Berechnung von Rundhornstrahlern mittels der Momentenmethode

Ingo D. Rullhusen

19. April 1994

Arbeitsvorhaben

betreut von
Dipl.-Ing. Rainer Bunger

an der

UNIVERSITÄT BREMEN
Institut für Hochfrequenztechnik
Prof. Dr.-Ing. F. Arndt

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Allgemeines

Aufgrund des ständig zunehmenden Bedarfs an Nachrichtenübertragungskanälen kommt es darauf an, immer höhere Frequenzbereiche technisch zu erschließen und die bereits nutzbaren so gut wie möglich auszulasten. Da es sich bei den Antennen im Frequenzbereich oberhalb von 1GHz überwiegend um horngespeiste Reflektorsysteme handelt, kommt dem Entwurf des Speisehorns besondere Bedeutung zu. Hierbei sind die Kreuzpolarisation, der Öffnungswinkel und der Aperturreflexionsfaktor von besonderer Bedeutung: Die Kreuzpolarisation sollte im genutzten Raumwinkelbereich minimal sein, um die beiden orthogonalen Polarisationen ohne Übersprechen nutzen zu können. Der Öffnungswinkel muß auf Lage, Größe und Form der Reflektoren abgestimmt sein, um möglichst wenig Störstrahlung zu erzeugen bzw. um gegen Störeinstrahlung möglichst unempfindlich zu sein. Die Kenntnis des Aperturreflexionsfaktors ist wichtig, um das Speisesystem an die Antenne anpassen zu können.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Möglichkeit dargestellt, mittels der Momentenmethode Rundhornstrahler im Sinne dieser Methode exakt zu berechnen. Die Außengeometrie der Rundhornstrahler setzt sich dabei aus einem Stück Rundhohlleiter und einem rotationssymmetrischen Horn, welches im Längsschnitt als Polygonzug beschrieben wird, zusammen. Die angewandte Methode kann exakt genannt werden, da hierbei von einer Oberflächenstromdichte auf der gesamten äußeren Oberfläche und dem Auftreten höherer Moden im Hohlleiter ausgegangen wird. Hierbei wird auf der Diplomarbeit[1] von Rainer Bunger, die sich mit der Berechnung von Rundhohlleiterstrahlern befaßte, aufgebaut. Das vorliegende Rechnerprogramm wird entsprechend modifiziert und optimiert, so daß das oben beschriebene Problem auf dem Vektorrechner Siemens/VP200 oder dem RISC-Rechner IBM/RS6000 möglichst effektiv bearbeitet werden kann. Bei dem Programm für den Vektorechner muß dabei auf einen möglichst hohen Vektorisierungsgrad geachtet werden, während bei dem Programm für den RISC-Rechner möglichst nur analytische Ausdrücke zu verwenden sind, da Näherungsverfahren hier zeitlich besonders ins Gewicht fallen.

1.2 Die Momentenmethode

Die Momentenmethode ist ein allgemeines Verfahren zur numerischen Lösung physikalischer Probleme. Im Gegensatz zur Methode der finiten Elemente erfordert die Momentenmethode *kein* Extremalprinzip. Die Momentenmethode ist damit ansich allgemeiner einsetzbar als die Methode der finiten Elemente, bei ihrer Anwendung ergeben sich jedoch häufig höhere Ableitungen der Lösungsfunktion als bei der Methode der finiten Elemente. Die höheren Ableitungen sind dann mit zusätzlichem Aufwand zu beseitigen, sofern dies möglich ist, da diese häufig stören.

[1] siehe [1]

Der Einfachheit halber soll hier zunächst die Anwendung der Momentenmethode im skalaren Fall betrachtet werden, da die später erfolgende Anwendung auf ein vektorielles Problem analog hierzu verläuft. Bei Anwendung der Momentenmethode wird versucht, die Lösungsfunktion v so gut wie möglich durch die Reihendarstellung

$$u = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k$$

zu approximieren; die Ortsvariablen seien der Übersichtlichkeit halber fortgelassen. Dabei sind $\varphi_0 \ldots \varphi_m$ geeignet gewählte Basisfunktionen. φ_0 nehme dabei auf dem Rand des Definitionsgebietes genau die Randwerte an, während $\varphi_1 \ldots \varphi_m$ auf dem Rand gleich Null seien. In der hier gezeigten Anwendung ist das Definitionsgebiet eine geschlossene Oberfläche im Raum, so daß sich keine Randwerte ergeben; in diesem Falle entfällt φ_0 und es sind Stetigkeitsbedingungen zu betrachten. Die Lösung des Problems liegt nun in der Bestimmung der c_k.

Selbst bei optimaler Wahl der c_k erfüllt die Reihendarstellung die Differentialgleichung des Problemes

$$\mathtt{D}(v) = 0$$

nicht exakt, sondern es ergibt sich

$$\mathtt{D}(u) = R,$$

wobei man R das Residuum nennt. R ist dabei ebenfalls eine Funktion im Definitionsgebiet von v bzw. u. Aus diesem Residuum läßt sich nun ein Bestimmungskriterium für die c_k ableiten. Man fordert, daß das Integral des Residuums, gewichtet mit gewissen Gewichtsfunktionen W_i, über das Definitionsgebiet verschwindet. Dies bedeutet, daß R im Mittel bezüglich der W_i im Definitionsgebiet verschwinden soll.

Um von der Willkür in der Wahl der Gewichtsfunktionen wegzukommen, wird hier die Methode von Galerkin gewählt. Nach ihr werden

$$W_i = \varphi_i \qquad \text{für} \qquad i = 1 \ldots m$$

gewählt. Hiermit ergeben sich direkt m Bestimmungsgleichungen für die gesuchten c_k. Diese Wahl ist mathematisch damit begründet, daß aus dem Verschwinden aller gewichteten Residuenintegrale die Orthogonalität von R zu $\varphi_1 \ldots \varphi_m$ folgt. Dies bedeutet, daß R mittels $\varphi_1 \ldots \varphi_m$ nicht als Linearkombination darstellbar ist und daß das entsprechende u somit die bestmögliche Lösung bezüglich $\varphi_1 \ldots \varphi_m$ darstellt.

Dieses Vorgehen sei an folgendem Beispiel dargestellt:

Es sei

$$\Delta v(x;y) = f(x;y)$$

in G zu lösen. Der Geometrie entsprechende Basisfunktionen seien gewählt und die Randbedingungen wurden durch die Wahl von φ_0 erfüllt. Dann kann man ansetzen:

$$u = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k.$$

In die Differentialgleichung eingesetzt ergibt sich dann:

$$\Delta\varphi_0 + \sum_{k=1}^{m} c_k \Delta\varphi_k - f = R.$$

Unter Anwendung der Methode von Galerkin ergibt sich dann für $j = 1 \ldots m$:

$$\int_G R\varphi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_G \left(\Delta\varphi_0 + \sum_{k=1}^{m} c_k \Delta\varphi_k - f\right) \varphi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Umgeformt ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \int_G \varphi_j \Delta\varphi_k \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_G (\varphi_j \Delta\varphi_0 - f\varphi_j)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Daraus kann man folgende Matrizengleichung zur Bestimmung der c_k ableiten:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{C},$$

wobei

$$\begin{aligned} \underline{A} &= [A_{jk}] = \int_G \varphi_j \Delta\varphi_k \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ \underline{B} &= [c_k], \\ \underline{C} &= [C_j] = -\int_G (\Delta\varphi_0 - f)\varphi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Hierbei erkennt man deutlich, daß zweifache Ableitungen von φ_j auftreten. Wenn die gewählten Basisfunktionen nicht zweimal differenzierbar sind, müssen die obigen Ausdrücke über Integralsätze wie zum Beispiel den Greenschen Satz weiter umgeformt werden, bis nur noch einfache Ableitungen vorkommen.

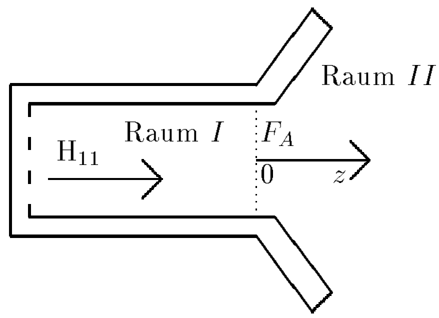


Abbildung 1: Hornstrahler endlicher Außengeometrie

2 Nutzung der Momentenmethode

An dieser Stelle soll die Momentenmethode zunächst einmal allgemein für die Berechnung eines Aperturstrahlers eingeführt werden. Deren Spezifikation für einen Rundhornstrahler erfolgt in einem späteren Abschnitt.

Die Berechnung eines Hornstrahlers endlicher Außengeometrie läßt sich in ein Zwei-Raum-Problem zerlegen, bei dem sich die homogenen und isotropen Räume nur an der Öffnungsfläche F_A berühren, siehe Abbildung 1. Der mit idealem elektrischen Leiter ausgefüllte Raum, der die endlichen Wände des Hornstrahlers bildet, wird im folgenden als feldfrei angesehen und nicht eingehender betrachtet. Zur Berechnung der Verhältnisse im speisenden Hohlleiter dient die Zerlegung des Feldes in orthonormale Modusvektoren, zur Berechnung des Feldes im Außenraum dient das vektorielle Kirchhoff-Huygenssche Prinzip: Das elektromagnetische Strahlungsfeld, das von verteilten Schwingungserregern ausgeht, ist eindeutig berechenbar, sofern die Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen erfüllt ist. Hierzu schließe man alle Schwingungserreger in geschlossene Hüllflächen ein, auf denen man die Tangentialfeldstärken kennt. Durch die Einführung von magnetischen und elektrischen Oberflächenstromdichten auf den Hüllflächen kann man das Innere der Hüllflächen feldfrei machen, ohne das Feld im Außenraum zu verändern. Diese Oberflächenstromdichten stellen nun neue Quellen des elektromagnetischen Strahlungsfeldes dar; aus ihnen ist nun das Strahlungsfeld im Außenraum berechenbar, indem man quasi die Wirkungen der einzelnen Oberflächenstromdichte-Differentiale über die Hüllflächen integriert. Die Anpassung zwischen Innenraum und Außenraum erfolgt über die Oberflächenstromdichten an der gemeinsamen Öffnungsfläche F_A und der Stetigkeit der Felder an der Öffnung.

Das entscheidende Problem zur Berechnung des Hornstrahlers ist also die Ermittlung der Oberflächenstromdichten an der Außenoberfläche des Hornstrahlers und an seiner Öffnungsfläche. An der Innenoberfläche sind keine Oberflächenstromdichten nötig, da die Berechnung des Innenraumes auf eine Hohlleiterberechnung zurückgeführt wird. Insgesamt sind also vor allem die Oberflächenstromdichten zu berechnen. Aus diesen können dann die gewünschten Feldgrößen gewonnen werden. Zur Berechnung dieser, wird nun die Momentenmethode eingeführt.

Der Hornstrahler wird nun in den Raum I, den Innenraum, und den Raum II, den Außenraum, zerlegt. Alle Quellen befinden sich im Raum I; die Räume I und II grenzen nur an der Öffnungsfläche F_A aneinander. Der Raum, der von den endlichen Wänden des Hornstrahlers ausgefüllt wird, bleibt wie gesagt unbeachtet. Der ins Unendliche reichende Raum II wird damit von den Flächen F_A und F_B begrenzt, wobei F_B die äußere Oberfläche des Hornstrahlers ist. An Grenzflächen gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n}, \\ \vec{J} &= \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1), \end{aligned}$$

oder in der komplexen Darstellung, die im folgenden verwendet werden soll:

$$\begin{aligned} \mathsf{M} &= (\mathsf{E}_2 - \mathsf{E}_1) \times \vec{n}, \\ \mathsf{J} &= \vec{n} \times (\mathsf{H}_2 - \mathsf{H}_1). \end{aligned}$$

Hierbei sind M die magnetische und J die elektrische Oberflächenstromdichte, $\vec{n}$ der Einheitsnormalenvektor der Grenzfläche, der von 1 nach 2 zeigt, und $\mathsf{E}_{1,2}$ und $\mathsf{H}_{1,2}$ sind die elektrischen und magnetischen Feldstärken auf den Seiten 1 und 2 an der Grenzschicht. Setzt man nun die Feldstärken in dem von F_A und F_B umschlossenen Gebiet zu Null, so ergibt sich für die Feldstärken auf F_A und F_B an der Stelle $\vec{r}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\vec{r}) &= -\vec{n}(\vec{r}) \times \mathsf{E}_{II}(\vec{r}) \\ \mathsf{J}(\vec{r}) &= \vec{n}(\vec{r}) \times \mathsf{H}_{II}(\vec{r}). \end{aligned}$$

Da auf der elektrisch leitenden Oberfläche des Hornstrahlers F_B keine elektrische Tangentialfeldstärke existieren kann, gilt

$$\mathsf{M}(\vec{r}_{F_B}) = \vec{0}.$$

Die magnetische Oberflächenstromdichte ist also nur auf der Öffnungsfläche vorhanden und damit das entscheidende Bindeglied zwischen Raum I und Raum II.

Um nun die Kopplung von Raum I und Raum II zu beschreiben, ersetzt man die Öffnungsfläche F_A durch eine ideal elektrisch leitende unendlich dünne Schicht. Damit die Felder nicht verändert werden, ist das Verschwinden der elektrischen Tangentialfeldstärke durch die Einführung der magnetischen Oberflächenstromdichte zu kompensieren. Wenn auf der Außenseite von F_A die magnetische Oberflächenstromdichte M fließt, so muß auf der Innenseite von F_A genau $-\mathsf{M}$ fließen, damit die Schicht um F_A keine elektrische Tangentialfeldstärke enthält. Die Felder lassen sich nun aus der Wirkung der elektrisch leitenden Oberfläche und der Wirkung der magnetischen Oberflächenstromdichte berechnen.

Das Einfügen der elektrisch leitenden Schicht hat keinen Einfluß auf das magnetische Feld, die auftretende magnetische Oberflächenstromdichte jedoch sehr wohl. Die magnetische Feldstärke auf der inneren Seite von F_A ergibt sich damit als lineare Überlagerung der von den Quellen eingeprägten Feldstärke H^i und der von der magnetischen Oberflächenstromdichte $-\mathsf{M}$ erzeugten magnetischen Feldstärke $\mathsf{H}_I(-\mathsf{M})$, zu

$$\mathsf{H}_I = \mathsf{H}^i + \mathsf{H}_I(-\mathsf{M}) = \mathsf{H}^i - \mathsf{H}_I(\mathsf{M}).$$

Die magnetische Feldstärke auf der äußeren Seite von F_A ergibt sich einfach zu

$$\mathsf{H}_{II} = \mathsf{H}_{II}(\mathsf{M}),$$

da der Raum II als quellenfrei angenommen wurde. $\mathsf{H}_I(\mathsf{M})$ und $\mathsf{H}_{II}(\mathsf{M})$ stellen dabei lineare Integraloperatoren dar, die aus M unter Beachtung der Anwesenheit der leitenden Flächen F_A und F_B jeweils die magnetische Feldstärke ermitteln.

Da die Tangentialfeldstärken an der Öffnungsfläche F_A stetig ineinander übergehen müssen, muß gelten:

$$\vec{n} \times \mathsf{H}^i - \vec{n} \times \mathsf{H}_I(\mathsf{M}) = \vec{n} \times \mathsf{H}_{II}(\mathsf{M}),$$

wobei $\vec{n}$ in den Raum II zeigt. Aus dieser Gleichung ist nun M zu bestimmen. Hierzu macht man einen Ansatz der Form

$$\mathsf{M} = Z \sum_{q=1}^{Q} V_q \mathsf{M}_q,$$

wobei die M_q später noch genauer zu bestimmende Basisfunktionen sind, die der Geometrie des Problems angemessen gewählt werden sollten, Z ist der Feldwellenwiderstand des Raumes II als normierender Faktor und die V_q sind die noch zu bestimmenden Entwicklungskoeffizienten. Setzt man diese Darstellung von M in die Integralgleichung unter Ausnutzung der Linearität ein, so erhält man:

$$Z \sum_{q=1}^{Q} V_q \vec{n} \times \mathsf{H}_I(\mathsf{M}_q) + Z \sum_{q=1}^{Q} V_q \vec{n} \times \mathsf{H}_{II}(\mathsf{M}_q) = \vec{n} \times \mathsf{H}^i.$$

Um aus dieser Gleichung eine Matrizengleichung zur Bestimmung der Q Entwicklungskoeffizienten V_q zu machen, führt man P Gewichtsfunktionen U_p ein und bildet gemäß

$$\langle \vec{\Phi}, \vec{\Psi} \rangle = \int\limits_{F_A+F_B} \vec{\Phi}\vec{\Psi} \mathrm{d}f$$

das Innere Produkt mit der vorhergehenden Gleichung für jede Gewichtsfunktion, so erhält man P Gleichungen. Die Integration über die gesamte Hüllfläche ist möglich, da nur diejenigen U_p betrachtet werden, die auf F_B überall Null sind. Das Integral wird somit zu einer reinen Integration über F_A, wo die Stetigkeitsbedingung immer erfüllt ist. Die p-te Gleichung lautet dann:

$$Z \sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \mathsf{U}_p, \vec{n} \times \mathsf{H}_I(\mathsf{M}_q) \rangle + Z \sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \mathsf{U}_p, \vec{n} \times \mathsf{H}_{II}(\mathsf{M}_q) \rangle = \langle \mathsf{U}_p, \vec{n} \times \mathsf{H}^i \rangle.$$

Nun führt man P weitere Gewichtsfunktionen ein, die über

$$\mathsf{W}_p = -\vec{n} \times \mathsf{U}_p$$

mit den Funktionen U_p zusammenhängen. Mit

$$\mathsf{U}_p \cdot (\vec{n} \times \mathsf{H}) = -(\vec{n} \times \mathsf{U}_p) \cdot \mathsf{H} = \mathsf{W}_p \cdot \mathsf{H}$$

ergeben sich dann P Gleichungen in der Form:

$$Z \sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \mathsf{W}_p, \mathsf{H}_I(\mathsf{M}_q) \rangle + Z \sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \mathsf{W}_p, \mathsf{H}_{II}(\mathsf{M}_q) \rangle = \langle \mathsf{W}_p, \mathsf{H}^i \rangle.$$

Für die exakte Bestimmung von M müßten Q und P unendlich groß sein und U_p und W_p müßten jeweils ein vollständiges System von Basisfunktionen bilden. Zur numerischen Auswertung werden P und Q natürlich endlich gewählt, wobei $P = Q$ gesetzt wird, um ein nach V_q auflösbares Gleichungssystem zu erhalten. Im weiteren soll nun die Matrizenschreibweise benutzt werden. Mit

$$\begin{aligned}
[Z \langle \mathsf{W}_p, \mathsf{H}_I(\mathsf{M}_q) \rangle] = [T_{pq}^{I}] &= \underline{T}^I, \\
[Z \langle \mathsf{W}_p, \mathsf{H}_{II}(\mathsf{M}_q) \rangle] = [T_{pq}^{II}] &= \underline{T}^{II}, \\
\left[\langle \mathsf{W}_p, \mathsf{H}^i \rangle \right] = [I_p^i] &= \underline{I}^i, \\
[V_q] &= \underline{V},
\end{aligned}$$

lassen sich die P Gleichungen in der Form

$$\left(\underline{T}^I + \underline{T}^{II} \right) \underline{V} = \underline{I}^i \tag{1}$$

darstellen. Hierbei sind:

$\underline{I}^i$: der Vektor, der die Wirkung der Quellen im Raum I beinhaltet, auch „Speisevektor“ genannt.

