \mapsto s(x)$ задаёт изоморфизм $\mathscr{E}(X)/\mu_x\mathscr{E}(X) \cong E_x$, т.е. значение сечения в смысле определения

3.3.3 – это его обычное значение в слое. В частности, модули форм $\Omega_p(X)$ геометричны.

Решение. Указание: сечения из $\mu_x\mathscr{E}(X)$ обнуляются в точке x, так что соответствие корректно определено, а из его инъективности сразу следует геометричность. Сюръективность: вектор слоя продолжается до сечения умножением на шапку в тривиализующей карте. Инъективность: пусть $s(x)=0$; взяв шапку f, равную 1 вблизи x, с носителем в тривиализующей окрестности, запишем $s=(1-f)s+fs$, где $1-f\in\mu_x$, а $fs=\sum_i \hat a_i\hat s_i$: здесь $s=\sum_i a_i s_i$ – разложение по локальному базису сечений, $\hat s_i$ – продолженные нулём сечения fs_i, а $\hat a_i$ – функции a_i, срезанные ещё одной шапкой (равной 1 на $\operatorname{supp} f$) и продолженные нулём, причём $\hat a_i(x)=a_i(x)=0$, поскольку $s(x)=0$, а $s_i(x)$ – базис слоя. □

Задача 3.3.5. Дифференцирование $f\mapsto df$ алгебры $A=\mathscr{F}(X)$ со значениями в A-модуле $\Omega_1(X)$ (дифференциал как 1-форма) задаёт по универсальным свойствам модуля дифференциалов и внешней алгебры гомоморфизм градуированных A-алгебр $\varkappa:\Omega(A)\to\Omega(X)$, действующий по правилу $\varkappa(a_0\,da_1\wedge\ldots\wedge da_p)=a_0\,da_1\wedge\ldots\wedge da_p$ (слева – элемент $\Omega(A)$, справа – гладкая форма). Гомоморфизм $\varkappa$ сюръективен.

Решение. Правило Лейбница для d на $\mathscr{F}(X)$ выполняется поточечно, поэтому по задаче 3.1.66 получаем A-гомоморфизм $\varkappa_1:\Omega_1(A)\to\Omega_1(X)$, $\varkappa_1(da)=da$. Квадрат любой гладкой 1-формы в $\Omega(X)$ нулевой (антикоммутативность), поэтому $\varkappa_1$ продолжается до гомоморфизма A-алгебр $\varkappa:\Lambda(\Omega_1(A))=\Omega(A)\to\Omega(X)$.

Сюръективность. Пусть $u^1,\ldots,u^N$ – координатные функции вложения $X\to\mathbb{R}^N$ (случай края включается). Инъективность его дифференциала означает, что ковекторы du^i_x порождают T^*_xX в каждой точке x. Для n-элементного $I\subset\{1,\ldots,N\}$ обозначим V_I открытое (миноры непрерывны) множество точек, где $(du^i)_{i\in I}$ – базис кокасательного слоя; конечное семейство $\{V_I\}$ покрывает X. На V_I всякая форма $\omega\in\Omega_p(X)$ записывается в виде $\sum_J a_J\,du^{j_1}\wedge\ldots\wedge du^{j_p}$ (сумма по p-элементным $J=\{j_1<\cdots<j_p\}\subset I$) с гладкими – по правилу Крамера – коэффициентами a_J. Взяв гладкое разбиение единицы $\{\rho_I\}$, подчинённое конечному покрытию $\{V_I\}$, получаем конечную сумму $\omega=\sum_{I,J}(\rho_I a_J)\,du^{j_1}\wedge\ldots\wedge du^{j_p}$ (срезанные коэффициенты $\rho_I a_J$ продолжены нулём вне V_I), все слагаемые которой лежат в образе $\varkappa$. □

Задача 3.3.6. $\ker\varkappa=\bigcap_{x\in X}\mu_x\Omega(A)$, так что алгебра гладких форм $\Omega(X)$ – это геометризация алгебры $\Omega(A)$.

Решение. Включение $\supset$: $\varkappa$ как A-гомоморфизм переводит $\mu_x\Omega_p(A)$ в $\mu_x\Omega_p(X)$, а модули $\Omega_p(X)$ геометричны. Обратное включение. Зафик-

сируем точку x, карту около неё и шапку f, равную 1 вблизи x, с носителем в области карты; пусть $\hat{x}^i \in \mathscr{F}(X)$ – срезанные этой шапкой и продолженные нулём координатные функции. Сначала заметим: если $g \in \mathscr{F}(X)$ обнуляется вблизи x, то $dg \in \mu_x\Omega_1(A)$; действительно, для шапки h, равной 1 вблизи x, с условием $hg = 0$ имеем $dg = d((1-h)g) = (1-h)\,dg - g\,dh \in \mu_x\Omega_1(A)$. Далее, для любой $a \in \mathscr{F}(X)$ запишем $a - a(x)$ вблизи x по лемме Адамара, срежем разложение шапкой и продолжим нулём; вместе с предыдущим замечанием (остаток обнуляется вблизи x) это даёт

$$da \equiv \sum\nolimits_i \partial_i a(x)\, d\hat{x}^i \pmod{\mu_x\Omega_1(A)}.$$