$\underline{V}$: der Vektor, der die Entwicklungskoeffizienten der Zerlegung von M enthält, auch „Momentenvektor“ genannt.

$\underline{T}^{I,II}$: die Matrizen, die die Verknüpfung von elektrischer und magnetischer Feldstärke auf F_A beschreiben, auch „Admittanzmatrizen“ genannt.

Durch Matrizeninversion ergeben sich damit die Entwicklungskoeffizienten zu:

$$\underline{V} = \left(\underline{T}^I + \underline{T}^{II} \right)^{-1} \underline{I}^i.$$

Um die Entwicklungskoeffizienten zu bestimmen, sind als nächstes also die Admittanzmatrizen für die Räume I und II und der Speisevektor zu ermitteln. Dann kann mit den Entwicklungskoeffizienten die magnetische Oberflächenstromdichte angegeben werden. Aus dieser kann, wie noch zu zeigen ist, das gesamte elektromagnetische Feld berechnet werden.

2.1 Die Admittanzmatrix des Hohlleiters

Als nächstes soll die Admittanzmatrix des Hohlleiters berechnet werden. Dabei wird zunächst von einem Hohlleiter mit beliebigem Querschnitt ausgegangen. Zur Berechnung der Admittanzmatrix muß man die elektrische Tangentialfeldstärke an der Fläche F_A kennen. Hierzu wird zunächst der Feldverlauf im allgemeinen in einem Hohlleiter untersucht.

Im Hohlleiter gelten natürlich die Maxwellschen Gleichungen in komplexer Form bei harmonischer Anregung:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathsf{H} &= j\omega\varepsilon\mathsf{E}, \\ \mathrm{rot}\mathsf{E} &= -j\omega\mu\mathsf{H}, \\ \mathrm{div}\mathsf{H} &= 0, \\ \mathrm{div}\mathsf{E} &= 0, \end{aligned}$$

sofern dieser im Inneren ladungsfrei und mit linearer isotroper Materie gefüllt ist.

Aufgrund der Vektoridentität div rot$\vec{v} = 0$ kann man die folgenden Vektorpotentiale als Rechengrößen einführen:

$$\begin{aligned} \mathsf{H} &= \mathrm{rot}\mathsf{A}, \\ \mathsf{E} &= \mathrm{rot}(-\mathsf{F}). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Maxwellschen Gleichungen ergibt sich zwischen beiden der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathsf{A} &= -j\omega\varepsilon\mathrm{rot}\mathsf{F}, \\ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathsf{F} &= j\omega\mu\mathrm{rot}\mathsf{A}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich also, das die Vektorpotentiale in dieser Form von einander abhängig sind. Da nur die Rotation der Vektorpotentiale interessiert, kann man diese Gleichungen integrieren, wobei als Integrationskonstante ein Potentialanteil grad$c$ auftritt. Damit ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathsf{A} &= -j\omega\varepsilon\mathsf{F} + \mathrm{grad}c_1, \\ \mathrm{rot}\mathsf{F} &= j\omega\mu\mathsf{A} + \mathrm{grad}c_2. \end{aligned}$$

Wenn man nun die eine der letzten Gleichungen in die jeweils andere der vorherigen einsetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathsf{A} &= \omega^2\varepsilon\mu\mathsf{A} - j\omega\varepsilon\mathrm{grad}c_2, \\ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathsf{F} &= \omega^2\varepsilon\mu\mathsf{F} + j\omega\mu\mathrm{grad}c_1. \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen läßt sich nun weiter umformen mit

$$\begin{aligned}\text{rot rot}\mathsf{A} &= \nabla \times (\nabla \times \mathsf{A}) \\ &= \nabla(\nabla \mathsf{A}) - \mathsf{A}(\nabla\nabla) \\ &= -j\omega\varepsilon \text{grad} c_2 - \nabla^2 \mathsf{A}.\end{aligned}$$

Hierbei wurde der Entwicklungssatz benutzt sowie gefordert, daß

$$\text{div}\mathsf{A} = -j\omega\varepsilon c_2$$

sei, was der Lorentzschen Bedingung entspricht. Diese ist immer erfüllbar, wenn man sich nur für die Rotation von A interessiert. Für F ergeben sich entsprechende Umformungen, so daß sich dann

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathsf{A} &= -\omega^2 \varepsilon\mu \mathsf{A} \qquad \text{und} \\ \nabla^2 \mathsf{F} &= -\omega^2 \varepsilon\mu \mathsf{F}\end{aligned}$$

ergeben. Die Vektorpotentiale erfüllen also die Wellengleichung, ebenso wie deren Komponenten. Obwohl eigentlich laut der obigen Beziehungen die Ermittlung eines Vektorpotentials ausreichen würde, um das elektromagnetische Feld vollständig zu berechnen, geht man bei der Ermittlung der Felder im Hohlleiter einen anderen Weg.

Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß die z-Achse mit der Hohlleiterachse zusammenfällt. Qualitativ kann man nun sagen, daß eine Wellenausbreitung höchstens in z-Richtung stattfinden kann. Diese allgemeine Welle läßt sich in einen H-Typ und einen E-Typ zerlegen. Die H-Welle besitzt dabei keine elektrische Feldstärkenkomponente in z-Richtung und die E-Welle besitzt keine magnetische Feldstärkenkomponente in z-Richtung; die allgemeine Welle ergibt sich dann als Summe beider Typen. Diese Zerlegung ist sinnvoll, da bei einer H-Welle F nur aus der z-Komponente besteht und bei einer E-Welle entsprechend A. Für eine H-Welle ergibt sich zum Beispiel

$$\begin{aligned}\mathsf{E} &= -\text{rot}(F_z \vec{u}_z) \\ &= -\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & F_z \end{vmatrix} \\ &= -\vec{u}_x \frac{\partial F_z}{\partial y} + \vec{u}_y \frac{\partial F_z}{\partial x},\end{aligned}$$

wobei $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ und $\vec{u}_z$ die Einheitsvektoren sind. Das elektrische Feld besitzt also nur Tansversalkomponenten, wenn F nur aus einer z-Komponente besteht. Entsprechendes ergibt sich für die E-Wellen.

Der Vorteil besteht nun darin, daß man nur jeweils eine Komponente berechnen muß, um die jeweilige Welle berechnen zu können. Zur Berechnung der H-Wellen ist nun also

F_z zu berechnen. Wie bereits gezeigt, erfüllen die Komponenten der Vektorpotentiale die Wellengleichung. Dementsprechend gilt:

$$\nabla^2 F_z = -k^2 F_z,$$

mit $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$. Diese Differentialgleichung kann man nun mit dem Separationsansatz von Bernoulli $F_z(x; y; z) = T^H(x; y) \cdot Z^H(z)$ durch Einsetzen wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned}
\nabla^2(T^H Z^H) &= -k^2 T^H Z^H, \\
Z\nabla_t^2 T + T^H \frac{\partial^2 Z^H}{\partial z^2} &= -k^2 T^H Z^H, \\
\frac{1}{T^H}\nabla_t^2 T^H + \frac{1}{Z^H}\frac{\partial^2 Z^H}{\partial z^2} &= -k_{Hz}^2 - k_{Hc}^2,
\end{aligned}$$

wobei $k^2 = k_{Hz}^2 + k_{Hc}^2$ gesetzt wurde und ∇_t den Nabla-Operator darstellt, der nur auf die transversalen Komponenten bzw. Koordinaten angewendet wird. Aus der Tatsache, daß k^2 =const ist, ergibt sich eine Lösung, wenn beide Summanden auf der linken Seite der letzten Gleichung konstant sind. Damit ergeben sich die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T^H}\nabla_t^2 T^H &= -k_{Hc}^2, \\
\frac{1}{Z^H}\frac{\partial^2 Z^H}{\partial z^2} &= -k_{Hz}^2.
\end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen ist in Anbetracht der Geometrie und der Randbedingungen zu lösen. Die Lösung für den rotationssymmetrischen Fall wird weiter hinten behandelt. Die letztere Gleichung ist hingegen eine skalare Wellengleichung, deren allgemeine Lösung angegeben werden kann:

$$Z^H(z) = V^+ \mathrm{e}^{-jk_{Hz}z} + V^- \mathrm{e}^{jk_{Hz}z},$$

wobei sich k_{Hz} ebenfalls aus den Randbedingungen ergibt.

Unter der Voraussetzung, daß auch T^H bekannt ist, kann nun die H-Welle vollständig angegeben werden. Für die elektrische Feldstärke ergibt sich gemäß früheren Überlegungen unter Beachtung des Bernoulli-Ansatzes:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E} &= -\vec{u}_x \frac{\partial F_z}{\partial y} + \vec{u}_y \frac{\partial F_z}{\partial x} \\
&= (\vec{u}_z \times \nabla_t) F_z \\
&= (\vec{u}_z \times \nabla_t T^H) Z^H
\end{aligned}$$

Hierbei wurde beachtet, daß

$$(\vec{u}_z \times \nabla_t) = (-\vec{u}_x \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial x})$$

gilt. Die magnetische Feldstärke der H-Wellen ergibt sich damit aus der zweiten Maxwellschen Gleichung zu:

$$\begin{aligned}
\mathsf{H} &= -\frac{1}{j\omega\mu}\mathrm{rot}\mathsf{E} \\
&= -\frac{1}{j\omega\mu}\mathrm{rot}\left(-\vec{u}_x\frac{\partial F_z}{\partial y} + \vec{u}_y\frac{\partial F_z}{\partial x}\right) \\
&= -\frac{1}{j\omega\mu}\left[-\vec{u}_x\frac{\partial^2 F_z}{\partial z\partial x} - \vec{u}_y\frac{\partial^2 F_z}{\partial z\partial y} + \vec{u}_z\left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial Z^H}{\partial z}\left(\vec{u}_x\frac{\partial T^H}{\partial x} + \vec{u}_y\frac{\partial T^H}{\partial y}\right) + \vec{u}_z(\nabla_t^2 T^H)Z^H \\
&= \frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial Z^H}{\partial z}\nabla_t T^H + \vec{u}_z\frac{k_{Hc}^2}{j\omega\mu}T^H Z^H
\end{aligned}$$

Hierbei wurden die Bernoulli-Zerlegung und die Differentialgleichung für T^H beachtet. Um die Momentenmethode anzuwenden, sind vor allem die Transversalkomponenten von Bedeutung. Für die Transversalkomponenten bei H-Wellen ergibt sich aus den obigen Ergebnissen:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_t^H &= \mathsf{E}^H \\
&= Z^H(\vec{u}_z \times \nabla_t T^H) \\
&= V^H\vec{e}^H, \\
\mathsf{H}_t^H &= -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial Z^H}{\partial z}\nabla_t T^H \\
&= I^H\vec{h}^H,
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\vec{e}^H &= \vec{u}_z \times \nabla_t T^H, \\
\vec{h}^H &= -\nabla_t T^H = \vec{u}_z \times \vec{e}^H, \\
V^H &= Z^H, \\
I^H &= -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial Z^H}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Für E-Wellen kann man eine äquivalente Rechnung durchführen, wenn man vom magnetischen Vektorpotential A ausgeht und die z-Komponente gemäß $A_z(x;y;z) = T^E(x;y)Z^E(z)$ zerlegt. Nach ähnlicher Rechnung wie zuvor erhält man dann für die Transversalkomponenten der E-Wellen:

$$\mathsf{E}_t^E = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial Z^E}{\partial z}\nabla_t T^E$$

$$
\begin{aligned}
 &= V^E \vec{e}^E, \\
\mathsf{H}_t^E &= \mathsf{H}^E \\
 &= Z^E(-\vec{u}_z \times \nabla_t T^E) \\
 &= I^E \vec{h}^E,
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\vec{e}^E &= -\nabla_t T^E, \\
\vec{h}^E &= -\vec{u}_z \times \nabla_t T^E = \vec{u}_z \times \vec{e}^E, \\
V^E &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial Z^E}{\partial z}, \\
I^E &= Z^E.
\end{aligned}
$$

Es zeigt sich also, daß die Feldstärken durch Modusvektoren $\vec{e}$ und $\vec{h}$ darstellbar sind, wobei $\vec{h}$ stets durch

$$\vec{h} = \vec{u}_z \times \vec{e}$$

aus $\vec{e}$ berechenbar ist. Diese Beziehung gilt sowohl bei H- als auch bei E-Wellen. Nun soll das transversale elektromagnetische Feld durch eine Summe über alle vorhandenen Wellentypen dargestellt werden. Für die Amplituden V_i gilt:

$$V_i|_{\mathrm{H-Welle}} = Z^H(z) = V^+ \mathrm{e}^{-jk_{Hz}z} + V^- \mathrm{e}^{jk_{Hz}z};$$

$$
\begin{aligned}
V_i|_{\mathrm{E-Welle}} &= V^E \\
 &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial Z^E}{\partial z}, \\
 &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial I^E}{\partial z}, \\
 &= I^+ \frac{k_{Ez}}{\omega\varepsilon}\mathrm{e}^{-jk_{Ez}z} - I^- \frac{k_{Ez}}{\omega\varepsilon}\mathrm{e}^{jk_{Ez}z} \\
 &= \frac{I^+}{Y^E}\mathrm{e}^{-jk_{Ez}z} - \frac{I^-}{Y^E}\mathrm{e}^{jk_{Ez}z} \\
 &= \hat{V}^+ \mathrm{e}^{-jk_{Ez}z} + \hat{V}^- \mathrm{e}^{jk_{Ez}z}
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
Y^E &= \frac{\omega\varepsilon}{k_{Ez}}, \\
\hat{V}^+ &= \frac{I^+}{Y^E}, \\
\hat{V}^- &= -\frac{I^-}{Y^E}.
\end{aligned}
$$

Bei den Amplituden der magnetischen Feldstärke wird entsprechend verfahren:

$$\begin{aligned}
I^H &= -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial Z^H}{\partial z} \\
&= -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial V_i|_{\mathrm{H-Welle}}}{\partial z} \\
&= \frac{k_{Hz}}{\omega\mu}V^+\mathrm{e}^{-jk_{Hz}z} - \frac{k_{Hz}}{\omega\mu}V^-\mathrm{e}^{jk_{Hz}z} \\
&= Y^H\left(V^+\mathrm{e}^{-jk_{Hz}z} - V^-\mathrm{e}^{jk_{Hz}z}\right), \\
I^E &= I^+\mathrm{e}^{-jk_{Ez}z} + I^-\mathrm{e}^{jk_{Ez}z} \\
&= Y^H\hat{V}^+\mathrm{e}^{-jk_{Ez}z} - Y^H\hat{V}^-\mathrm{e}^{jk_{Ez}z} \\
&= Y^H\left(\hat{V}^+\mathrm{e}^{-jk_{Ez}z} - \hat{V}^-\mathrm{e}^{jk_{Ez}z}\right)
\end{aligned}$$

mit

$$Y^H = \frac{k_{Hz}}{\omega\mu}.$$

Die Transversalfeldstärken lassen sich also für die E- und die H-Wellen in gleicher Weise darstellen. Da die aus den Randbedingungen bestimmten Funktionen T^E und T^H noch frei wählbare Parameter enthalten, existiert eine Anzahl an Modusvektoren. Das elektromagnetische Transversalfeld in einem Hohlleiter läßt sich nun als Summe über alle Wellenmoden darstellen:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_t &= \sum_i \left(V_i^+\mathrm{e}^{-jk_{iz}z} + V_i^-\mathrm{e}^{jk_{iz}z}\right)\vec{e}_i, \\
\mathsf{H}_t &= \sum_i Y_i\left(V_i^+\mathrm{e}^{-jk_{iz}z} - V_i^-\mathrm{e}^{jk_{iz}z}\right)(\vec{u}_z \times \vec{e}_i).
\end{aligned}$$