Отсюда по правилу Лейбница всякий элемент $\Omega_p(A)$ сравним по модулю $\mu_x\Omega_p(A)$ с комбинацией $\sum_I c_I\, d\hat{x}^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\hat{x}^{i_p}$ с постоянными коэффициентами $c_I \in \mathbb{R}$. Если теперь $\varkappa(\omega) = 0$, то, взяв значение гладкой формы в точке x, получим $\sum_I c_I\, d\hat{x}^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\hat{x}^{i_p}\big|_x = 0$ в $\Lambda^p(T^*_xX)$; но ковекторы $d\hat{x}^i_x = dx^i_x$ составляют базис T^*_xX, так что все $c_I = 0$ и $\omega \in \mu_x\Omega_p(A)$. □

Замечание 3.3.7. Гомоморфизм $\varkappa$ *не* инъективен, т.е. модуль $\Omega_1(A)$ не геометричен: при $X = \mathbb{R}$ элемент $\delta = d(e^x) - e^x\,dx$ лежит в ядре (формула производной), но отличен от нуля – этот нетривиальный факт примем без доказательства (см. [3]). Конструкция $\Omega_1(A) = \mathscr{K}/\mathscr{K}^2$ чисто алгебраична: правило Лейбница выводит $d(p(f)) = p'(f)\,df$ лишь для многочленов p, а предельные переходы и локальность гладких функций ей недоступны.

Определение 3.3.8. *Координатными векторными полями* карты (U, φ) называются поля $\partial_i|_x = d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}(e_i)$ на U, где $e_1, \ldots, e_n$ – стандартный базис $\mathbb{R}^n$. В каждой точке $x \in U$ они составляют базис T_xX, а подстановка поля ∂_i в 1-форму da, $a \in \mathscr{F}(X)$, даёт частную производную координатной записи: $da(\partial_i) = \partial_i(a \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$ (проверьте).

Задача* 3.3.9. Ядро $\ker\varkappa$ инвариантно относительно алгебраического внешнего дифференциала: $d(\ker\varkappa) \subset \ker\varkappa$. Поэтому соотношение $d(\varkappa\omega) = \varkappa(d\omega)$ корректно определяет оператор $d : \Omega(X) \to \Omega(X)$, являющийся антидифференцированием степени 1 с нулевым квадратом ($d \circ d = 0$), которое продолжает дифференцирование $f \mapsto df$ на $\Omega_0(X) = \mathscr{F}(X)$. Такое продолжение единственно.

Решение. Пусть $\omega = \sum_\alpha a^\alpha_0\, da^\alpha_1 \wedge \ldots \wedge da^\alpha_p \in \ker\varkappa$ (такой вид имеет любой элемент $\Omega_p(A)$); тогда $d\omega = \sum_\alpha da^\alpha_0 \wedge da^\alpha_1 \wedge \ldots \wedge da^\alpha_p$, и нужно проверить $\varkappa(d\omega) = 0$, т.е. поточечное зануление гладкой формы. Проверим его в произвольной карте (частные производные в точках края понимаются согласно задаче 3.1.79). Условие $\varkappa(\omega) = 0$ означает тождественное зану-

ление в области карты функций

$$F_{j_1\dots j_p} = \sum_\alpha a_0^\alpha \det\left(\partial_{j_l} a_k^\alpha\right)_{k,l=1}^p$$

– значений формы $\varkappa(\omega)$ на наборах координатных векторных полей $\partial_{j_1},\dots,\partial_{j_p}$ (значение формы $da_1\wedge\ldots\wedge da_p$ – определитель матрицы значений $da_k(\partial_{j_l}) = \partial_{j_l}a_k$, см. отождествление с функционалами). Требуемое же равенство $\varkappa(d\omega) = 0$ – это зануление функций $G_{j_0\dots j_p} = \sum_\alpha \det\left(\partial_{j_l} a_k^\alpha\right)_{k,l=0}^p$. Продифференцируем тождества $F\equiv 0$ и антисимметризуем:

$$0 = \sum_{l=0}^p (-1)^l\, \partial_{j_l} F_{j_0\dots\widehat{j_l}\dots j_p}.$$

Слагаемые, в которых ∂_{j_l} попадает на множитель a_0^α, дают в сумме в точности разложение определителя $G_{j_0\dots j_p}$ по первой строке. Слагаемые же со вторыми производными (когда ∂_{j_l} дифференцирует столбец $\partial_{j_m}a_k^\alpha$) взаимно уничтожаются: слагаемые пар (l,m) и (m,l) отличаются лишь порядком столбцов и знаком (проверьте расстановку знаков), а вторые производные симметричны. Итак, $G\equiv 0$ во внутренних точках области карты, а в точках края – по непрерывности (область содержится в замыкании своей внутренности, см. решение задачи 3.1.79).

Оператор d на $\Omega(X)$ корректно определён ввиду сюръективности $\varkappa$; правило Лейбница антидифференцирования, $d\circ d = 0$ и совпадение с $f\mapsto df$ на Ω_0 наследуются от алгебраического d при факторизации, поскольку $\varkappa$ – сюръективный гомоморфизм градуированных алгебр, тождественный на $\Omega_0 = A$. Единственность: если D – ещё одно такое антидифференцирование, то $D(dx) = D(Dx) = 0$ для $x\in\mathscr{F}(X)$ и, как в алгебраическом случае, $D(a_0\,da_1\wedge\ldots\wedge da_p) = da_0\wedge da_1\wedge\ldots\wedge da_p$; по сюръективности $\varkappa$ конечными суммами таких форм исчерпывается $\Omega(X)$, так что $D=d$. □

Задача 3.3.10. Внешний дифференциал – дифференциальный оператор первого порядка из $\Omega_p(X)$ в $\Omega_{p+1}(X)$ и потому локален: ограничение $(d\omega)|_U$ на открытое $U\subset X$ определяется ограничением $\omega|_U$, причём $(d\omega)|_U = d(\omega|_U)$, где справа d – внешний дифференциал многообразия U. В области карты с координатными функциями x^i из $\omega|_U = \sum_I a_I\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$ (суммирование по возрастающим наборам I) следует

$$(d\omega)|_U = \sum_I da_I\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p},\qquad da_I = \sum\nolimits_j \partial_j a_I\,dx^j.$$

Решение. По правилу Лейбница $[d,a]\,\omega = d(a\omega) - a\,d\omega = da\wedge\omega$, т.е. коммутатор $[d,a]$ при любой $a\in\mathscr{F}(X)$ – $\mathscr{F}(X)$-линейный оператор, ДО

нулевого порядка; значит, $d \in D_1(\Omega_p, \Omega_{p+1})$ (ср. задачу 3.1.21) и локален по задаче 3.2.53.

Формула в карте: для $x \in U$ срежем шапкой, равной 1 на окрестности $V \ni x$, с носителем в U, координатные функции и коэффициенты, получив $\hat a_I, \hat x^i \in \mathscr{F}(X)$, совпадающие с a_I, x^i на V. На V форма ω совпадает с глобальной формой $\sum_I \hat a_I\, d\hat x^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\hat x^{i_p}$, дифференциал которой по правилу Лейбница и $d \circ d = 0$ равен $\sum_I d\hat a_I \wedge d\hat x^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\hat x^{i_p}$; по локальности на V это и есть $d\omega$ ($da = \sum_j \partial_j a\, dx^j$ – координатная запись дифференциала функции, ср. решение задачи 3.2.55). Тот же подсчёт для дифференциала многообразия U даёт $(d\omega)|_U = d(\omega|_U)$. □

Определение 3.3.11. Построенный градуированный гомоморфизм $d : \Omega(X) \to \Omega(X)$ с нулевым квадратом называется, как и его алгебраический прообраз, *комплексом де Рама* многообразия X:

$$0 \longrightarrow \Omega_0(X) \xrightarrow{d} \Omega_1(X) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega_n(X) \longrightarrow 0,$$

а d – *оператором внешнего дифференцирования* или *внешним дифференциалом* формы (комплекс обрывается: $\Omega_p(X) = 0$ при $p > n$ по задаче 3.3.1).

Задача 3.3.12. Пусть $f : X \to Y$ – гладкое отображение многообразий. Соотношение

$$(f^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_p) = \omega_{f(x)}\big(df_x(v_1), \ldots, df_x(v_p)\big), \qquad v_i \in T_xX,$$

где формы отождествлены с кососимметричными функционалами обычным образом, корректно определяет гомоморфизм градуированных алгебр $f^* : \Omega(Y) \to \Omega(X)$ (*перенос* форм), причём $f^*g = g \circ f$ для функций $g \in \Omega_0(Y)$, $(g \circ h)^* = h^* \circ g^*$, $(1_X)^* = 1_{\Omega(X)}$ и $f^* \circ d = d \circ f^*$.

Решение. Указание: поточечно $(f^*\omega)_x = \Lambda^p(df_x^*)\,(\omega_{f(x)})$, откуда гомоморфность и функториальность следуют из функториальности Λ; гладкость $f^*\omega$ проверьте в картах. На функциях $f^*(dg) = d(g \circ f)$ – это цепное правило $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$, непосредственно вытекающее из определения дифференциала через классы касания кривых. В общем случае значения обеих частей равенства $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$ в точке x зависят лишь от ω вблизи $f(x)$, а вблизи $f(x)$, срезав шапкой, можно считать $\omega = \sum a_0\, da_1 \wedge \ldots \wedge da_p$; для таких форм равенство следует из гомоморфности, случая функций и $d \circ d = 0$. □

Замечание 3.3.13. Для подмногообразия $Z \subset X$ с вложением $\iota : Z \to X$ перенос $\iota^*\omega$ – это поточечное ограничение формы на подпространства $T_zZ \subset T_zX$; будем писать $\omega|_Z = \iota^*\omega$. Для открытого Z это обычное ограничение сечения, а важнейший для дальнейшего случай – ограничение $\omega|_{\partial X}$ на край.