Die Feldwellenadmittanzen $Y^{E,H}$ lassen sich aus den Wellenzahlen k und k_c und dem Feldwellenwiderstand $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ wie folgt berechnen:

$$Y^H = \frac{k_{Hz}}{\omega\mu} = \frac{1}{kZ}\begin{cases} \sqrt{k^2 - k_{Hc}^2} & \text{für} \quad k \geq k_{Hc} \\ -j\sqrt{k_{Hc}^2 - k^2} & \text{für} \quad k < k_{Hc} \end{cases},$$

$$Y^E = \frac{k_{Ez}}{\omega\mu} = \frac{1}{kZ}\begin{cases} \sqrt{k^2 - k_{Ec}^2} & \text{für} \quad k \geq k_{Ec} \\ -j\sqrt{k_{Ec}^2 - k^2} & \text{für} \quad k < k_{Ec} \end{cases}.$$

Die eigentlichen Modusvektoren für den rotationssymmetrischen Fall werden später berechnet. Zunächst ist nur von Bedeutung, daß sich die Transversalkomponenten der Feldstärken in einem Hohlleiter durch Summen von gewichteten Modusvektoren darstellen lassen. Es ist jedoch schon darauf hinzuweisen, daß die Modusvektoren orthonormiert sein müssen, das heißt es muß gelten:

$$\int_{F_A} \vec{e}_i \vec{e}_j \mathrm{d}f = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Nun läßt sich die Admittanzmatrix eines Hohlleiters berechnen. Das von der Fläche F_A in den Raum I abgestrahlte Feld kann ausschließlich durch die rücklaufenden Wellenterme ausgedrückt werden, sofern die vorlaufende Ausbreitungsrichtung von dem Raum I in den Raum II zeigt. Wenn man die Ebene $z = 0$ mit F_A zusammenfallen läßt, ergibt sich für das rücklaufende Transversalfeld unmittelbar an F_A im Raum I:

$$\mathsf{E}_t(x; y) = \sum_i V_i^- \vec{e}_i(x; y)$$

und

$$\mathsf{H}_t(x; y) = -\sum_i Y_i V_i^- [\vec{u}_z \times \vec{e}_i(x; y)].$$

Als nächstes sollen die Basisfunktionen M_q der äußeren magnetischen Oberflächenstromdichte nach $\vec{e}_i$ mit den Entwicklungskoeffizienten A_{qi} entwickelt werden, gemäß dem Ansatz:

$$\mathsf{M}_q(x'; y') = \sum_i A_{qi} \vec{u}_z \times \vec{e}_i(x'; y'),$$

wobei eventuelle Vorzeichen in den Entwicklungskoeffizienten mit enthalten sein sollen. Um einen Ausdruck für die A_{qi} zu erhalten, multipliziert man diese Gleichung mit $\vec{u}_z \times \vec{e}_j(x'; y')$ und integriert über F_A:

$$\int_{F_A} \mathsf{M}_q(\vec{u}_z \times \vec{e}_j)\mathrm{d}f' = \sum_i A_{qi} \int_{F_A} (\vec{u}_z \times \vec{e}_i)(\vec{u}_z \times \vec{e}_j)\mathrm{d}f' = \sum_i A_{qi} \int_{F_A} \vec{e}_i \vec{e}_j \mathrm{d}f'.$$

Da die Eigenwellen orthonormal sind, liefert das letzte Integral nur für $i = j$ den von Null abweichenden Wert 1. Damit ergibt sich:

$$A_{qi} = \int_{F_A} \mathsf{M}_q(x'; y')[\vec{u}_z \times \vec{e}_i(x'; y')]\mathrm{d}f'.$$

Aus der Beziehung $\mathsf{M} = -\vec{n} \times \mathsf{E}$ ergibt sich

$$\mathsf{M}_q = -\vec{u}_z \times \mathsf{E}_q$$

als Beziehung zwischen den Basisfunktionen M_q und E_q an der Grenzfläche F_A. E_q seien dabei die Basisfunktionen des Anteils der elektrischen Tangentialfeldstärke, der auf die magnetische Oberflächenstromdichte zurückzuführen ist. Durch einen Vergleich mit der Zerlegung von M_q erhält man:

$$\mathsf{E}_q = -\sum_i A_{qi} \vec{e}_i = \sum_i (-A_{qi}) \vec{e}_i.$$

Damit ergibt sich dann die tangentiale magnetische Feldstärke an der Innenseite von F_A zu:

$$\begin{aligned}\mathsf{H}_{It}(-\mathsf{M}_q) &= -\sum_i Y_i(-A_{qi})\,(\vec{u}_z \times \vec{e}_i)\\ &= \sum_i A_{qi} Y_i \vec{u}_z \times \vec{e}_i;\\ \mathsf{H}_{It}(\mathsf{M}_q) &= -\sum_i A_{qi} Y_i \vec{u}_z \times \vec{e}_i.\end{aligned}$$

Hierbei wurde beachtet, daß der lineare Integraloperator H_I per definitionem auf die magnetische Oberflächenstromdichte der Innenseite von F_A angewendet wird. Eingesetzt in die Gleichung für die Admittanzmatrixelemente ergibt sich damit

$$\begin{aligned}T^I_{pq} &= Z\int_{F_A} \mathsf{W}_p \cdot \mathsf{H}_I(\mathsf{M}_q)\mathrm{d}f\\ &= Z\int_{F_A} \mathsf{W}_p \cdot \left[-\sum_i A_{qi} Y_i \vec{u}_z \times \vec{e}_i\right]\mathrm{d}f,\end{aligned}$$

sofern man annimmt, daß W_p genauso wie H_{It} in der Fläche F_A liegt. Dies ist sinnvoll, da dies durch die Galerkinsche Methode sichergestellt wird. Durch Einführung der Abkürzung

$$B_{pi} = \int_{F_A} \mathsf{W}_p \cdot (\vec{u}_z \times \vec{e}_i)\mathrm{d}f$$

erhält man schließlich:

$$T^I_{pq} = -Z\sum_i A_{qi} Y_i B_{pi}. \tag{2}$$

Bei Anwendung der Galerkinschen Methode, die die Gleichheit von Basis- und Gewichtsfunktionen ($\mathsf{M}_q = \mathsf{W}_q$) fordert, ergibt sich dann $B_{pi} = A_{pi}$.

2.2 Der Speisevektor

Die Elemente des Speisevektors $\underline{I}^i$ ergeben sich einfach gemäß Definition zu

$$I^i_p = \int_{F_A} \mathsf{W}_p \mathsf{H}^i \mathrm{d}f.$$

Die W_p sind dabei aus den geometriebezogen gewählten Gewichtsfunktionen U_p durch

$$\mathsf{W}_p = -\vec{n} \times \mathsf{U}_p$$

berechenbar. Die eingeprägte magnetische Feldstärke H^i ergibt sich aus der auf die Grenzfläche F_A zulaufenden Welle

$$\mathsf{H}_t = \sum_i Y_i V_i^+ \mathrm{e}^{-jk_{iz}z}[\vec{u}_z \times \vec{e}_i(x;y)].$$

Die Amplitude der Speisewelle wird dabei zu 1 gesetzt, da diese als Bezugsgröße dienen soll. An der ideal leitend geschlossenen Fläche F_A müssen jedoch noch die Randbedingungen beachtet werden, die elektrischen Tangentialfeldstärken müssen also Null sein. Dies kann man durch Überlagerung einer Spiegelwelle erreichen, die in entgegengesetzter Richtung läuft. Bei dieser Überlagerung ergibt sich jedoch eine Verdoppelung der magnetischen Feldstärke auf der Aperturfläche F_A. Wird nur ein Wellenmodus zur Speisung verwendet, so ergibt sich dann an der Aperturfläche F_A wo $z = 0$ ist:

$$\mathsf{H}^i = \mathsf{H}_t(z=0)|_{\text{Modus}=m} = 2Y_m V_m^+[\vec{u}_z \times \vec{e}_m(x;y)].$$

Der Modusvektor $\vec{e}_m$ ergibt sich dabei auch wieder aus der Betrachtung der Geometrie. Somit sind also die Elemente des Speisevektors vollständig berechenbar.

2.3 Die Admittanzmatrix eines beliebig begrenzten Raumes

Zur Berechnung der Admittanzmatrix eines beliebig begrenzten Raumes benötigt man das Kirchhoff-Huygenssche Prinzip. Dieses von Huygens in elementarer Form 1678 angegebene Prinzip besagt, daß man eine beliebige Wellenfront als Quelle unendlich vieler Elementarwellen ansehen kann, die durch ihre gegenseitig überlagerte Ausbreitung den Verlauf der ursprünglichen Welle wieder beschreiben. 1859 gelang es Helmholz, und einige Jahre später auch Kirchhoff, das Huygenssche Prinzip anhand der Wellengleichung einwandfrei zu formulieren.

In diesem Zusammenhang ermöglicht das Kirchhoff-Huygenssche Prinzip die Feldberechnung im Raum II. Die begrenzenden Oberflächen werden dafür in unendlich viele Quellen von Elementarwellen zerlegt, die sich dann im betrachteten Raumpunkt zum Gesamtfeld überlagern. Im folgenden soll nun das Kirchhoff-Huygenssche Prinzip hergeleitet werden. Hierbei geht man von den Maxwellschen Gleichungen des quellenfreien und homogenen Raumes aus:

$$\begin{aligned}
\text{rot}\mathsf{H} &= j\omega\varepsilon\mathsf{E}, \\
\text{rot}\mathsf{E} &= -j\omega\mu\mathsf{H}, \\
\text{div}\mathsf{H} &= 0, \\
\text{div}\mathsf{E} &= 0.
\end{aligned}$$

Nun betrachte man ein Volumen V mit einer Oberfläche F, in dem der Punkt $Q(x';y';z')$ liege. Außerhalb des Volumens V befinde sich der Punkt $P(x;y;z)$. Nun betrachte man die Funktion

$$\mathsf{K}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}'),$$

wobei

$$\psi(\vec{r};\vec{r}') = \frac{\mathrm{e}^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R} = \psi(R)$$

sei. Auf diese Gleichung soll nun der verallgemeinerte Greensche Satz angewandt werden, der in Operatorschreibweise

$$\int_V \mathrm{d}v\nabla = -\oint_F \mathrm{d}\vec{f}$$

lautet. Dieser beinhaltet die drei Sätze [4]:

$$\begin{aligned}
\int_V \mathrm{d}v \ \mathrm{div}\vec{u} &= -\oint_F \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{u}, \\
\int_V \mathrm{d}v \ \mathrm{grad}U &= -\oint_F \mathrm{d}\vec{f}\cdot U, \\
\int_V \mathrm{d}v \ \mathrm{rot}\vec{u} &= -\oint_F \mathrm{d}\vec{f}\times\vec{u}.
\end{aligned}$$

Das negative Vorzeichen ergibt sich aus der Tatsache, daß der Flächennormalenvektor in den betrachteten Raum V hinein zeigt. Im folgenden werden noch die Beziehungen

$$\nabla\times\int_V \mathsf{K}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}v' = \int_V [\nabla\psi(\vec{r};\vec{r}')]\times\mathsf{K}(\vec{r}')\mathrm{d}v' = -\int_V [\nabla'\psi(\vec{r};\vec{r}')]\times\mathsf{K}(\vec{r}')\mathrm{d}v'$$

und

$$\int_V \nabla'\times[\mathsf{K}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')]\mathrm{d}v' = -\oint_F \mathrm{d}\vec{f}'\times[\mathsf{K}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')]$$

benötigt, wobei sich die letztere direkt aus dem Greenschen Integralsatz ergibt. Hieraus ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
&-\oint_F \mathrm{d}\vec{f}'\times[\mathsf{K}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')] + \nabla\times\int_V \mathsf{K}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}v' \\
&= \int_V \nabla'\times[\mathsf{K}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')]\mathrm{d}v' - \int_V [\nabla'\psi(\vec{r};\vec{r}')]\times\mathsf{K}(\vec{r}')\mathrm{d}v' \\
&= \int_V [\nabla'\times\mathsf{K}(\vec{r}')]\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}v',
\end{aligned}$$

wobei

$$\nabla\times(\psi\vec{v}) = \psi\ \nabla\times\vec{v} + (\nabla\psi)\times\vec{v}$$

verwendet wurde. Nochmals zusammenhängend dargestellt ergibt sich also:

$$\int_V [\nabla'\times\mathsf{K}(\vec{r}')]\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}v' = -\oint_F \mathrm{d}\vec{f}'\times\mathsf{K}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') + \nabla\times\int_V \mathsf{K}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}v'. \qquad (3)$$

Die oben allgemein eingeführte Vektorfunktion K wird jetzt durch die elektrische Feldstärke über

$$\mathsf{K}(\vec{r}') = \mathrm{rot}'\mathsf{E}(\vec{r}') = \nabla'\times\mathsf{E}(\vec{r}')$$

definiert und in die obige Integralgleichung (3) eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_V [\nabla' \times \nabla' \times \mathsf{E}(\vec{r}')]\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}v' \\
&\quad = -\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times [\nabla' \times \mathsf{E}(\vec{r}')]\psi(\vec{r};\vec{r}') + \nabla \times \int\limits_V [\nabla' \times \mathsf{E}(\vec{r}')]\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}v'.
\end{aligned}
$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite wird nun mittels Gleichung (3) ausgedrückt:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_V [\nabla' \times \nabla' \times \mathsf{E}(\vec{r}')]\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}v' \\
&\quad = -\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times [\nabla' \times \mathsf{E}(\vec{r}')]\psi(\vec{r};\vec{r}') - \nabla \times \oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') \\
&\qquad +\nabla \times \nabla \times \int\limits_V \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}v'.
\end{aligned}
$$

Durch Subtraktion des Integrals

$$
k^2 \int\limits_V \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}v'
$$

von beiden Seiten erhält man:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_V [\nabla' \times \nabla' \times \mathsf{E}(\vec{r}') - k^2\mathsf{E}(\vec{r}')]\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}v' \\
&\quad = -\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times [\nabla' \times \mathsf{E}(\vec{r}')]\psi(\vec{r};\vec{r}') - \nabla \times \oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') \\
&\qquad +(\nabla \times \nabla \times\ -k^2) \int\limits_V \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}v'.
\end{aligned}
$$

Die linke Seite dieser Gleichung verschwindet, weil E die homogene Wellengleichung erfüllt und quellenfrei ist. Für den Operator vor dem letzten Integral auf der rechten Seite ergibt sich

$$
(\nabla \times \nabla \times\ -k^2) = (\mathrm{rot\ rot}\ -k^2) = (\mathrm{grad\ div}\ -\nabla^2\ -k^2) = \mathrm{grad\ div},
$$

da die Greensche Funktion die skalare Wellengleichung erfüllt.

$$
\begin{aligned}
0 &= -\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathrm{rot}'\mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') - \mathrm{rot}\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') \\
&\quad +\mathrm{grad\ div}\int\limits_V \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}v'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathrm{rot}'\mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') - \mathrm{rot}\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') \\
&\quad +\mathrm{grad}\int\limits_V \mathsf{E}(\vec{r}')\mathrm{grad}\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}v' \\
&= -\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathrm{rot}'\mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') - \mathrm{rot}\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') \\
&\quad -\mathrm{grad}\int\limits_V \mathrm{div}'[\mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')]\mathrm{d}v'.
\end{aligned}
$$

Der letzte Schritt ergibt sich aus

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}'[\mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')] &= \mathrm{div}'\mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') + \mathsf{E}(\vec{r}')\mathrm{grad}'\psi(\vec{r};\vec{r}') \\
&= \mathsf{E}(\vec{r}')\mathrm{grad}'\psi(\vec{r};\vec{r}') \\
&= -\mathsf{E}(\vec{r}')\mathrm{grad}\psi(\vec{r};\vec{r}'),
\end{aligned}
$$

wobei die Quellenfreiheit der elektrischen Feldstärke ausgenutzt wurde. Durch Anwendung des Satzes von Gauß auf den letzten Integralterm ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
0 &= -\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathrm{rot}'\mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') - \mathrm{rot}\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') \\
&\quad +\mathrm{grad}\oint\limits_F \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}\vec{f}'.
\end{aligned}
$$

Der Punkt $P(x;y;z)$ lag bisher außerhalb von V. Um diese Einschränkung nun aufzuheben, wird die Polstelle um P durch eine kleine Kugel V_0 mit der Oberfläche F_0 vom Volumen V abgetrennt. Der Flächennormalenvektor der Kugeloberfläche soll dabei nach außen zeigen. Aufgrund dieser Definitionen ergibt sich somit:

$$
\begin{aligned}
0 &= -\oint\limits_{F+F_0} \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathrm{rot}'\mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') - \mathrm{rot}\oint\limits_{F+F_0} \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') \\
&\quad +\mathrm{grad}\oint\limits_{F+F_0} \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}\vec{f}'.
\end{aligned}
$$

Der Radius der Kugel soll nun in einem Grenzübergang gegen Null gehen. Das Integral

$$
-\oint\limits_{F_0} \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathrm{rot}'\mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')
$$

liefert dann wegen $\psi(R)\mathrm{d}f' \sim R$ den Wert Null. Das zweite Integral über die Kugeloberfläche F_0 ergibt:

$$\begin{aligned}
-\mathrm{rot}\oint_{F_0} \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') &= -\oint_{F_0} \mathrm{rot}[\mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')] \\
&= -\oint_{F_0} \mathrm{grad}\psi(\vec{r};\vec{r}') \times [\mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')] \\
&= \oint_{F_0} \mathrm{grad}'\psi(\vec{r};\vec{r}') \times [\mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')].
\end{aligned}$$