Задача 3.3.14. Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n_+$ открыты, $f : U \to V$ гладко, а $x^1, \dots, x^n$ – стандартные координаты. Тогда

$$f^*(a\,dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (a \circ f)\,\det(df)\,dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

где $\det(df) : U \to \mathbb{R}$ – якобиан.

Решение. Указание: поточечно это утверждение о линейном операторе $\Lambda^n(df_x^*)$ на одномерном пространстве $\Lambda^n(\mathbb{R}^{n*})$: согласно задаче 3.1.64 он есть умножение на $\det(df_x^*) = \det(df_x)$. □

3.3.2 Ориентация многообразия

Определение 3.3.15. Перенеся в расслоения конструкцию $L \mapsto \mathrm{Or}\,L$ (задача 3.2.47), получим одномерное векторное расслоение $\mathrm{Or}(TX)$ со слоями $\mathrm{Or}(T_xX)$. *Ориентацией* многообразия X называется класс эквивалентности нигде не обращающихся в нуль гладких сечений расслоения $\mathrm{Or}(TX)$ по отношению $s \sim fs$, где $f : X \to (0; +\infty)$ – положительная функция (её гладкость автоматична, проверьте). Ориентация o задаёт в каждой точке x ориентацию o_x пространства T_xX – ту из двух, что положительно пропорциональна значению $s(x)$ любого представителя s (проверьте независимость от представителя); значения o на наборах векторов понимаются как значения o_x. Многообразие называется *ориентируемым*, если ориентация существует, а пара (X, o) – *ориентированным многообразием*.

Задача 3.3.16. Соответствие $o \mapsto \{o_x\}_{x \in X}$ – биекция между ориентациями многообразия X и такими семействами ориентаций касательных пространств, у которых функция значений $o(\partial_1, \dots, \partial_n)$ на координатных векторных полях локально постоянна в каждой карте.

Решение. Указание: в тривиализации $\mathrm{Or}(TU)$, порождённой картой, нигде не нулевое сечение – это функция $U \to \mathrm{Or}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, и знак отвечающей ей поточечной ориентации локально постоянен ввиду непрерывности, а у эквивалентных сечений семейства $\{o_x\}$ совпадают – соответствие корректно, и по определению o_x оно инъективно. Обратно, локально постоянное семейство $\{o_x\}$ само является нигде не нулевым гладким сечением (в тривиализациях оно локально постоянно), и его класс – искомая ориентация. □

Области карт мы считаем далее связными (перейдя при необходимости к компонентам связности).

Определение 3.3.17. Базис $v_1, \dots, v_n$ пространства T_xX ориентированного многообразия (X, o) называется *положительным*, если $o_x(v_1, \dots, v_n) = 1$. *Знаком* карты (U, φ) называется постоянное по

задаче 3.3.16 значение $\varepsilon_U = o(\partial_1, \dots, \partial_n) \in \{\pm 1\}$. Карта *положительна*, если $\varepsilon_U = 1$, т.е. если её координатные векторные поля составляют положительный базис в каждой точке.

Задача 3.3.18. Знаки карт связаны с якобианами отображений склейки соотношением $\varepsilon_U \varepsilon_V = \operatorname{sgn} \det d(\psi \circ \varphi^{-1})$ на $U \cap V$. Атлас, все якобианы склеек которого положительны, задаёт ориентацию. Обратно, при $n \geq 2$ или $\partial X = \varnothing$ каждая точка ориентированного многообразия лежит в положительной карте, и такие карты составляют атлас с положительными якобианами склеек.

Решение. Указание: координатные базисы двух карт в точке $x \in U \cap V$ переводятся друг в друга изоморфизмом с матрицей Якоби склейки; примените правило преобразования. По атласу с положительными якобианами склеек ориентация строится поточечно: o_x принимает значение 1 на координатном базисе любой карты атласа – корректно ввиду положительности якобианов, а по задаче 3.3.16 такое семейство задаёт ориентацию. Отрицательную карту чинит композиция с отражением $x^2 \mapsto -x^2$ (при $\partial X = \varnothing$ годится и $x^1 \mapsto -x^1$), сохраняющая условие $x^1 \geq 0$. □

Задача 3.3.19. Отрезок $[0;1]$ ориентируем, хотя у одного из его концов положительной карты нет, и атласа с положительными якобианами склеек не существует.

Решение. Указание: карта у конца отрезка – диффеоморфизм на открытое подмножество $\mathbb{R}_+$, переводящий конец в 0, поэтому при любой ориентации все карты у одного из концов имеют знак -1, а склейка карт разных знаков имеет отрицательную производную. □

Задача 3.3.20. На связном ориентируемом многообразии ровно две ориентации.

Решение. Указание: ориентация определяется своим семейством $\{o_x\}$ (задача 3.3.16), а множество точек, где поточечные ориентации o_x и o'_x двух ориентаций совпадают, открыто-замкнуто. □

Задача 3.3.21. Пусть $x \in \partial X$. Вектор $v \in T_x X$ называется *направленным наружу*, если $-v$ лежит в конусе $\mathscr{T}(\mathbb{R}_{\geq 0}, X, 0, x)$ классов касания, а сам v – нет; в карте это означает в точности $v^1 < 0$, а гиперплоскость $T_x \partial X \subset T_x X$ отвечает условию $v^1 = 0$ (задача 3.2.31). Пусть теперь (X, o) – ориентированное n-многообразие с краем и $n \geq 2$. Соотношение

$$o^{\partial}_x(v_2, \dots, v_n) = o_x(\nu, v_2, \dots, v_n),$$

где ν – любой направленный наружу вектор («наружная нормаль – первая»), а $v_i \in T_x \partial X$, корректно определяет ориентацию o^{∂} многообразия ∂X, называемую *индуцированной* ориентацией края.

Решение. Указание: описание в карте даёт задача 3.2.20. Корректность: если ν' тоже направлен наружу, то $\nu' = a\nu + w$, где $a > 0$, а $w \in T_x\,\partial X$ (сравните первые координаты в карте), поэтому матрица замены набора $(\nu, v_2, \dots, v_n)$ на набор $(\nu', v_2', \dots, v_n')$ блочно-треугольна с определителем $a \det C$, где C – матрица замены (v_i) на (v_i'); по правилу преобразования значение o^∂_x корректно определяет ориентацию пространства $T_x\,\partial X$. Локальное постоянство: в карте (U, φ) у точки края наружу направлен вектор $-\partial_1$, так что

$$o^\partial(\partial_2, \dots, \partial_n) = o(-\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n) = -o(\partial_1, \dots, \partial_n) = -\varepsilon_U.$$

Итак, семейство $\{o^\partial_x\}$ локально постоянно в картах края и по задаче 3.3.16 задаёт ориентацию. □

Замечание 3.3.22. Согласно этому подсчёту карта $(x^2, \dots, x^n)$ края (задача 3.2.31), полученная из карты (U, φ), имеет знак $-\varepsilon_U$; при принятом соглашении $\mathbb{R}^n_+ = \{x^1 \geq 0\}$ он не зависит от размерности (при $\{x^n \geq 0\}$ получилось бы $(-1)^n\varepsilon_U$).

При $n = 1$ пространство $T_x\,\partial X$ нульмерно; условимся, что его ориентация – это знак ± 1, и положим $o^\partial_x = o_x(\nu)$ для направленного наружу ν; в карте у точки края по-прежнему $o^\partial = -\varepsilon_U$. У отрезка $[a; b] \subset \mathbb{R}$ со *стандартной* ориентацией (тождественная карта внутренности $(a; b)$ положительна) конец b получает знак $+1$, а конец a – знак -1.

3.3.3 Интеграл и формула Стокса

Определение 3.3.23. *Носителем* формы $\omega \in \Omega(X)$ называется множество $\operatorname{supp}\omega = \operatorname{cl}\{x \in X \mid \omega_x \neq 0\}$ (ср. носитель функции). Пусть (X, o) – ориентированное n-многообразие, а $\omega \in \Omega_n(X)$ – n-форма с компактным носителем. *Интеграл* $\int_X \omega$ определим в два шага. 1. Если $\operatorname{supp}\omega \subset U$ для некоторой карты (U, φ), то $(\varphi^{-1})^*(\omega|_U) = a\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ на открытом множестве $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n_+$, где функция a гладка и имеет компактный носитель $\varphi(\operatorname{supp}\omega)$; положим $\int_X \omega = \varepsilon_U \int_{\varphi(U)} a$ (интеграл справа определён в подразделе «Сведения из анализа»). 2. В общем случае возьмём гладкое компактно нумерируемое покрытие, вписанное в покрытие областями карт, с разбиением единицы $\{\rho_i\}$ и положим $\int_X \omega = \sum_i \int_X \rho_i\omega$: каждое слагаемое определено согласно первому шагу ($\operatorname{supp}(\rho_i\omega)$ – компактное подмножество области карты), а ненулевых слагаемых конечное число, поскольку компакт $\operatorname{supp}\omega$ пересекает лишь конечное число носителей $\operatorname{supp}\rho_i$ (локальная конечность).