Der Gradient ergibt sich zu:

$$\mathrm{grad}'\psi(R) = \frac{\partial}{\partial R}\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\vec{u}_R = -\left(jk + \frac{1}{R}\right)\psi(R)\vec{u}_R.$$

Dies mit $\vec{u}_R = \vec{n}$ in das zweite Integral über die Kugelfläche eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{rot}\oint_{F_0} \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') \\
&= -\oint_{F_0} \left(jk + \frac{1}{R}\right)\psi(\vec{r};\vec{r}')\vec{n} \times [\mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')] \\
&= -\oint_{F_0} \left(jk + \frac{1}{R}\right)\psi(\vec{r};\vec{r}')\{\mathrm{d}\vec{f}'[\vec{n}\mathsf{E}(\vec{r}')] - \mathsf{E}(\vec{r}')[\vec{n}\mathrm{d}\vec{f}']\} \\
&= -\oint_{F_0} \left(jk + \frac{1}{R}\right)\psi(\vec{r};\vec{r}')\{\mathrm{d}\vec{f}'[\vec{n}\mathsf{E}(\vec{r}')] - \mathsf{E}(\vec{r}')\mathrm{d}f'\}.
\end{aligned}$$

Das dritte Integral über die Kugelfläche ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\oint_{F_0} \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}\vec{f}' &= \oint_{F_0} \mathrm{grad}[\mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}\vec{f}'] \\
&= \oint_{F_0} \mathrm{grad}\psi(\vec{r};\vec{r}')[\mathsf{E}(\vec{r}')\mathrm{d}\vec{f}'] \\
&= -\oint_{F_0} \mathrm{grad}'\psi(\vec{r};\vec{r}')[\mathsf{E}(\vec{r}')\mathrm{d}\vec{f}'] \\
&= \oint_{F_0} \left(jk + \frac{1}{R}\right)\psi(\vec{r};\vec{r}')\vec{n}[\mathsf{E}(\vec{r}')\mathrm{d}\vec{f}'].
\end{aligned}$$

Die Addition des zweiten und dritten Integrals über die Kugelfläche ergibt:

$$-\mathrm{rot}\oint_{F_0} \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') + \mathrm{grad}\oint_{F_0} \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}\vec{f}'$$

$$\begin{aligned} &= -\oint\limits_{F_0}\left(jk+\frac{1}{R}\right)\psi(\vec{r};\vec{r}')[-\mathsf{E}(\vec{r}')]\mathrm{d}f' \\ &= \oint\limits_{F_0}\left(jk+\frac{1}{R}\right)\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathsf{E}(\vec{r}')\mathrm{d}f'. \end{aligned}$$

Der Grenzwert der Summe der beiden letzten Integrale ergibt sich also zu

$$\lim_{R\to 0}\oint\limits_{F_0}\left(jk+\frac{1}{R}\right)\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathsf{E}(\vec{r}')\mathrm{d}f' = 4\pi\mathsf{E}(\vec{r}).$$

Die ursprüngliche Integralgleichung wird damit zu:

$$\begin{aligned} -4\pi\mathsf{E}(\vec{r}) &= -\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathrm{rot}'\mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') - \mathrm{rot}\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') \\ &\quad +\mathrm{grad}\oint\limits_F \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}\vec{f}' \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} 4\pi\mathsf{E}(\vec{r}) &= \oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathrm{rot}'\mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') + \mathrm{rot}\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') \\ &\quad -\mathrm{grad}\oint\limits_F \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}\vec{f}'. \end{aligned}$$

Um die Divergenzbedingung

$$\mathrm{div}\mathsf{E}(\vec{r}) = 0$$

identisch zu erfüllen, bildet man auf beiden Seiten die Rotation:

$$4\pi\mathrm{rot}\mathsf{E}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathrm{rot}'\mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') + \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}').$$

Unter Beachtung der zweiten Maxwellschen Gleichung ergibt sich:

$$-4\pi j\omega\mu\mathsf{H}(\vec{r}) = -j\omega\mu\mathrm{rot}\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{H}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') + \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}'),$$

das heißt

$$\mathsf{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{H}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') - \frac{1}{j4\pi\omega\mu}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\oint\limits_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}').$$

Eine entsprechende Gleichung läßt sich auch für E auf analogem Wege erstellen. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} 4\pi\mathsf{H}(\vec{r}) &= \oint_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathrm{rot}'\mathsf{H}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') + \mathrm{rot}\oint_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{H}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') \\ &\quad -\mathrm{grad}\oint_F \mathsf{H}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}\vec{f}'. \end{aligned}$$

Die Bildung der Rotation ergibt:

$$4\pi\mathrm{rot}\mathsf{H}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\oint_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathrm{rot}'\mathsf{H}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') + \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\oint_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{H}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}').$$

Unter Berücksichtigung der ersten Maxwellschen Gleichung ergibt sich dann:

$$4\pi j\omega\varepsilon\mathsf{E}(\vec{r}) = j\omega\varepsilon\mathrm{rot}\oint_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') + \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\oint_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{H}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}'),$$

das heißt

$$\mathsf{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\oint_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') + \frac{1}{j4\pi\omega\varepsilon}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\oint_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{H}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}').$$

Für die elektrische und die magnetische Feldstärke ergeben sich also:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\oint_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') + \frac{1}{j4\pi\omega\varepsilon}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\oint_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{H}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}'), \\ \mathsf{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\oint_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{H}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}') - \frac{1}{j4\pi\omega\mu}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\oint_F \mathrm{d}\vec{f}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')\psi(\vec{r};\vec{r}'). \end{aligned}$$

Definiert man nun

$$G_0(\vec{r};\vec{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}$$

als die Greensche Funktion des freien Raumes,

$$\mathsf{M}(\vec{r}') = -\vec{n}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')$$

als magnetische Flächenstromdichte,

$$\mathsf{J}(\vec{r}') = \vec{n}' \times \mathsf{H}(\vec{r}')$$

als elektrische Flächenstromdichte,

$$\vec{\Pi}_m(\vec{r}) = \oint_F \mathsf{M}(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'$$

als magnetisches Vektorpotential und

$$\vec{\Pi}_e(\vec{r}) = \oint_F \mathsf{J}(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'$$

als elektrisches Vektorpotential, so ergeben sich die elektrische und die magnetische Feldstärke zu:

$$\mathsf{E}(\vec{r}) = -\mathrm{rot}\oint_F \mathsf{M}(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f' + \frac{1}{j\omega\varepsilon}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\oint_F \mathsf{J}(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f', \tag{4}$$

$$\mathsf{H}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\oint_F \mathsf{J}(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f' + \frac{1}{j\omega\mu}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\oint_F \mathsf{M}(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f', \tag{5}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\vec{r}) &= -\mathrm{rot}\vec{\Pi}_m(\vec{r}) + \frac{1}{j\omega\varepsilon}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{\Pi}_e(\vec{r}),\\ \mathsf{H}(\vec{r}) &= \mathrm{rot}\vec{\Pi}_e(\vec{r}) + \frac{1}{j\omega\mu}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{\Pi}_m(\vec{r}).\end{aligned}$$

Diese Gleichungen besagen, daß das elektromagnetische Feld in einem von F begrenzten Raum aus den Oberflächenströmen auf F berechenbar ist. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß dies in dieser Form nur für den Fall harmonischer Anregung gilt. Andernfalls wäre auch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit zu beachten.

Zur Berechnung der Admittanzmatrix des freien Raumes sollen nun die Gleichungen (4) und (5) des Kirchhoff-Huygensschen Prinzips verwendet werden. Zur Berechnung der Admittanzmatrix des Hohlleiters wurde die Aperturfläche F_A des Hohlleiters ideal leitend geschlossen. Um die auftretende Änderung der elektrischen Feldstärke wieder zu kompensieren, wurde die magnetische Oberflächenstromdichte M eingeführt. Hierdurch wurde der Raum I vom Raum II getrennt. Der Raum I konnte somit getrennt betrachtet werden. Im folgenden soll nun der Raum II isoliert betrachtet werden. Hierzu ersetzt man die leitende Außenfläche der Anordnung F_B durch äquivalente Oberflächenströme, ohne die Feldverteilung zu verändern. Dann kann über das Kirchhoff-Huygenssche Prinzip aus den Oberflächenströmen das elektromagnetische Feld im gesamten Raum II ermittelt werden.

Da auf der Oberfläche eines idealen elektrischen Leiters keine elektrischen Tangentialfeldstärken vorkommen können, ist die magnetische Oberflächenstromdichte auf F_B gleich Null. Für die Oberflächenstromdichten ergibt sich damit also insgesamt:

$$\mathsf{M}(\vec{r}') = \begin{cases} -\vec{n}' \times \mathsf{E}(\vec{r}') & \text{auf } F_A \\ 0 & \text{auf } F_B \end{cases},$$

$$\mathsf{J}(\vec{r}') = \vec{n}' \times \mathsf{H}(\vec{r}') \quad \text{auf } F_A \text{ und } F_B.$$

Die magnetische Oberflächenstromdichte M wird nun wieder nach Q Basisfunktionen M_q und die elektrische Oberflächenstromdichte J nach L Basisfunktionen J_l entwickelt:

$$\mathsf{M}(\vec{r}') = \begin{cases} Z \sum\limits_{q=1}^{Q} V_q \mathsf{M}_q(\vec{r}') & \text{auf } F_A \\ 0 & \text{auf } F_B \end{cases},$$

$$\mathsf{J}(\vec{r}') = \sum_{l=1}^{L} I_l \mathsf{J}_l(\vec{r}') \quad \text{auf } F_A \text{ und } F_B.$$

Die neu eingeführten I_l sind dabei die Entwicklungskoeffizienten der elektrischen Oberflächenstromdichte. Diese beiden Entwicklungen werden nun in die beiden Gleichungen des Kirchhoff-Huygensschen Prinzips, die zuvor mit $\vec{n}$ vektormultipliziert wurden, eingesetzt:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{auf } F_A: & -Z \sum\limits_{q=1}^{Q} V_q \mathsf{M}_q(\vec{r}) \\ \text{auf } F_B: & 0 \end{array}\right\} = -Z \sum_{q=1}^{Q} V_q \vec{n} \times \mathrm{rot} \int\limits_{F_A} \mathsf{M}_q(\vec{r}') G_0(\vec{r};\vec{r}') \mathrm{d}f'$$
$$+ \frac{1}{j\omega\varepsilon} \sum_{l=1}^{L} I_l \vec{n} \times \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{J}_l(\vec{r}') G_0(\vec{r};\vec{r}') \mathrm{d}f',$$

$$\text{auf } F_A \text{ und } F_B: \sum_{l=1}^{L} I_l \mathsf{J}_l(\vec{r}) = \sum_{l=1}^{L} I_l \vec{n} \times \mathrm{rot} \int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{J}_l(\vec{r}') G_0(\vec{r};\vec{r}') \mathrm{d}f'$$
$$+ \frac{Z}{j\omega\mu} \sum_{q=1}^{Q} V_q \vec{n} \times \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \int\limits_{F_A} \mathsf{M}_q(\vec{r}') G_0(\vec{r};\vec{r}') \mathrm{d}f'.$$

Nun werden auch hier wieder $\bar{P}$ Testfunktionen U_p und W_p mit

$$\mathsf{W}_p = -\vec{n} \times \mathsf{U}_p$$

beziehungsweise

$$\mathsf{U}_p = \vec{n} \times \mathsf{W}_p$$

eingeführt. Bildet man nun im weiteren das Innere Produkt der einzelnen Gewichtsfunktionen W_p mit der ersten der beiden obigen Gleichungen und der einzelnen Gewichtsfunktionen U_p mit der zweiten der beiden obigen Gleichungen, so ergeben sich mit

$$\mathsf{W}_p \cdot \mathsf{M}_q = -(\vec{n} \times \mathsf{U}_p) \cdot \mathsf{M}_q = \mathsf{U}_p \cdot (\vec{n} \times \mathsf{M}_q),$$

$$\mathsf{W}_p \cdot (\vec{n} \times \mathrm{rot}) = -(\vec{n} \times \mathsf{U}_p) \cdot (\vec{n} \times \mathrm{rot}) = -\mathsf{U}_p \cdot \mathrm{rot}$$

und

$$\mathsf{U}_p \cdot \mathsf{J}_l = (\vec{n} \times \mathsf{W}_p) \cdot \mathsf{J}_l = -\mathsf{W}_p \cdot (\vec{n} \times \mathsf{J}_l),$$

$$\mathsf{U}_p \cdot (\vec{n} \times \mathrm{rot}) = (\vec{n} \times \mathsf{W}_p) \cdot (\vec{n} \times \mathrm{rot}) = \mathsf{W}_p \cdot \mathrm{rot}$$

zwei Gleichungssysteme mit jeweils $\bar{P}$ Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{auf } F_A: & -Z \sum\limits_{q=1}^{Q} V_q \langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), \vec{n} \times \mathsf{M}_q(\vec{r}) \rangle \\ \text{auf } F_B: & 0 \end{array}\right\} = Z \sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), \mathrm{rot} \int\limits_{F_A} \mathsf{M}_q(\vec{r}\,') G_0(\vec{r};\vec{r}\,') \mathrm{d}f' \rangle$$

$$-\frac{1}{j\omega\varepsilon} \sum_{l=1}^{L} I_l \langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{J}_l(\vec{r}\,') G_0(\vec{r};\vec{r}\,') \mathrm{d}f' \rangle,$$

$$\text{auf } F_A \text{ und } F_B: \ -\sum_{l=1}^{L} I_l \langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \vec{n} \times \mathsf{J}_l(\vec{r}) \rangle = \sum_{l=1}^{L} I_l \langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot} \int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{J}_l(\vec{r}\,') G_0(\vec{r};\vec{r}\,') \mathrm{d}f' \rangle$$

$$+\frac{Z}{j\omega\mu} \sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \int\limits_{F_A} \mathsf{M}_q(\vec{r}\,') G_0(\vec{r};\vec{r}\,') \mathrm{d}f' \rangle.$$

Um beiden Gleichungssystemen eine einheitliche Form zu geben, wird das erste nun durch $-Z$ dividiert:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{auf } F_A: & \sum\limits_{q=1}^{Q} V_q \langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), \vec{n} \times \mathsf{M}_q(\vec{r}) \rangle \\ \text{auf } F_B: & 0 \end{array}\right\} = -\sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), \mathrm{rot} \int\limits_{F_A} \mathsf{M}_q(\vec{r}\,') G_0(\vec{r};\vec{r}\,') \mathrm{d}f' \rangle$$

$$+\frac{1}{jk} \sum_{l=1}^{L} I_l \langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{J}_l(\vec{r}\,') G_0(\vec{r};\vec{r}\,') \mathrm{d}f' \rangle,$$

$$\text{auf } F_A \text{ und } F_B: \ -\sum_{l=1}^{L} I_l \langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \vec{n} \times \mathsf{J}_l(\vec{r}) \rangle = \sum_{l=1}^{L} I_l \langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot} \int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{J}_l(\vec{r}\,') G_0(\vec{r};\vec{r}\,') \mathrm{d}f' \rangle$$

$$+\frac{1}{jk} \sum_{q=1}^{Q} V_q \langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \int\limits_{F_A} \mathsf{M}_q(\vec{r}\,') G_0(\vec{r};\vec{r}\,') \mathrm{d}f' \rangle.$$

Hierbei stellt k die Freiraumwellenzahl dar. Nun geht man wieder auf die Matrizenschreibweise über. Mit

$$\left[\langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), -\mathrm{rot} \int\limits_{F_A} \mathsf{M}_q(\vec{r}\,') G_0(\vec{r};\vec{r}\,') \mathrm{d}f' \rangle \right] = [S^M_{pq}] \quad = \quad \underline{S}^M,$$

$$\left[\frac{1}{jk} \langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{J}_l(\vec{r}\,') G_0(\vec{r};\vec{r}\,') \mathrm{d}f' \rangle \right] = [T^J_{pl}] \quad = \quad \underline{T}^J,$$

$$
\begin{aligned}
\left[\langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot} \int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{J}_l(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'\rangle\right] = [S^J_{pl}] &= \underline{S}^J, \\
\left[\frac{1}{jk}\langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\ \mathrm{rot} \int\limits_{F_A} \mathsf{M}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'\rangle\right] = [T^M_{pq}] &= \underline{T}^M, \\
[\langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), \vec{n}\times \mathsf{M}_q(\vec{r})\rangle] = [D^M_{pq}] &= \underline{D}^M, \\
[\langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), -\vec{n}\times \mathsf{J}_l(\vec{r})\rangle] = [D^J_{pl}] &= \underline{D}^J, \\
[V_q] &= \underline{V}, \\
[I_l] &= \underline{I},
\end{aligned}
$$

ergeben sich die beiden Gleichungssysteme in der Form:

$$
\begin{aligned}
\underline{D}^M\underline{V} &= \underline{S}^M\underline{V} + \underline{T}^J\underline{I}, \\
\underline{D}^J\underline{I} &= \underline{S}^J\underline{I} + \underline{T}^M\underline{V}.
\end{aligned}
$$

Um die Gleichungen nach $\underline{I}$ auflösen zu können, setzt man $\bar{P} = L$. Die Anwendung der Matrizenalgebra liefert dann:

$$
\begin{aligned}
\underline{I} &= \left(\underline{T}^J\right)^{-1}\left(\underline{D}^M - \underline{S}^M\right)\underline{V}, \\
\underline{I} &= \left(\underline{D}^J - \underline{S}^J\right)^{-1}\underline{T}^M\underline{V}.
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Linearität des Integraloperators H_{II}, gilt auf F_A:

$$
Z\sum_{q=1}^{Q} V_q\langle \mathsf{W}_p, \mathsf{H}_{II}(\mathsf{M}_q)\rangle = \langle \mathsf{W}_p, -\vec{n}\times \mathsf{J}\rangle = \sum_{l=1}^{L} I_l\langle \mathsf{W}_p, -\vec{n}\times \mathsf{J}_l\rangle.
$$