Задача* 3.3.24. Интеграл определён корректно: (а) значение первого шага не зависит от выбора карты, содержащей $\operatorname{supp}\omega$; (б) значение

второго шага не зависит от выбора покрытия и разбиения единицы и согласовано с первым шагом. Кроме того, интеграл $\mathbb{R}$-линеен по ω, меняет знак при смене ориентации: $\int_{(X,-o)}\omega = -\int_{(X,o)}\omega$, – и инвариантен относительно сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов: если диффеоморфизм $g : X \to Y$ переводит ориентацию o в o' (т.е. dg переводит положительные базисы в положительные), то $\int_X g^*\omega = \int_Y \omega$ для любой $\omega \in \Omega_n(Y)$ с компактным носителем.

Решение. (а) Пусть $\operatorname{supp}\omega \subset U \cap V$ для карт (U,φ), (V,ψ), и пусть $\phi = \psi \circ \varphi^{-1}$ – отображение склейки. Из $\varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ \phi$ и функториальности переноса коэффициенты a и b форм $(\varphi^{-1})^*\omega$ и $(\psi^{-1})^*\omega$ связаны якобианом: $a = (b \circ \phi)\det(d\phi)$. По теореме о замене переменных $\int b = \int (b\circ\phi)\,|\det d\phi|$, а $\operatorname{sgn}\det d\phi = \varepsilon_U\varepsilon_V$ (задача 3.3.18), откуда $\varepsilon_U \int a = \varepsilon_U\varepsilon_U\varepsilon_V \int (b\circ\phi)\,|\det d\phi| = \varepsilon_V \int b$. (б) Для двух разбиений $\{\rho_i\}$, $\{\sigma_j\}$ имеем $\sum_i \int \rho_i\omega = \sum_{i,j}\int \sigma_j\rho_i\omega = \sum_j \int \sigma_j\omega$: все суммы конечны, а перегруппировка законна ввиду (а) и аддитивности интеграла Римана, применённой в карте, содержащей носитель соответствующего слагаемого. Согласованность с первым шагом – частный случай того же подсчёта. Линейность и смена знака при смене ориентации теперь очевидны; для инвариантности заметьте, что композиции g с картами Y – это карты X тех же знаков (проверьте). □

Замечание 3.3.25. Нульмерное многообразие X – дискретное (не более чем счётное) множество точек; его ориентация – расстановка знаков $o_x = \pm 1$ (замечание 3.3.22), 0-форма – функция f, компактность носителя – его конечность. Положим $\int_X f = \sum_{x\in X} o_x f(x)$.

Определение 3.3.26. Для n-формы ω на n-мерном ЛП обозначим $|\omega|$ плотность $|\omega|(v_1,\dots,v_n) = |\omega(v_1,\dots,v_n)|$. *Носитель* и *перенос* $f^*\rho$ плотности ρ на многообразии (сечения расслоения $\operatorname{Vl}(TX)$) определяются теми же формулами, что и для форм.

Задача 3.3.27. На открытом $V \subset \mathbb{R}^n_+$ всякая плотность имеет вид $\rho = a\,|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n|$ с гладкой a, а перенос вдоль гладкого $f : U \to V$ действует по правилу $f^*\rho = (a \circ f)\,|\det df|\,|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n|$.

Решение. Указание: слой $\operatorname{Vl}(\mathbb{R}^n)$ одномерен с базисом $|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n|$, а правило переноса – определяющее свойство плотности ($|\det|$ вместо det, ср. задачу 3.3.14). □

Определение 3.3.28. *Интеграл* плотности ρ с компактным носителем по многообразию X (без ориентации!) определяется по схеме определения 3.3.23, но без знака карты: при $\operatorname{supp}\rho \subset U$ полагаем $\int_X \rho = \int_{\varphi(U)} a$, где $(\varphi^{-1})^*\rho = a\,|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n|$, в общем случае – $\int_X \rho = \sum_i \int_X f_i\rho$ по

разбиению единицы $\{f_i\}$. Корректность – та же выкладка, что в задаче 3.3.24, только замена переменных применяется без поправки на знак (проверьте).

Задача 3.3.29. Пусть (X, o) – ориентированное многообразие. Поточечное умножение $\omega \mapsto o \cdot \omega$ задаёт изоморфизм модуля n-форм на модуль плотностей, причём $\int_X o \cdot \omega = \int_X \omega$ для форм с компактным носителем.

Решение. Указание: поточечно $o_x \cdot \omega_x$ – плотность (изоморфизм $\operatorname{Or} L \otimes \Lambda^n L^* \cong \operatorname{Vl} L$); гладкость и обратимость проверьте в картах. В карте знака ε_U из $(\varphi^{-1})^*\omega = a\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ следует $(\varphi^{-1})^*(o \cdot \omega) = \varepsilon_U\, a\, |dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n|$, откуда $\int_X o \cdot \omega = \varepsilon_U \int a = \int_X \omega$. □

Задача* 3.3.30 (Формула Стокса)**.** Пусть (X, o) – ориентированное гладкое n-многообразие с краем, $n \geq 1$, а $\omega \in \Omega_{n-1}(X)$ – форма с компактным носителем. Тогда

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega|_{\partial X},$$

где край наделён индуцированной ориентацией o^∂; при $\partial X = \varnothing$ правая часть равна нулю, а при $n = 1$ понимается согласно замечанию 3.3.25.