Hieraus ergibt sich direkt die Beziehung

$$
\underline{T}^{II}\underline{V} = \underline{E}_{P\bar{P}}\,\underline{D}^J\underline{I}, \tag{6}
$$

wobei $\underline{E}_{P\bar{P}}$ aus P Zeilen und $\bar{P}$ Spalten besteht und alle ihre Elemente gleich Null sind, mit Ausnahme der Elemente der Hauptdiagonalen, die gleich eins sind. Diese Matrix trägt der Tatsache Rechnung, daß dieser Zusammenhang nur auf F_A gilt und daß die Zeilenzahlen von $\underline{T}^{II}$ und $\underline{D}^J$ verschieden sind. Durch Einsetzen der oben gewonnenen Zusammenhänge für $\underline{I}$ in diese Gleichung, erhält man zwei Ausdrücke für die Admittanzmatrix des Raumes II:

$$
\begin{aligned}
\underline{T}^{w1} &= \underline{E}_{P\bar{P}}\,\underline{D}^J\left(\underline{T}^J\right)^{-1}\left(\underline{D}^M - \underline{S}^M\right), \\
\underline{T}^{w2} &= \underline{E}_{P\bar{P}}\,\underline{D}^J\left(\underline{D}^J - \underline{S}^J\right)^{-1}\underline{T}^M.
\end{aligned}
$$

Die Matrizen $\underline{T}^{w1}$ und $\underline{T}^{w2}$ bestehen aus P Zeilen und Q Spalten. Um sie in die Gleichung (1) einsetzen zu können, muß $P = Q$ gesetzt werden. Zur Berechnung beider Matrizen müssen Matrizeninversionen durchgeführt werden. In der Nähe von inneren Resonanzfrequenzen entarten jedoch die Lösungen mit den Matrizen $\underline{T}^{w1}$ und $\underline{T}^{w2}$, was zu erheblichen Fehlern bei der numerischen Auswertung führt [2]. Bei den inneren Resonanzfrequenzen handelt es sich um die Eigenfrequenzen des Hohlraumes, der von den Flächen F_A und F_B eingeschlossen wird. Nachfolgend soll ein Ausdruck für die Admittanzmatrix des Raumes II mit Hilfe des Verfahrens der „kombinierten Quellenverteilung" nach Harrington ermittelt werden, der die obigen Probleme vermeidet. Dazu wird anstelle der Oberflächenstromdichten J und M auf den Flächen F_A und F_B eine kombinierte Quellenverteilung eingeführt, die im Raum II das gleiche Feld erzeugen soll, wie die ursprüngliche. Die kombinierten Quellen bestehen aus einer fiktiven elektrischen und einer fiktiven magnetischen Oberflächenstromdichte, die über

$$\mathsf{M}_c(\vec{r}') = Z\vec{n}' \times \mathsf{J}_c(\vec{r}')$$

auf F_A und F_B miteinander verknüpft sein sollen. Mit Hilfe eines Satzes von $\bar{Q}$ Basisfunktionen kann man die kombinierten Oberflächenstromdichten in

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}_c(\vec{r}') &= Z\sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q \vec{n}' \times \mathsf{C}_q(\vec{r}') \qquad \text{und} \\
\mathsf{J}_c(\vec{r}') &= \sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q \mathsf{C}_q(\vec{r}')
\end{aligned}$$

entwickeln. Dabei steht X_q für die noch unbekannten Entwicklungskoeffizienten. Man geht auch hier wieder von den Gleichungen des Kirchhoff-Huygensschen Prinzips aus. Für die Flächenstromdichten J und M setzt man nun die Entwicklungen der fiktiven Flächenstromdichten M_c und J_c ein. Anschließend multipliziert man noch beide Seiten vektoriell mit $\vec{n}$ und erhält:

$$\begin{aligned}
-Z\sum_{q=1}^{Q} V_q \mathsf{M}_q(\vec{r}) &= -Z\sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q \vec{n} \times \operatorname{rot} \int\limits_{F_A+F_B} \vec{n}' \times \mathsf{C}_q(\vec{r}') G_0(\vec{r};\vec{r}') \mathrm{d}f' \\
&\quad + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q \vec{n} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{C}_q(\vec{r}') G_0(\vec{r};\vec{r}') \mathrm{d}f',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{L} I_l \mathsf{J}_l(\vec{r}) &= \sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q \vec{n} \times \operatorname{rot} \int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{C}_q(\vec{r}') G_0(\vec{r};\vec{r}') \mathrm{d}f' \\
&\quad + \frac{Z}{j\omega\mu} \sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q \vec{n} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot} \int\limits_{F_A+F_B} \vec{n}' \times \mathsf{C}_q(\vec{r}') G_0(\vec{r};\vec{r}') \mathrm{d}f'.
\end{aligned}$$

Bildet man erneut das Innere Produkt der Gewichtsfunktionen W_p mit der ersten der beiden Gleichungen und der Gewichtsfunktionen U_p und der zweiten der beiden Gleichungen, so erhält man zwei Gleichungssysteme mit je $\bar{P}$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
-Z\sum_{q=1}^{Q} V_q\langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), \vec{n}\times \mathsf{M}_q(\vec{r})\rangle &= Z\sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q\langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\int\limits_{F_A+F_B} \vec{n}'\times \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'\rangle \\
&\quad -\frac{1}{j\omega\varepsilon}\sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q\langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), \mathrm{rot\ rot}\int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'\rangle, \\
-\sum_{l=1}^{L} I_l\langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \vec{n}\times \mathsf{J}_l(\vec{r})\rangle &= \sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q\langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'\rangle \\
&\quad +\frac{Z}{j\omega\mu}\sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q\langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot\ rot}\int\limits_{F_A+F_B} \vec{n}'\times \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'\rangle.
\end{aligned}$$

Zur Angleichung der Strukturen beider Gleichungssysteme wird das erste erneut durch $-Z$ dividiert:

$$\begin{aligned}
\sum_{q=1}^{Q} V_q\langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), \vec{n}\times \mathsf{M}_q(\vec{r})\rangle &= -\sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q\langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\int\limits_{F_A+F_B} \vec{n}'\times \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'\rangle \\
&\quad +\frac{1}{jk}\sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q\langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), \mathrm{rot\ rot}\int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'\rangle, \\
-\sum_{l=1}^{L} I_l\langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \vec{n}\times \mathsf{J}_l(\vec{r})\rangle &= \sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q\langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'\rangle \\
&\quad +\frac{1}{jk}\sum_{q=1}^{\bar{Q}} X_q\langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot\ rot}\int\limits_{F_A+F_B} \vec{n}'\times \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'\rangle.
\end{aligned}$$

Beide Gleichungssysteme können mittels der Definitionen

$$\begin{aligned}
\left[\langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), -\mathrm{rot}\int\limits_{F_A+F_B} \vec{n}'\times \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'\rangle\right] = [S^X_{pq}] &= \underline{S}^X, \\
\left[\frac{1}{jk}\langle \mathsf{U}_p(\vec{r}), \mathrm{rot\ rot}\int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'\rangle\right] = [T^C_{pq}] &= \underline{T}^C, \\
\left[\langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \mathrm{rot}\int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'\rangle\right] = [S^C_{pq}] &= \underline{S}^C,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{jk}\langle \mathsf{W}_p(\vec{r}), \text{rot rot} \int\limits_{F_A+F_B} \vec{n}' \times \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'\rangle\right] = [T^X_{pq}] &= \underline{T}^X, \\ [X_q] &= \underline{C}\end{aligned}$$

wieder in Matrizenschreibweise angegeben werden:

$$\begin{aligned}\underline{D}^M\underline{V} &= \left(\underline{S}^X + \underline{T}^C\right)\underline{C}, \\ \underline{D}^J\underline{I} &= \left(\underline{S}^C + \underline{T}^X\right)\underline{C}.\end{aligned}$$

Nun löst man die erste der beiden Gleichungen nach $\underline{C}$ auf und setzt sie in die zweite ein. Die Auflösung dieser nach $\underline{I}$ ergibt dann:

$$\underline{I} = \left(\underline{D}^J\right)^{-1}\left(\underline{S}^C + \underline{T}^X\right)\left(\underline{S}^X + \underline{T}^C\right)^{-1}\underline{D}^M\underline{V}.$$

Mit Hilfe der oben aufgestellten Gleichung (6) erhält man schließlich einen dritten Ausdruck für die Admittanzmatrix des Raumes II:

$$\underline{T}^{w3} = \underline{E}_{P\bar{P}}\left(\underline{S}^C + \underline{T}^X\right)\left(\underline{S}^X + \underline{T}^C\right)^{-1}\underline{D}^M.$$

2.3.1 Behandlung der Singularitäten der S-Matrizen

Als problematisch stellt sich bei der Behandlung der S-Matrizen vor allem die Singularität der Greenschen Funktion bei $\vec{r} = \vec{r}'$ dar. Diese erfordert eine Grenzwertbetrachtung der entsprechenden Ausdrücke. Dazu hebt man den Beobachtungspunkt mit Hilfe des Vektors $\vec{u}_\delta\delta$ etwas von der Integrationsfläche ab und betrachtet den Grenzwert für $\delta \to 0$. Die Singularität werde durch eine kleine kreisförmige Fläche ΔF umschlossen. Der Ausdruck

$$\text{rot}\int\limits_F \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f'$$

läßt sich dann als

$$\text{rot}\int\limits_{F-\Delta F} \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}f' + \lim_{\delta\to 0}\text{rot}\int\limits_{\Delta F} \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r}+\vec{u}_\delta\delta;\vec{r}')\mathrm{d}f'$$

darstellen. Das Integral über die Fläche $F - \Delta F$ enthält keine Singularität mehr. Zur Berechnung des Integrals über ΔF ist es zweckmäßig, ins Zylinderkoordinatensystem überzugehen, wobei ΔF in der Ebene $z = 0$ liegen soll. Die Rotation kann in das Integral gezogen werden. Da jedoch nur die Greensche Funktion von den Koordinaten des Beobachtungspunktes abhängt, kann die Bildung der Rotation gemäß

$$\begin{aligned}\text{rot}(\mathsf{C}_q(\vec{r}')\cdot G_0(\vec{r};\vec{r}')) &= G_0(\vec{r};\vec{r}')\text{rot}\mathsf{C}_q(\vec{r}') + (\text{grad}G_0(\vec{r};\vec{r}'))\times\mathsf{C}_q(\vec{r}') \\ &= (\text{grad}G_0(\vec{r};\vec{r}'))\times\mathsf{C}_q(\vec{r}')\end{aligned}$$

im wesentlichen auf die Bildung des Gradienten der Greenschen Funktion zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} G_0(\vec{r}+\vec{u}_\delta\delta, \vec{r}') &= \frac{\partial}{\partial R}\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\vec{u}_R = \frac{1}{4\pi}\left(-jk-\frac{1}{R}\right)\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\vec{u}_R \\ &= -\frac{1}{4\pi}\frac{1+jkR}{R^2}\mathrm{e}^{-jkR}\vec{u}_R, \end{aligned}$$

$$R = \sqrt{\varrho'^2+\delta^2},$$

$$\vec{u}_R = \frac{-\vec{u}_x\varrho'\cos\varphi' - \vec{u}_y\varrho'\sin\varphi' + \vec{u}_z\delta}{R}.$$

Für das Integral über ΔF ergibt sich damit:

$$\lim_{\delta\to 0} \mathrm{rot} \int\limits_{\Delta F} \mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r}+\vec{u}_\delta\delta;\vec{r}')\mathrm{d}f' =$$

$$-\frac{1}{4\pi}\lim_{\delta\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\varrho_{\Delta F}}\frac{1+jkR}{R^3}\mathrm{e}^{-jkR}(-\vec{u}_x\varrho'\cos\varphi' - \vec{u}_y\varrho'\sin\varphi' + \vec{u}_z\delta)\times\mathsf{C}_q(\vec{r}')\varrho'\mathrm{d}\varrho'\mathrm{d}\varphi'.$$

Wenn die Fläche ΔF klein genug ist, kann die Änderung von C_q über der Fläche vernachlässigt werden. Die Ausführung der Integration über φ' ergibt dann:

$$-\frac{1}{2}\vec{u}_z\times\mathsf{C}_q(\vec{r})\lim_{\delta\to 0}\delta\int\limits_0^{\varrho_{\Delta F}}\frac{1+jkR}{R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\varrho'\mathrm{d}\varrho'.$$

Die Integration nach ϱ' läßt sich mit

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varrho'} &= \frac{\varrho'}{R}, \\ R\,\mathrm{d}R &= \varrho'\,\mathrm{d}\varrho', \\ R(\varrho'=0) &= \delta \end{aligned}$$

und

$$R(\varrho'=\varrho_{\Delta F}) = \sqrt{\varrho_{\Delta F}^2+\delta^2}$$

als eine Integration nach R schreiben:

$$-\frac{1}{2}\vec{u}_z\times\mathsf{C}_q(\vec{r})\lim_{\delta\to 0}\delta\int\limits_\delta^{\sqrt{\varrho_{\Delta F}^2+\delta^2}}\frac{1+jkR}{R^2}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}R$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}\vec{n}\times\mathsf{C}_q(\vec{r})\lim_{\delta\to 0}\delta\left[-\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\right]_\delta^{\sqrt{\varrho_{\Delta F}^2+\delta^2}} \\ &= \frac{1}{2}\vec{n}\times\mathsf{C}_q(\vec{r})\lim_{\delta\to 0}\delta\left(\frac{\mathrm{e}^{-jk\sqrt{\varrho_{\Delta F}^2+\delta^2}}}{\sqrt{\varrho_{\Delta F}^2+\delta^2}} - \frac{\mathrm{e}^{-jk\delta}}{\delta}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{n}\times\mathsf{C}_q(\vec{r}). \end{aligned}$$

Das Integral wurde unter Verwendung von

$$\int \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(-\frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^{n-1}} + a\int \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^{n-1}}\mathrm{d}x\right) \quad \text{für } n \neq 1$$

berechnet [4]. Damit ergibt sich zum Beispiel als Ausdruck für die Matrix $\underline{S}^C$:

$$\underline{S}^C = \left[\langle \mathsf{W}_p, -\frac{1}{2}\vec{n} \times \mathsf{C}_q(\vec{r}) + \text{V.p.} \int\limits_F \text{rot}[\mathsf{C}_q(\vec{r}')G_0(\vec{r};\vec{r}')]\mathrm{d}f'\rangle\right],$$

wobei das Integral im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu bilden ist: Die Singularität wird zunächst aus dem Integrationsbereich ausgenommen und die dabei entstehende Lücke dann mit *einem* Grenzübergang geschlossen.

2.3.2 Behandlung der Singularitäten der T-Matrizen

Die Behandlung der S-Matrizen erforderte die Abspaltung der Singularitäten. Dies ist bei der Berechnung der T-Matrizen nicht notwendig. Bei der späteren konkreten Berechnung der T-Matrizen wird eine Umformung durchgeführt, die sich schon an dieser Stelle gut verwenden läßt:

$$\text{rot rot} \int\limits_F \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'} G_0 \mathrm{d}f' = k^2 \int\limits_F \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'} G_0 \mathrm{d}f' + \text{grad} \int\limits_F G_0 \text{div}' \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'} \mathrm{d}f'.$$

Schreibt man nun den Gradienten unter das Integralzeichen, dann ergibt sich:

$$\text{rot rot} \int\limits_F \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'} G_0 \mathrm{d}f' = k^2 \int\limits_F \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'} G_0 \mathrm{d}f' - \int\limits_F \text{grad}' G_0 \text{div}' \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'} \mathrm{d}f'.$$

Bei einer jetzt notwendigen Grenzwertbetrachtung liefert das erste Integral auf der gegen Null gehenden Kreisoberfläche den Wert Null. Das zweite Integral liefert nur eine zur Oberfläche normale Komponente, die nach der Bildung des Inneren Produktes keinen Beitrag mehr liefert.

3 Übergang auf rotationssymmetrische Koordinaten

Im vorangegangenen Abschnitt wurden die zur Berechnung der Stromverteilung auf einem Hornstrahler notwendigen Matrizen allgemein hergeleitet. Das Problem, das im Rahmen dieser Arbeit behandelt werden soll, ist jedoch rotationssymmetrisch, so daß ein Übergang in das Zylinderkoordinatensystem sinnvoll ist. Im folgenden werden daher die formalen Ausdrücke des vorigen Abschnittes in Zylinderkoordinaten übertragen und in der zu berechnenden Form angegeben.

3.1 Modusvektoren einer Rundhohlleitung

Für die Modusvektoren $\vec{e}^H$ gilt

$$\vec{e}^H = \vec{u}_z \times \nabla_t T^H,$$

wobei sich T^H aus

$$\frac{1}{T^H}\nabla_t^2 T^H = -k_{Hc}^2$$

ergibt. Für die Modusvektoren $\vec{e}^E$ gilt entsprechend

$$\vec{e}^E = -\nabla_t T^E,$$

wobei sich T^E aus

$$\frac{1}{T^E}\nabla_t^2 T^E = -k_{Ec}^2$$

ergibt. Mit dem tangentialen Nablaoperator in Zylinderkoordinaten

$$\nabla_t = \vec{u}_\varrho \frac{\partial}{\partial\varrho} + \vec{u}_\varphi \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

und dessen „Quadrat“[2]

$$\nabla_t^2 = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\varphi^2}$$

ergeben sich die Bestimmungsdifferentialgleichungen für $T^{H,E} = T$ zu:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}T + \frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}T + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}T + kc^2 T = 0.$$

Die Anwendung des Bernoullischen Produktansatzes $T(\varrho;\varphi) = T_1(\varrho)T_2(\varphi)$ ergibt:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial\varrho^2}T_2 + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial T_1}{\partial\varrho}T_2 + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 T_2}{\partial\varphi^2}T_1 + k_c^2 T_1 T_2 = 0.$$

[2]Man beachte, daß das Rechnen mit ∇ nur in kartesichen Koordinaten möglich ist.

Nach der Division durch T_1T_2 ergibt sich:

$$\frac{1}{T_1}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \varrho^2}+\frac{1}{T_1}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial T_1}{\partial \varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\underbrace{\frac{1}{T_2}\frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2}}_{-m^2}+k_c^2=0.$$

Hieraus folgt dann

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2}+m^2T_2=0$$

und

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial \varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial T_1}{\partial \varrho}+T_1\left(k_c^2-\frac{m^2}{\varrho^2}\right)=0,$$

wobei die letztere Differentialgleichung die Besselsche Differentialgleichung darstellt. Als Lösung der ersten Differentialgleichung ergibt sich

$$T_2(\varphi)=K_1\sin m\varphi+K_2\cos m\varphi$$

und als Lösung der Besselschen Differentialgleichung ergibt sich

$$T_1(\varrho)=K_3J_m(k_c\varrho)+K_4N_m(k_c\varrho),$$

sofern m als eine ganze Zahl angesetzt wird, wobei J_m für die Besselsche Funktion erster Art und m-ter Ordnung und N_m für die Besselsche Funktion zweiter Art[3] und m-ter Ordnung stehen. K_4 ergibt sich dabei unmittelbar zu Null, da das elektromagnetische Feld bei $\varrho=0$ keine Polstelle besitzen darf. Die anderen Konstanten können zunächst beliebig gewählt werden, da die Modusvektoren im folgenden sowieso noch normiert werden müssen und die Position $\varphi=0$ beliebig festgelegt werden kann. Damit ergibt sich also:

$$T(\varrho;\varphi)=\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}J_m(k_c\varrho).$$

Für die E-Wellen ergibt sich damit

$$T^E(\varrho;\varphi)=\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}J_m(k_{mn}^E\varrho),$$

wobei sich k_{mn}^E aus der Randbedingung der auf der Leiteroberfläche verschwindenden elektrischen Tangentialfeldstärke aus

$$J_m(k_{mn}^E\varrho)|_{\varrho=a}=0$$

ergibt, wobei a der Innenradius des Hohlleiters ist. Für die H-Wellen ergibt sich dementsprechend

$$T^H(\varrho;\varphi)=\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}J_m(k_{mn}^H\varrho),$$

[3] auch Neumannfunktion genannt

wobei sich k_{mn}^H aus der Randbedingung der auf der Leiteroberfläche verschwindenden elektrischen Tangentialfeldstärke aus

$$J_m'(k_{mn}^H\varrho)|_{\varrho=a} = 0$$

ergibt. Die geschweiften Klammern stellen dabei zwei Möglichkeiten dar. Im folgenden sei dabei vereinbart, daß entweder die „obere" oder die „untere" Möglichkeit bei allen möglichen Auswahlen verwendet wird. Deshalb sind auch die Sinus- und Kosinusfunktionen vertauscht worden, damit sich bei jeder möglichen Auswahl in beiden Fällen die gleiche Polarisation ergibt. Durch Anwendung der weiter oben hergeleiteten Beziehungen ergibt sich der Vektor für den mn-Modus der H-Wellen zu:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_{mn}^{H\diamond} &= \vec{u}_z \times \nabla_t T^H \\
&= \vec{u}_z \times \left(\vec{u}_\varrho \frac{\partial}{\partial\varrho} + \vec{u}_\varphi \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} J_m(k_{mn}^H\varrho) \\
&= \vec{u}_\varphi \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} J_m'(k_{mn}^H\varrho)k_{mn}^H - \vec{u}_\varrho \frac{m}{\varrho} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ -\sin m\varphi \end{Bmatrix} J_m(k_{mn}^H\varrho),
\end{aligned}$$

und für den Vektor des mn-Modus der E-Wellen:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_{mn}^{E\diamond} &= -\nabla_t T^E \\
&= -\left[\vec{u}_\varrho \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} J_m'(k_{mn}^E\varrho)k_{mn}^E + \vec{u}_\varphi \frac{m}{\varrho} \begin{Bmatrix} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} J_m(k_{mn}^E\varrho)\right].
\end{aligned}$$

Die Raute soll darauf hinweisen, daß diese Vektoren noch normiert werden müssen, was im folgenden geschehen soll.

3.1.1 Normierung der Modusvektoren

Wie bereits angedeutet, müssen die Modusvektoren orthonormal sein. Da die Modusvektoren der E- und H-Wellen orthogonal zueinander sind, wie noch gezeigt wird, reicht es, die Vektoren der E- und H-Wellen getrennt zu betrachten. Hierbei gilt es nun

$$\int_{F_A} \vec{e}_{mn}^H \cdot \vec{e}_{pq}^H \mathrm{d}f = \begin{cases} 1 & \text{für } (m=p) \wedge (n=q) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\int_{F_A} \vec{e}_{mn}^E \cdot \vec{e}_{pq}^E \mathrm{d}f = \begin{cases} 1 & \text{für } (m=p) \wedge (n=q) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zu erfüllen. Zuerst seien nun die Modusvektoren der H-Wellen betrachtet. Das Flächenintegral ergibt sich in Zylinderkoordinaten zu

$$\int_{F_A} \mathrm{d}f = \int_0^{2\pi}\int_0^a \varrho \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\varphi.$$

Dabei liefert die Integration über φ nur für $m = p$ einen von Null verschiedenen Wert. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
\vec{e}^{H\diamond}_{mn} \cdot \vec{e}^{H\diamond}_{pq} &= \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \sin p\varphi \\ \cos m\varphi \cos p\varphi \end{Bmatrix} k^H_{mn} k^H_{pq} J'_m(k^H_{mn}\varrho) J'_p(k^H_{pq}\varrho) \\
&\quad + \frac{mp}{\varrho^2} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \cos p\varphi \\ \sin m\varphi \sin p\varphi \end{Bmatrix} J_m(k^H_{mn}\varrho) J_p(k^H_{pq}\varrho),
\end{aligned}$$

woraus man erkennt, daß die Integration über φ wegen

$$\begin{aligned}
\sin m\varphi \sin p\varphi &= \frac{1}{2}[\cos(m\varphi - p\varphi) - \cos(m\varphi + p\varphi)], \\
\cos m\varphi \cos p\varphi &= \frac{1}{2}[\cos(m\varphi - p\varphi) + \cos(m\varphi + p\varphi)]
\end{aligned}$$

im Falle $m = p$ einen Faktor π liefert und der Fall $m \neq p$ eine Null ergibt. Bei der Behandlung der Integration über ϱ kann man sich also auf den Fall $m = p$ beschränken. Es ergibt sich also:

$$\begin{aligned}
\vec{e}^{H\diamond}_{mn} \cdot \vec{e}^{H\diamond}_{mq} &= k^H_{mn} k^H_{mq} \left[\begin{Bmatrix} \sin^2 m\varphi \\ \cos^2 m\varphi \end{Bmatrix} J'_m(k^H_{mn}\varrho) J_m(k^H_{mq}\varrho) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^2}{k^H_{mn}\varrho k^H_{mq}\varrho} \begin{Bmatrix} \cos^2 m\varphi \\ \sin^2 m\varphi \end{Bmatrix} J_m(k^H_{mn}\varrho) J_m(k^H_{mq}\varrho) \right].
\end{aligned}$$

In dieser Form ist der Ausdruck schwierig zu integrieren, weshalb er mit

$$\begin{aligned}
J'_m(x) &= \frac{1}{2}[J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)], \\
J_m(x) &= \frac{x}{2m}[J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x)]
\end{aligned}$$

wie folgt umgeformt wird[4]:

$$\begin{aligned}
\vec{e}^{H\diamond}_{mn} \cdot \vec{e}^{H\diamond}_{mq} = \frac{1}{4} k^H_{mn} k^H_{mq} &\left[J_{m-1}(k^H_{mn}\varrho) J_{m-1}(k^H_{mq}\varrho) + J_{m+1}(k^H_{mn}\varrho) J_{m+1}(k^H_{mq}\varrho) \right. \\
+ \begin{Bmatrix} \cos^2 m\varphi - \sin^2 m\varphi \\ \sin^2 m\varphi - \cos^2 m\varphi \end{Bmatrix} &\left. [J_{m-1}(k^H_{mn}\varrho) J_{m+1}(k^H_{mq}\varrho) + J_{m+1}(k^H_{mn}\varrho) J_{m-1}(k^H_{mq}\varrho)] \right]. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Bei der Integration über φ fällt der zweite Teil der Gleichung wegen

$$\cos 2m\varphi = \cos^2 m\varphi - \sin^2 m\varphi$$

fort. Der Restausdruck von Gleichung (7) kann für den Fall $n \neq q$ mit Hilfe der Integralformel

$$\int_0^a x J_m(\alpha x) J_m(\beta x) \mathrm{d}x = \frac{a}{\beta^2 - \alpha^2}[\alpha J_m(\beta a) J'_m(\alpha a) - \beta J_m(\alpha a) J'_m(\beta a)]$$

[4] genauere Darstellungen der jeweiligen Rechnungen sind jeweils in [1] zu finden

integriert werden. Das Integral über den ersten Summanden des Restausdrucks ergibt

$$\int_0^a \varrho J_{m-1}(k^H_{mn}\varrho) J_{m-1}(k^H_{mq}\varrho)\mathrm{d}\varrho =$$

$$\frac{a}{(k^H_{mq})^2 - (k^H_{mn})^2}[k^H_{mn} J_{m-1}(k^H_{mq}a) J'_{m-1}(k^H_{mn}a) - k^H_{mq} J_{m-1}(k^H_{mn}a) J'_{m-1}(k^H_{mq}a)].$$

Nun werden die Ableitungen der Besselfunktionen mittels

$$\begin{aligned} J'_{m-1}(k^H_{mn}a) &= \frac{m-1}{k^H_{mn}a} J_{m-1}(k^H_{mn}a) - J_m(k^H_{mn}a), \\ J'_{m-1}(k^H_{mq}a) &= \frac{m-1}{k^H_{mq}a} J_{m-1}(k^H_{mq}a) - J_m(k^H_{mq}a) \end{aligned}$$

durch die Besselfunktionen selbst ersetzt:

$$k^H_{mn} J_{m-1}(k^H_{mq}a) J'_{m-1}(k^H_{mn}a) - k^H_{mq} J_{m-1}(k^H_{mn}a) J'_{m-1}(k^H_{mq}a) =$$

$$-k^H_{mn} J_m(k^H_{mn}a) J_{m-1}(k^H_{mq}a) + k^H_{mq} J_{m-1}(k^H_{mn}a) J_m(k^H_{mq}a).$$

Das Integral über den zweiten Summanden des Restausdruckes der Gleichung (7) ergibt:

$$\int_0^a \varrho J_{m+1}(k^H_{mn}\varrho) J_{m+1}(k^H_{mq}\varrho)\mathrm{d}\varrho =$$

$$\frac{a}{(k^H_{mq})^2 - (k^H_{mn})^2}[k^H_{mn} J_{m+1}(k^H_{mq}a) J'_{m+1}(k^H_{mn}a) - k^H_{mq} J_{m+1}(k^H_{mn}a) J'_{m+1}(k^H_{mq}a)].$$

Erneut werden die Ableitungen der Besselfunktionen durch

$$\begin{aligned} J'_{m+1}(k^H_{mn}a) &= -\frac{m+1}{k^H_{mn}a} J_{m+1}(k^H_{mn}a) + J_m(k^H_{mn}a), \\ J'_{m+1}(k^H_{mq}a) &= -\frac{m+1}{k^H_{mq}a} J_{m+1}(k^H_{mq}a) + J_m(k^H_{mq}a) \end{aligned}$$

ersetzt:

$$k^H_{mn} J_{m+1}(k^H_{mq}a) J'_{m+1}(k^H_{mn}a) - k^H_{mq} J_{m+1}(k^H_{mn}a) J'_{m+1}(k^H_{mq}a) =$$

$$k^H_{mn} J_m(k^H_{mn}a) J_{m+1}(k^H_{mq}a) - k^H_{mq} J_{m+1}(k^H_{mn}a) J_m(k^H_{mq}a).$$

Wegen

$$J'_m(x) = \frac{1}{2}[J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)]$$

und der für H-Wellen gültigen Randbedingung ist:

$$J_{m-1}(k^H_{mn}a) = J_{m+1}(k^H_{mn}a).$$

Das Integral über ϱ ergibt damit für den Fall $n \neq q$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^a [J_{m-1}(k_{mn}^H \varrho) J_{m-1}(k_{mq}^H \varrho) + J_{m+1}(k_{mn}^H \varrho) J_{m+1}(k_{mq}^H \varrho)] \varrho \mathrm{d}\varrho \\
&= -k_{mn}^H J_m(k_{mn}^H a) J_{m-1}(k_{mq}^H a) + k_{mq}^H J_{m-1}(k_{mn}^H a) J_m(k_{mq}^H a) \\
&\quad + k_{mn}^H J_m(k_{mn}^H a) J_{m+1}(k_{mq}^H a) - k_{mq}^H J_{m+1}(k_{mn}^H a) J_m(k_{mq}^H a) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nach der Untersuchung des Falles $n \neq q$ folgt nun die des Falles $n = q$. Der erste Summand des Restausdrucks der Gleichung (7) ergibt sich über die Integralformel

$$\int_0^a x J_m^2(\alpha x) \mathrm{d}x = \frac{a^2}{2} \left\{ J_m'^2(\alpha a) + \left[1 - \frac{m^2}{(\alpha a)^2} \right] J_m^2(\alpha a) \right\}$$

in diesem Fall zu:

$$\int_0^a \varrho J_{m-1}^2(k_{mn}^H \varrho) \mathrm{d}\varrho = \frac{a^2}{2} \left\{ J_{m-1}'^2(k_{mn}^H a) + \left[1 - \frac{(m-1)^2}{(k_{mn}^H a)^2} \right] J_{m-1}^2(k_{mn}^H a) \right\}.$$

An dieser Stelle wird wieder die Ableitung der Besselfunktion ersetzt:

$$\begin{aligned}
J_{m-1}'(k_{mn}^H a) &= \frac{m-1}{k_{mn}^H a} J_{m-1}(k_{mn}^H a) - J_m(k_{mn}^H a), \\
J_{m-1}'^2(k_{mn}^H a) &= \frac{(m-1)^2}{(k_{mn}^H a)^2} J_{m-1}^2(k_{mn}^H a) - 2 \frac{m-1}{k_{mn}^H a} J_{m-1}(k_{mn}^H a) J_m(k_{mn}^H a) + J_m^2(k_{mn}^H a).
\end{aligned}$$

Im Normierungsfaktor sollen nur Besselfunktionen der Ordnung m auftreten. Wegen der für H-Wellen gültigen Randbedingung ist

$$J_{m-1}(k_{mn}^H a) = J_m'(k_{mn}^H a) + \frac{m}{k_{mn}^H a} J_m(k_{mn}^H a) = \frac{m}{k_{mn}^H a} J_m(k_{mn}^H a).$$

Für das Integral ergibt sich damit

$$\int_0^a \varrho J_{m-1}^2(k_{mn}^H \varrho) \mathrm{d}\varrho = \frac{a^2}{2} \left\{ \left[1 - \frac{m^2}{(k_{mn}^H a)^2} \right] J_m^2(k_{mn}^H a) + 2 \frac{m}{(k_{mn}^H a)^2} J_m^2(k_{mn}^H a) \right\}.$$

Das Integral über den zweiten Summanden des Restausdruckes der Gleichung (7) ergibt sich zu:

$$\int_0^a \varrho J_{m+1}^2(k_{mn}^H \varrho) \mathrm{d}\varrho = \frac{a^2}{2} \left\{ J_{m+1}'^2(k_{mn}^H a) + \left[1 - \frac{(m+1)^2}{(k_{mn}^H a)^2} \right] J_{m+1}^2(k_{mn}^H a) \right\}.$$

Zusammen mit

$$\begin{aligned} J'_{m+1}(k^H_{mn}a) &= -\frac{m+1}{k^H_{mn}a}J_{m+1}(k^H_{mn}a) + J_m(k^H_{mn}a), \\ J'^2_{m+1}(k^H_{mn}a) &= \frac{(m+1)^2}{(k^H_{mn}a)^2}J^2_{m+1}(k^H_{mn}a) - 2\frac{m+1}{k^H_{mn}a}J_{m+1}(k^H_{mn}a)J_m(k^H_{mn}a) + J^2_m(k^H_{mn}a), \\ J_{m+1}(k^H_{mn}a) &= \frac{m}{k^H_{mn}a}J_m(k^H_{mn}a) \end{aligned}$$

ergibt sich für dieses Integral:

$$\int_0^a \varrho J^2_{m+1}(k^H_{mn}\varrho)\mathrm{d}\varrho = \frac{a^2}{2}\left\{\left[1 - \frac{m^2}{(k^H_{mn}a)^2}\right]J^2_m(k^H_{mn}a) - 2\frac{m}{(k^H_{mn}a)^2}J^2_m(k^H_{mn}a)\right\}.$$