Решение. Сведение к одной карте. Возьмём покрытие и разбиение единицы $\{\rho_i\}$ из определения 3.3.23; на компакте $\operatorname{supp}\omega$ отличны от нуля лишь ρ_i с номерами из конечного множества F, так что $\omega = \sum_{i\in F} \rho_i\omega$ – конечная сумма форм с компактными носителями в областях карт. Обе части формулы аддитивны по ω (d линеен, ограничение на край и интегралы аддитивны), поэтому достаточно рассмотреть случай $\operatorname{supp}\omega \subset U$ для одной карты (U, φ).

Координатная запись. Общий вид $(n-1)$-формы на $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n_+$:

$$\eta = (\varphi^{-1})^*(\omega|_U) = \sum_{i=1}^n a_i\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

(крышка означает пропуск сомножителя), где функции a_i гладки на $\varphi(U)$ и имеют компактные носители. По формуле в карте и перестановочности d с переносом

$$(\varphi^{-1})^*\big((d\omega)|_U\big) = d\eta = \Big(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\partial_i a_i\Big)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

так что $\int_X d\omega = \varepsilon_U \sum_i (-1)^{i-1} \int_{\varphi(U)} \partial_i a_i$. Продолжив подынтегральные функции нулём на параллелепипед $I \supset \varphi(\operatorname{supp}\omega)$, по теореме Фубини вычислим i-е слагаемое повторным интегрированием, начиная с переменной x^i.

Случай внутренней карты: $U \cap \partial X = \varnothing$. Тогда $\varphi(U)$ не пересекает гиперплоскость $\{x^1 = 0\}$ (почему?), поэтому для каждого i носитель a_i

компактен в области, где переменная x^i пробегает интервал, и внутренний интеграл $\int \partial_i a_i \, dx^i$ по формуле Ньютона–Лейбница равен разности значений a_i вне носителя, т.е. нулю. Значит, $\int_X d\omega = 0$; но и $\omega|_{\partial X} = 0$, поскольку $\operatorname{supp}\omega \cap \partial X \subset U \cap \partial X = \varnothing$.

Случай граничной карты: $U \cap \partial X \neq \varnothing$. Слагаемые с $i \geq 2$ зануляются, как и выше (переменные x^i при $i \geq 2$ не ограничены условием $x^1 \geq 0$). В слагаемом с $i = 1$ внутренний интеграл берётся по лучу $x^1 \in [0; +\infty)$:

$$\int_0^{+\infty} \partial_1 a_1 \, dx^1 = -a_1(0, x^2, \ldots, x^n),$$

откуда $\int_X d\omega = -\varepsilon_U \int a_1(0, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 \ldots dx^n$ – интеграл по параллелепипеду в координатах $(x^2, \ldots, x^n)$, к которому теорема Фубини сводит остальные интегрирования. Вычислим правую часть. Карта края $(x^2, \ldots, x^n)$, полученная из (U, φ), содержит носитель $\omega|_{\partial X}$ и имеет знак $-\varepsilon_U$ (замечание 3.3.22); перенос формы η на $\{x^1 = 0\}$ обнуляет dx^1, т.е. все слагаемые с $i \geq 2$, и равен $a_1(0, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Итак,

$$\int_{\partial X} \omega|_{\partial X} = -\varepsilon_U \int a_1(0, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 \ldots dx^n = \int_X d\omega.$$

При $n = 1$ подсчёт тот же: $\eta = a_1$ – функция, $\int_X d\omega = \varepsilon_U \int_0^{+\infty} a_1' = -\varepsilon_U a_1(0)$, а правая часть – значение ω в единственной точке края $\varphi^{-1}(0) \in U$ со знаком $o^\partial = -\varepsilon_U$ (замечания 3.3.22 и 3.3.25). □

Замечание 3.3.31. Формула Стокса объединяет классические интегральные теоремы анализа: для $X = [a; b]$ это формула Ньютона–Лейбница, для замыкания области с гладкой границей в $\mathbb{R}^2$ и формы $\omega = P\,dx + Q\,dy$ – формула Грина, для области в $\mathbb{R}^3$ и 2-формы – формула Гаусса–Остроградского, а для поверхности с краем в $\mathbb{R}^3$ – классическая формула Стокса о циркуляции. Проверьте это.

Задача 3.3.32. Пусть X – компактное ориентированное n-многообразие без края. Тогда $\int_X d\eta = 0$ для любой $\eta \in \Omega_{n-1}(X)$. В частности, n-форма ω с $\int_X \omega \neq 0$ не представима в виде $\omega = d\eta$ (не *точна*), хотя $d\omega = 0$ (все $(n{+}1)$-формы нулевые). Измерение возникающего зазора между *замкнутыми* ($d\omega = 0$) и точными формами – предмет теории *когомологий де Рама*, остающейся за рамками этой книги.