Die Addition beider Integrale liefert:

$$\int_0^a \varrho[J^2_{m-1}(k^H_{mn}\varrho) + J^2_{m+1}(k^H_{mn}\varrho)]\mathrm{d}\varrho = a^2\left[1 - \frac{m^2}{(k^H_{mn}a)^2}\right]J^2_m(k^H_{mn}a).$$

Den Normierungsfaktor entnimmt man schließlich dem Integral

$$\frac{1}{4}(k^H_{mn})^2\int_0^{2\pi}\int_0^a \varrho[J^2_{m-1}(k^H_{mn}\varrho) + J^2_{m+1}(k^H_{mn}\varrho)]\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{4}\left[(k^H_{mn}a)^2 - m^2\right]J^2_m(k^H_{mn}a)$$

zu

$$B^H_{mn} = \left\{\frac{\pi}{2}\left[(k^H_{mn}a)^2 - m^2\right]J^2_m(k^H_{mn}a)\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Unter Verwendung der „unteren“ Möglichkeit bei der Eigenfunktion, ergibt sich für die orthonormierten Modusvektoren der H-Wellen:

$$\vec{e}^H_{mn} = B^H_{mn}\left[\vec{u}_\varrho\frac{m}{\varrho}J_m(k^H_{mn}\varrho)\sin m\varphi + \vec{u}_\varphi k^H_{mn}J'_m(k^H_{mn}\varrho)\cos m\varphi\right].$$

Nun sollen die Modusvektoren der E-Wellen normiert werden. Für den Vektor des mn-Modus ergab sich der Ausdruck

$$\begin{aligned} \vec{e}^{E\diamond}_{mn} &= -\nabla_t T^E \\ &= -\left[\vec{u}_\varrho\begin{Bmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}J'_m(k^E_{mn}\varrho)k^E_{mn} + \vec{u}_\varphi\frac{m}{\varrho}\begin{Bmatrix}-\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}J_m(k^E_{mn}\varrho)\right]. \end{aligned}$$

Der Fall $m \neq p$ ergibt auch hier eine Null. Es wird deshalb gleich der Fall $m = p$ untersucht.

$$\vec{e}^{E\diamond}_{mn}\cdot\vec{e}^{E\diamond}_{mq} = \frac{1}{4}k^E_{mn}k^E_{mq}\Big[J_{m-1}(k^E_{mn}\varrho)J_{m-1}(k^E_{mq}\varrho) + J_{m+1}(k^E_{mn}\varrho)J_{m+1}(k^E_{mq}\varrho)$$

$$+\begin{Bmatrix}\sin^2 m\varphi - \cos^2 m\varphi \\ \cos^2 m\varphi - \sin^2 m\varphi\end{Bmatrix}[J_{m-1}(k^E_{mn}\varrho)J_{m+1}(k^E_{mq}\varrho) + J_{m+1}(k^E_{mn}\varrho)J_{m-1}(k^E_{mq}\varrho)]\Big].$$

Der letzte Term fällt bei der Integration über φ weg. Bei der Betrachtung des Falles $n \neq q$ liefert das Integral über das Produkt der Besselfunktionen der Ordnung $(m-1)$

$$\int_0^a \varrho J_{m-1}(k^E_{mn}\varrho) J_{m-1}(k^E_{mq}\varrho) \mathrm{d}\varrho =$$

$$\frac{a}{(k^E_{mq})^2 - (k^E_{mn})^2} [k^E_{mn} J_{m-1}(k^E_{mq}a) J'_{m-1}(k^E_{mn}a) - k^E_{mq} J_{m-1}(k^E_{mn}a) J'_{m-1}(k^E_{mq}a)].$$

Wegen der Randbedingung der E-Wellen gilt

$$J'_{m-1}(k^E_{mn}a) = \frac{m-1}{k^E_{mn}a} J_{m-1}(k^E_{mn}a) - J_m(k^E_{mn}a) = \frac{m-1}{k^E_{mn}a} J_{m-1}(k^E_{mn}a),$$

womit die Ableitungen ersetzt werden können:

$$\begin{aligned}
& k^E_{mn} J_{m-1}(k^E_{mq}a) J'_{m-1}(k^E_{mn}a) - k^E_{mq} J_{m-1}(k^E_{mn}a) J'_{m-1}(k^E_{mq}a) \\
= \ & \frac{m-1}{a} [J_{m-1}(k^E_{mq}a) J_{m-1}(k^E_{mn}a) - J_{m-1}(k^E_{mn}a) J_{m-1}(k^E_{mq}a)] \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

Das Integral über das Produkt der Besselfunktionen der Ordnung $(m+1)$ ergibt:

$$\int_0^a \varrho J_{m+1}(k^E_{mn}\varrho) J_{m+1}(k^E_{mq}\varrho) \mathrm{d}\varrho =$$

$$\frac{a}{(k^E_{mq})^2 - (k^E_{mn})^2} [k^E_{mn} J_{m+1}(k^E_{mq}a) J'_{m+1}(k^E_{mn}a) - k^E_{mq} J_{m+1}(k^E_{mn}a) J'_{m+1}(k^E_{mq}a)].$$

Unter Beachtung der Randbedingung verwendet man an dieser Stelle

$$J'_{m+1}(k^E_{mn}a) = -\frac{m+1}{k^E_{mn}a} J_{m+1}(k^E_{mn}a) + J_m(k^E_{mn}a) = -\frac{m+1}{k^E_{mn}a} J_{m+1}(k^E_{mn}a),$$

um die Ableitungen wie folgt zu eliminieren:

$$\begin{aligned}
& k^E_{mn} J_{m+1}(k^E_{mq}a) J'_{m+1}(k^E_{mn}a) - k^E_{mq} J_{m+1}(k^E_{mn}a) J'_{m+1}(k^E_{mq}a) \\
= \ & -\frac{m+1}{a} [J_{m+1}(k^E_{mq}a) J_{m+1}(k^E_{mn}a) - J_{m+1}(k^E_{mn}a) J_{m+1}(k^E_{mq}a)] \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich also die Orthogonalität der Modusvektoren der E-Wellen. Den Normierungsfaktor gewinnt man wieder aus der Betrachtung des Falles $n = q$.

$$\begin{aligned}
\int_0^a \varrho J^2_{m-1}(k^E_{mn}\varrho) \mathrm{d}\varrho &= \frac{a^2}{2} \left\{ J'^2_{m-1}(k^E_{mn}a) + \left[1 - \frac{(m-1)^2}{(k^E_{mn}a)^2}\right] J^2_{m-1}(k^E_{mn}a) \right\}, \\
\int_0^a \varrho J^2_{m+1}(k^E_{mn}\varrho) \mathrm{d}\varrho &= \frac{a^2}{2} \left\{ J'^2_{m+1}(k^E_{mn}a) + \left[1 - \frac{(m+1)^2}{(k^E_{mn}a)^2}\right] J^2_{m+1}(k^E_{mn}a) \right\}.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Randbedingung ist

$$\begin{aligned} J_{m-1}(k_{mn}^E a) &= -J_{m+1}(k_{mn}^E a), \\ J'_{m-1}(k_{mn}^E a) &= \frac{m-1}{k_{mn}^E a} J_{m-1}(k_{mn}^E a), \\ J'_{m+1}(k_{mn}^E a) &= -\frac{m+1}{k_{mn}^E a} J_{m+1}(k_{mn}^E a). \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} &\int_0^a \varrho[J_{m-1}^2(k_{mn}^E\varrho) + J_{m+1}^2(k_{mn}^E\varrho)]\mathrm{d}\varrho \\ &= \frac{a^2}{2}\left\{2\frac{m^2+1}{(k_{mn}^E a)^2} J_{m-1}^2(k_{mn}^E a) + 2\left[1 - \frac{m^2+1}{(k_{mn}^E a)^2}\right] J_{m-1}^2(k_{mn}^E a)\right\} \\ &= \frac{a^2}{2}[2J_{m-1}^2(k_{mn}^E a)] \\ &= a^2 J_{m-1}^2(k_{mn}^E a). \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich dann für das Flächenintegral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \varrho(\vec{e}_{mn}^{\,E\diamond})^2 \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}(k_{mn}^E)^2 a^2 J_{m-1}^2(k_{mn}^E a),$$

woraus sich schließlich der Normierungsfaktor zu

$$B_{mn}^E = \left\{\frac{\pi}{2}[k_{mn}^E a J_{m-1}(k_{mn}^E a)]^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

ergibt. Wählt man die „untere" Möglichkeit bei der Eigenfunktion für die E-Wellen, so lautet der Ausdruck für die Modusvektoren:

$$\vec{e}_{mn}^{\,E} = -B_{mn}^E \left[\vec{u}_\varrho k_{mn}^E J'_m(k_{mn}^E\varrho)\sin m\varphi + \vec{u}_\varphi \frac{m}{\varrho} J_m(k_{mn}^E\varrho)\cos m\varphi\right].$$

3.1.2 Beweis der Orthogonalität der E- und H-Modusvektoren

Nachdem die Modusvektoren der E- und H-Wellen nun untereinander jeweils orthonormiert sind, bleibt noch die Orthogonalität der H- und E-Modusvektoren zu zeigen:

$$\int_{F_A} \vec{e}_{mn}^{\,H} \cdot \vec{e}_{pq}^{\,E} \mathrm{d}f = 0$$

Für das Skalarprodukt der beiden Modusvektoren ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{mn}^{\,H\diamond} \cdot \vec{e}_{pq}^{\,E\diamond} = &- \left[\frac{m}{\varrho} k_{pq}^E J_m(k_{mn}^H\varrho) J'_p(k_{pq}^E\varrho) \begin{Bmatrix} -\cos m\varphi\cos p\varphi \\ \sin m\varphi \sin p\varphi \end{Bmatrix}\right. \\ &\left. + \frac{p}{\varrho} k_{mn}^H J'_m(k_{mn}^H\varrho) J_p(k_{pq}^E\varrho) \begin{Bmatrix} -\sin m\varphi\sin p\varphi \\ \cos m\varphi\cos p\varphi \end{Bmatrix}\right]. \end{aligned}$$

Hierbei können die unnormierten Vektoren verwendet werden, da nur die Orthogonalität zu zeigen ist, die nicht von der Normierung anhängt. Bei der Integration über φ ergibt der Fall $m \neq p$ eine Null. Für den Fall $m = p$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\vec{e}^{H\diamond}_{mn} \cdot \vec{e}^{E\diamond}_{mq} &= -\left[\frac{m}{\varrho} k^E_{mq} J_m(k^H_{mn}\varrho) J'_m(k^E_{mq}\varrho) \begin{Bmatrix} -\cos^2 m\varphi \\ \sin^2 m\varphi \end{Bmatrix}\right. \\
&\quad \left. + \frac{m}{\varrho} k^H_{mn} J'_m(k^H_{mn}\varrho) J_m(k^E_{mq}\varrho) \begin{Bmatrix} -\sin^2 m\varphi \\ \cos^2 m\varphi \end{Bmatrix}\right] \\
&= -\frac{1}{4} k^H_{mn} k^E_{mq} \Big[[J_{m-1}(k^H_{mn}\varrho) + J_{m+1}(k^H_{mn}\varrho)] \\
&\quad \cdot [J_{m-1}(k^E_{mq}\varrho) - J_{m+1}(k^E_{mq}\varrho)] \begin{Bmatrix} -\cos^2 m\varphi \\ \sin^2 m\varphi \end{Bmatrix} \\
&\quad + [J_{m-1}(k^H_{mn}\varrho) - J_{m+1}(k^H_{mn}\varrho)] \\
&\quad \cdot [J_{m-1}(k^E_{mq}\varrho) + J_{m+1}(k^E_{mq}\varrho)] \begin{Bmatrix} -\sin^2 m\varphi \\ \cos^2 m\varphi \end{Bmatrix} \Big].
\end{aligned}$$

Bei der Integration über φ fallen wegen

$$\cos 2m\varphi = \cos^2 m\varphi - \sin^2 m\varphi$$

einige Terme weg. Einen Beitrag liefert nur der Term

$$\begin{aligned}
&J_{m-1}(k^H_{mn}\varrho) J_{m-1}(k^E_{mq}\varrho) \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + J_{m+1}(k^H_{mn}\varrho) J_{m+1}(k^E_{mq}\varrho) \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \\
&= \mp [J_{m-1}(k^H_{mn}\varrho) J_{m-1}(k^E_{mq}\varrho) - J_{m+1}(k^H_{mn}\varrho) J_{m+1}(k^E_{mq}\varrho)].
\end{aligned}$$

Die Integration nach ϱ über den Term in den eckigen Klammern liefert:

$$\begin{aligned}
&\int_0^a \varrho J_{m-1}(k^H_{mn}\varrho) J_{m-1}(k^E_{mq}\varrho) \mathrm{d}\varrho - \int_0^a \varrho J_{m+1}(k^H_{mn}\varrho) J_{m+1}(k^E_{mq}\varrho) \mathrm{d}\varrho \\
&= \frac{a}{(k^E_{mq})^2 - (k^H_{mn})^2} [k^H_{mn} J_{m-1}(k^E_{mq}a) J'_{m-1}(k^H_{mn}a) - k^E_{mq} J_{m-1}(k^H_{mn}a) J'_{m-1}(k^E_{mq}a)] \\
&\quad - \frac{a}{(k^E_{mq})^2 - (k^H_{mn})^2} [k^H_{mn} J_{m+1}(k^E_{mq}a) J'_{m+1}(k^H_{mn}a) - k^E_{mq} J_{m+1}(k^H_{mn}a) J'_{m+1}(k^E_{mq}a)].
\end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen für H- und E-Wellen ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
J_{m-1}(k^H_{mn}a) &= J_{m+1}(k^H_{mn}a), \\
J_{m-1}(k^E_{mq}a) &= -J_{m+1}(k^E_{mq}a), \\
J'_{m-1}(k^H_{mn}a) &= \frac{m-1}{k^H_{mn}a} J_{m-1}(k^H_{mn}a) - J_m(k^H_{mn}a), \\
J'_{m-1}(k^E_{mq}a) &= \frac{m-1}{k^E_{mq}a} J_{m-1}(k^E_{mq}a) - J_m(k^E_{mq}a) = \frac{m-1}{k^E_{mq}a} J_{m-1}(k^E_{mq}a),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J'_{m+1}(k^H_{mn}a) &= -\frac{m+1}{k^H_{mn}a}J_{m+1}(k^H_{mn}a) + J_m(k^H_{mn}a), \\
J'_{m+1}(k^E_{mq}a) &= -\frac{m+1}{k^E_{mq}a}J_{m+1}(k^E_{mq}a) + J_m(k^E_{mq}a) = -\frac{m+1}{k^E_{mq}a}J_{m+1}(k^E_{mq}a).
\end{aligned}$$

Um die Integration durchführen zu können, sind noch einige Umformungen nötig:

$$\begin{aligned}
&J_{m-1}(k^E_{mq}a)J'_{m-1}(k^H_{mn}a) - J_{m+1}(k^E_{mq}a)J'_{m+1}(k^H_{mn}a) \\
&= J_{m-1}(k^E_{mq}a)\left[\frac{m-1}{k^H_{mn}a}J_{m-1}(k^H_{mn}a) - J_m(k^H_{mn}a)\right] \\
&\quad -J_{m+1}(k^E_{mq}a)\left[-\frac{m+1}{k^H_{mn}a}J_{m+1}(k^H_{mn}a) + J_m(k^H_{mn}a)\right] \\
&= J_{m-1}(k^E_{mq}a)\left[\frac{m-1}{k^H_{mn}a}J_{m-1}(k^H_{mn}a) - J_m(k^H_{mn}a)\right] \\
&\quad +J_{m-1}(k^E_{mq}a)\left[-\frac{m+1}{k^H_{mn}a}J_{m-1}(k^H_{mn}a) + J_m(k^H_{mn}a)\right] \\
&= -\frac{2}{k^H_{mn}a}J_{m-1}(k^E_{mq}a)J_{m-1}(k^H_{mn}a); \\
&-J_{m-1}(k^H_{mn}a)J'_{m-1}(k^E_{mq}a) + J_{m+1}(k^H_{mn}a)J'_{m+1}(k^E_{mq}a) \\
&= -J_{m-1}(k^H_{mn}a)\left[\frac{m-1}{k^E_{mq}a}J_{m-1}(k^E_{mq}a)\right] + J_{m+1}(k^H_{mn}a)\left[-\frac{m+1}{k^E_{mq}a}J_{m+1}(k^E_{mq}a)\right] \\
&= -J_{m-1}(k^H_{mn}a)\left[\frac{m-1}{k^E_{mq}a}J_{m-1}(k^E_{mq}a)\right] + J_{m-1}(k^H_{mn}a)\left[\frac{m+1}{k^E_{mq}a}J_{m-1}(k^E_{mq}a)\right] \\
&= \frac{2}{k^E_{mq}a}J_{m-1}(k^H_{mn}a)J_{m-1}(k^E_{mq}a).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
&k^H_{mn}[J_{m-1}(k^E_{mq}a)J'_{m-1}(k^H_{mn}a) - J_{m+1}(k^E_{mq}a)J'_{m+1}(k^H_{mn}a)] \\
&\quad +k^E_{mq}[-J_{m-1}(k^H_{mn}a)J'_{m-1}(k^E_{mq}a) + J_{m+1}(k^H_{mn}a)J'_{m+1}(k^E_{mq}a)] \\
&= -\frac{2}{a}J_{m-1}(k^E_{mq}a)J_{m-1}(k^H_{mn}a) + \frac{2}{a}J_{m-1}(k^H_{mn}a)J_{m-1}(k^E_{mq}a) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Hiermit wäre also die Orthogonalität der Modusvektoren der E- und H-Wellen bewiesen.