Литература

[1] Maurice Fréchet. Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22:1–74, 1906.

[2] J. W. Milnor and J. D. Stasheff. *Characteristic Classes*, volume 76 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, 1974.

[3] Jet Nestruev. *Smooth Manifolds and Observables*, volume 220 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2 edition, 2020.

[4] Walter Rudin. *Functional Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, New York, 2 edition, 1991.

[5] Michael Spivak. *Calculus on Manifolds*. W. A. Benjamin, New York, 1965. Рус. пер.: Спивак М. Математический анализ на многообразиях. Москва: Мир, 1968.

[6] François Trèves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Academic Press, New York, 1970.

[7] Александров П. С. *Комбинаторная топология*. Гостехиздат, Москва, Ленинград, 1947.

[8] Александров П. С., Пасынков Б. А. *Введение в теорию размерности*. Наука, Москва, 1973.

[9] Арнольд В. И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. МЦНМО, Москва, 2012.

[10] Бурбаки Н. *Топологические векторные пространства*. Издательство иностранной литературы, Москва, 1959.

[11] Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры*. Наука, Москва, 1968.

[12] Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И. *Введение в теорию обобщённых функций*, volume 5 of *Лекционные курсы НОЦ*. МИАН, Москва, 2006.

[13] Зорич В. А. *Математический анализ. Часть I*. МЦНМО, Москва, 2012.

[14] Зорич В. А. *Математический анализ. Часть II*. МЦНМО, Москва, 2012.

[15] Кострикин А. И. *Введение в алгебру: в 3 частях*. Физматлит, Москва, 2000.

[16] Кострикин А. И., Манин Ю. И. *Линейная алгебра и геометрия*. Наука, Москва, 1986.

[17] Куратовский К., Мостовский А. *Теория множеств*. Мир, Москва, 1970.

[18] Постников М. М. *Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия*. Наука, Москва, 1987.

[19] Хатчер А. *Алгебраическая топология*. МЦНМО, Москва, 2011.

[20] Хирш М. *Дифференциальная топология*. Мир, Москва, 1979.

[21] Шефер Х. *Топологические векторные пространства*. Мир, Москва, 1971.

Grigoryants, A. A.

Additional Chapters of Analysis in Examples and Problems : textbook / A. A. Grigoryants. — Moscow : MAKS Press, 2026. — 176 p.

ISBN 978-5-317-07636-8

https://doi.org/10.29003/m5416.978-5-317-07636-8

The book gives a unified treatment of the key notions of analysis — limit, differential and integral — in the modern language of general topology and filters. It shows how the numerous definitions of limits, derivatives and integrals encountered in standard courses arise as special cases of general constructions: the limit along a filter, the exterior differential, the integral of a differential form. The book also covers the fundamentals of the theory of topological vector spaces needed for applications to the theory of distributions, and elements of smooth manifolds.

The book contains a concise exposition of the theory; the statements are split into series of problems with solutions, so that the reader can walk the whole path independently, consulting the solutions when necessary.

The textbook is intended for students and postgraduates in mathematics, as well as for lecturers interested in a modern perspective on classical analysis.

Keywords: general topology, metric space, filter, limit along a filter, separation axioms, continuity, compactness, connectedness, uniform space, topological group, topological vector space, space of test functions, tensor, exterior algebra, smooth manifold, tangent space, vector bundle, differential form, integration on manifolds, Stokes formula.

Учебное издание

ГРИГОРЯНЦ Армен Артемович

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АНАЛИЗА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Издаётся в авторской редакции

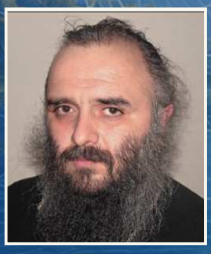
Подписано в печать 14.08.2026. Формат 70 × 100/16.
Усл. печ. л. 14,3. Тираж 1000 (1–50) экз. Заказ 118.

Издательство ООО «МАКС Пресс»
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М. В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.

Книга посвящена единому изложению ключевых понятий анализа — предела, дифференциала и интеграла — на современном языке общей топологии и фильтров. Показано, как многочисленные определения пределов, производных и интегралов, встречающиеся в стандартных курсах, оказываются частными случаями общих конструкций: предела по фильтру, внешнего дифференциала, интеграла дифференциальной формы. Изложены начала теории топологических векторных пространств, необходимые для приложений в теории обобщённых функций, и элементы гладких многообразий.

Книга содержит краткое изложение теории; доказываемые утверждения разбиты на серии задач с решениями, так что читатель может пройти весь путь самостоятельно, заглядывая в решения по необходимости.

Учебник рассчитан на студентов и аспирантов математических специальностей, а также преподавателей, интересующихся современным взглядом на классический анализ.



Григорянц Армен Артемович — кандидат физико-математических наук, доцент, преподаватель филиала МГУ в Ереване. Научные интересы: дифференциальная геометрия, дифференциальная алгебра, теория корректирующих кодов, нестандартный анализ.