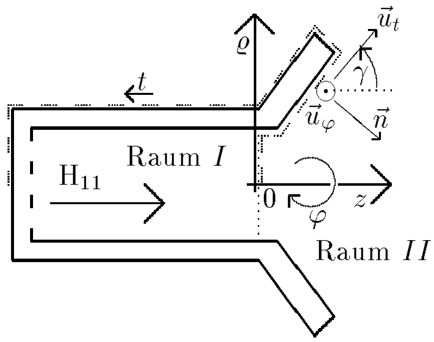


Abbildung 2: Parametrisierung der Oberfläche

3.2 Oberflächenparametrisierung

Um letztendlich über eine Oberfläche integrieren zu können, muß diese mittels zweier Parameter parametrisiert werden. Im Falle rotationssymmetrischer Strukturen wählt man hierfür sinnvoller Weise die φ-Koordinate des Zylinderkoordinatensystems und eine Längskoordinate t, die auf der Oberfläche läuft und deren Koordinatenlinien senkrecht zu denen von φ verlaufen. Ein Punkt auf einer derart parametrisierten Oberfläche kann also durch das Paar $(t;\varphi)$ beschrieben werden. Die tangentiale Komponente eines Vektors kann in diesem Punkt durch eine Linearkombination der Einheitsvektoren der Parametrisierung $\vec{u}_\varphi$ und $\vec{u}_t$ bechrieben werden. Die entsprechende Normalenkomponente läßt sich dann durch

$$\vec{n} = \vec{u}_t \times \vec{u}_\varphi$$

ausdrücken. Dabei beginnt die Zählung von t im Nullpunkt des Zylinderkoordinatensystems, der in das Zentrum der Grenzfläche F_A gelegt wird. Dem Verlauf der Oberfläche folgend, schließen $\vec{u}_z$ und $\vec{u}_t$ den Winkel γ ein, siehe Abbildung 2.

3.3 Basis- und Gewichtsfunktionen

Bisher wurde über die Basis- und Gewichtsfunktionen für die Oberflächenstromdichten nichts weiteres gesagt. An dieser Stelle seien die Basisfunktionen nun komponentenweise durch

$$
\begin{aligned}
\mathsf{M}^t_{m'n'}(t';\varphi') &= \vec{u}'_t \frac{1}{\varrho'} D(t'-t_{n'}) \cos m'\varphi', \\
\mathsf{M}^\varphi_{m'n'}(t';\varphi') &= -\vec{u}'_\varphi \frac{1}{\varrho'} D(t'-t_{n'}) \sin m'\varphi', \\
\mathsf{J}^t_{m'n'}(t';\varphi') &= \vec{u}'_t \frac{1}{\varrho'} D(t'-t_{n'}) \sin m'\varphi', \\
\mathsf{J}^\varphi_{m'n'}(t';\varphi') &= \vec{u}'_\varphi \frac{1}{\varrho'} D(t'-t_{n'}) \cos m'\varphi', \\
\mathsf{C}^t_{m'n'}(t';\varphi') &= \vec{u}'_t \frac{1}{\varrho'} D(t'-t_{n'}) \sin m'\varphi', \\
\mathsf{C}^\varphi_{m'n'}(t';\varphi') &= \vec{u}'_\varphi \frac{1}{\varrho'} D(t'-t_{n'}) \cos m'\varphi'
\end{aligned}
$$

definiert. Durch die Anwendung der Methode von Galerkin, die die Gleichheit von Basis- und Gewichtsfunktionen fordert, ergeben sich aus J die Gewichtsfunktionen zu

$$
\begin{aligned}
\mathsf{U}^t_{mn}(t;\varphi) &= \vec{u}_t \frac{1}{\varrho} D(t-t_n) \sin m\varphi, \\
\mathsf{U}^\varphi_{mn}(t;\varphi) &= \vec{u}_\varphi \frac{1}{\varrho} D(t-t_n) \cos m\varphi
\end{aligned}
$$

und entsprechend der früheren Definition

$$\mathsf{W} = -\vec{n} \times \mathsf{U}$$

ergeben sich die weiteren Gewichtsfunktionen zu

$$
\begin{aligned}
\mathsf{W}^t_{mn}(t;\varphi) &= \vec{u}_t \frac{1}{\varrho} D(t-t_n) \cos m\varphi, \\
\mathsf{W}^\varphi_{mn}(t;\varphi) &= -\vec{u}_\varphi \frac{1}{\varrho} D(t-t_n) \sin m\varphi.
\end{aligned}
$$

Diese Ansätze ergeben sich aus der Notwendigkeit, daß die Basisfunktionen eines rotationssymmetrischen Problems periodisch in φ sein müssen; hieraus ergibt sich die Verwendung der trigonometrischen Funktionen. Als besonders geeignet erweisen sich desweiteren Funktionen, die außerhalb eines kleinen Gebietes gleich Null sind. Demgemäß stellt $D(t-t_n)$ eine Dreiecksfunktion dar:

$$
D(t-t_n) = \begin{cases}
0 & \text{für } t \le t_{n-1} \\
\frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} & \text{für } t_{n-1} < t \le t_n \\
\frac{t_{n+1}-t}{t_{n+1}-t_n} & \text{für } t_n < t < t_{n+1} \\
0 & \text{für } t_{n+1} \le t
\end{cases} .
$$

Zur Abkürzung wird noch

$$\begin{aligned} D_n &= D(t-t_n), \\ D_{n'} &= D(t'-t_{n'}), \\ D_{n=n'} &= D(t-t_{n'}) \end{aligned}$$

definiert.

Jede Dreiecksfunktion ist auf jeweils zwei Segmenten definiert, so daß sich benachbarte Basis- und Gewichtsfunktionen überlappen. Insgesamt ergeben diese Basisfunktionen eine Beschreibung der t-Abhängigkeit der Oberflächenstromdichten in Form eines Polygonzuges. Die Fläche $F_A + F_B$ wird, wie man aus den Ansätzen für die Basis- und Gewichtsfunktionen entnehmen kann, in konusförmige Segmente unterteilt. In φ-Richtung wird eine Teilbereichsfunktionsentwicklung nach harmonischen Funktionen durchgeführt. Auf jedem Segment sind damit $2M$ Basis- und Gewichtsfunktionen definiert, wobei M die Obergrenze für m darstellt. Der Faktor $1/\varrho$ erleichtert die spätere Divergenzbildung und elimimiert den bei der Integration im Flächenelement auftretenden Faktor ϱ.

3.4 Ermittlung der Matrizen

3.4.1 Berechnung der Admittanzmatrix einer Rundhohlleitung

Zur Berechnung der Admittanzmatrix einer Hohlleitung $\underline{T}^I_{pq}$ gemäß der Gleichung (2), sind die Entwicklungskoeffizienten A_{qi} zu bestimmen. Diese sind, wie oben angegeben, aus den Basisfunktionen und den Modusvektoren berechenbar.

Für die Modusvektoren einer Rundhohlleitung ergab sich bei den H-Wellen

$$\vec{e}^{H}_{mn} = B^H_{mn}\left[\vec{u}_\varrho \frac{m}{\varrho} J_m(k^H_{mn}\varrho)\sin m\varphi + \vec{u}_\varphi k^H_{mn} J'_m(k^H_{mn}\varrho)\cos m\varphi\right]$$

mit

$$J'_m(k^H_{mn}a) = 0 \quad \text{für } m = 0;1;\ldots;M \text{ und } n = 1;2;\ldots;N$$

und

$$B^H_{mn} = \left\{\frac{\pi}{2}\left[(k^H_{mn}a)^2 - m^2\right] J^2_m(k^H_{mn}a)\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

und bei den E-Wellen

$$\vec{e}^{E}_{mn} = -B^E_{mn}\left[\vec{u}_\varrho k^E_{mn} J'_m(k^E_{mn}\varrho)\sin m\varphi + \vec{u}_\varphi \frac{m}{\varrho} J_m(k^E_{mn}\varrho)\cos m\varphi\right]$$

mit

$$J_m(k^E_{mn}a) = 0 \quad \text{für } m = 0;1;\ldots;M \text{ und } n = 1;2;\ldots;N$$

und

$$B^E_{mn} = \left\{\frac{\pi}{2}[k^E_{mn}aJ_{m-1}(k^E_{mn}a)]^2\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Entwicklungskoeffizienten berechnen sich dann aus

$$^{\mu}A_{\tau' i} = \int\limits_{F_A} \mathsf{M}^{\mu}_{\tau'}(\varrho';\varphi')[\vec{u}_z \times \vec{e}_i(\varrho';\varphi')]\mathrm{d}f'$$

mit

$$\begin{aligned} \mu &= \varrho,\ \varphi, \\ \tau' &= m'N + n', \\ \\ n' &= 1;2;\ldots;N, \\ m' &= 0;1;\ldots;M. \end{aligned}$$

Wie sich zeigen wird, sind die unterschiedlichen φ-Abhängigkeiten voneinander entkoppelt, d.h. die Elemente der Matrix $\underline{T}^I$ mit $m \neq m'$ sind Null, die Matrix $\underline{T}^I$ läßt sich damit in Untermatrizen ${}_m\underline{T}^I$ aufspalten. Es wird sich noch herausstellen, daß generell unterschiedliche φ-Periodizitäten voneinander entkoppelt sind und somit getrennt voneinander behandelt werden können. Dies entspricht der Linearität des Systems, wonach sich unterschiedliche Basisfunktionen mit verschiedener φ-Periodizität, auch wenn sie sich im gleichen Oberflächensegment befinden, nicht vermischen, sondern additiv überlagern. Bei rotationssymmetrischen Strukturen läßt sich damit der numerische Aufwand wesentlich reduzieren. Wenn man die Fläche F_A nun mit einer H_{mn}-Welle speist, treten nur Wellen mit einer $m\varphi$-Abhängigkeit auf. Indiziert man die einzelnen Moden mit dem Index i, so kann man die Modusvektoren auch durch $\vec{e}_{mi}$ darstellen, weil nur $m\varphi$-Abhängigkeiten auftreten. Der Index i beschreibt dabei dann nicht nur den Modus, sondern auch den Wellentyp. Es sind vier Fälle zu unterscheiden:

H-Wellen, ϱ-gerichtete Flächenströme:

$$\begin{aligned} {}^{\varrho}A^{H}_{m'n'mi} &= \int\limits_{\varrho_{n'-1}}^{\varrho_{n'+1}} \int\limits_{0}^{2\pi} D_{n'} \cos(m'\varphi')[-B^{H}_{mi}k^{H}_{mi}J'_m(k^{H}_{mi}\varrho')\cos m\varphi']\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}\varrho', \\ {}^{\varrho}_{m}A^{H}_{n'i} &= -\pi \int\limits_{\varrho_{n'-1}}^{\varrho_{n'+1}} D_{n'}B^{H}_{mi}k^{H}_{mi}J'_m(k^{H}_{mi}\varrho')\mathrm{d}\varrho', \end{aligned}$$

wobei sich die untere Gleichung aus der oberen deshalb ergibt, weil das obere Integral nach φ' für $m \neq m'$ gleich Null ist.

H-Wellen, φ-gerichtete Flächenströme:

$$ {}^{\varphi}A^{H}_{m'n'mi} = -\int\limits_{\varrho_{n'-1}}^{\varrho_{n'+1}} \int\limits_{0}^{2\pi} D_{n'} \sin(m'\varphi')[B^{H}_{mi}\frac{m}{\varrho'}J_m(k^{H}_{mi}\varrho')\sin m\varphi']\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}\varrho', $$

$$ {}^{\varphi}_{m}A^{H}_{n'i} = -\pi \int\limits_{\varrho_{n'-1}}^{\varrho_{n'+1}} D_{n'} B^{H}_{mi} \frac{m}{\varrho'} J_m(k^{H}_{mi}\varrho')\mathrm{d}\varrho', $$

wobei sich die untere Gleichung aus der oberen deshalb ergibt, weil das obere Integral nach φ' für $m \neq m'$ gleich Null ist.

E-Wellen, ϱ-gerichtete Flächenströme:

$$ \begin{aligned} {}^{\varrho}A^{E}_{m'n'mi} &= \int\limits_{\varrho_{n'-1}}^{\varrho_{n'+1}} \int\limits_{0}^{2\pi} D_{n'} \cos(m'\varphi')[B^{E}_{mi} \frac{m}{\varrho'} J_m(k^{E}_{mi}\varrho') \cos m\varphi']\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}\varrho', \\ {}^{\varrho}_{m}A^{E}_{n'i} &= \pi \int\limits_{\varrho_{n'-1}}^{\varrho_{n'+1}} D_{n'} B^{E}_{mi} \frac{m}{\varrho'} J_m(k^{E}_{mi}\varrho')\mathrm{d}\varrho', \end{aligned} $$

wobei sich die untere Gleichung aus der oberen deshalb ergibt, weil das obere Integral nach φ' für $m \neq m'$ gleich Null ist.

E-Wellen, φ-gerichtete Flächenströme:

$$ \begin{aligned} {}^{\varphi}A^{E}_{m'n'mi} &= -\int\limits_{\varrho_{n'-1}}^{\varrho_{n'+1}} \int\limits_{0}^{2\pi} D_{n'} \sin(m'\varphi')[-B^{E}_{mi} k^{E}_{mi} J'_m(k^{E}_{mi}\varrho') \sin m\varphi']\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}\varrho', \\ {}^{\varphi}_{m}A^{E}_{n'i} &= \pi \int\limits_{\varrho_{n'-1}}^{\varrho_{n'+1}} D_{n'} B^{E}_{mi} k^{E}_{mi} J'_m(k^{E}_{mi}\varrho')\mathrm{d}\varrho', \end{aligned} $$

wobei sich die untere Gleichung aus der oberen deshalb ergibt, weil das obere Integral nach φ' für $m \neq m'$ gleich Null ist.

3.4.2 Berechnung des Speisevektors

Die Elemente des Speise- oder Anregungsvektors ergeben sich aus der Definition

$$ {}^{\mu}I^{i}_{\tau} = \langle \mathsf{W}^{\mu}_{\tau}, \mathsf{H}^{i} \rangle $$

mit

$$ \begin{aligned} \mu &= \varrho,\ \varphi, \\ \tau &= mN + n, \\ \\ n &= 1; 2; \ldots; N, \\ m &= 0; 1; \ldots; M. \end{aligned} $$

Für die magnetische Transversalfeldstärke der vorlaufenden Welle ergab sich bereits

$$\mathsf{H}_t(t;\varphi) = \sum_i Y_i V_i^+ \mathrm{e}^{-jk_{iz}z}[\vec{u}_z \times \vec{e}_i(t;\varphi)].$$

Durch das bereits oben erklärte Prinzip der Spiegelwelle ergibt sich im Rundhohlleiter bei Speisung mit einer H_{11}-Welle der Amplitude 1 für die magnetische Tangentialfeldstärke an der Innenseite von F_A:

$$\mathsf{H}^i = 2Y_{11}^H B_{11}^H \left[\vec{u}_\varphi \frac{1}{\varrho} J_1(k_{11}^H \varrho) \sin\varphi - \vec{u}_\varrho k_{11}^H J_1'(k_{11}^H \varrho) \cos\varphi \right].$$

Hierbei wird eine y-polarisierte Welle angenommen, d.h. eine elektromagnetische Welle, bei der die elektrische Transversalfeldstärke in der y-Richtung überwiegt. Dies ist wichtig, damit aus der späteren Transformation in das Ludwig-3-System auch tatsächlich die Kreuzpolarisation ermittelbar ist. Bei der Ausführung der Integration über φ ergibt sich auch hier, daß verschiedene φ-Abhängigkeiten voneinander entkoppelt sind. Es sind zwei Fälle μ zu unterscheiden:

Fall ϱ:

$$\begin{aligned} {}^\varrho I_n^i &= -2Y_{11}^H \pi \int\limits_{\varrho_{n-1}}^{\varrho_{n+1}} D_n B_{11}^H k_{11}^H J_1'(k_{11}^H \varrho) \mathrm{d}\varrho \\ &= 2Y_{11}^H \; {}^\varrho_1 A_{n1}^H. \end{aligned}$$

Fall φ:

$$\begin{aligned} {}^\varphi I_n^i &= -2Y_{11}^H \pi \int\limits_{\varrho_{n-1}}^{\varrho_{n+1}} D_n B_{11}^H \frac{1}{\varrho} J_1(k_{11}^H \varrho) \mathrm{d}\varrho \\ &= 2Y_{11}^H \; {}^\varphi_1 A_{n1}^H. \end{aligned}$$

3.4.3 Berechnung der D-Matrizen

Bei dem letztendlich angewandten Verfahren wird nur die Matrix $\underline{D}^M$ benötigt; dementsprechend wird im folgenden auch nur diese weiter betrachtet. Die Elemente der Matrix $\underline{D}^M$ berechnen sich wie folgt:

$${}^{\mu\nu}D_{\tau\tau'}^M = \langle \mathsf{U}_\tau^\mu, \vec{n} \times \mathsf{M}_{\tau'}^\nu \rangle.$$

Die Vektoroperationen ergeben:

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \mathsf{M}_{m'n'}^t(t;\varphi) &= \vec{u}_\varphi \frac{1}{\varrho} D(t - t_{n'}) \cos m'\varphi, \\ \vec{n} \times \mathsf{M}_{m'n'}^\varphi(t;\varphi) &= \vec{u}_t \frac{1}{\varrho} D(t - t_{n'}) \sin m'\varphi. \end{aligned}$$

Die Ausführung der Integration über φ zeigt auch hier, daß unterschiedliche φ-Abhängigkeiten voneinander entkoppelt sind. Für die Elemente der Matrix $\underline{D}^M$ ergibt sich somit insgesamt:

$$\begin{aligned} {}^{tt}_{m}D^M_{nn'} &= {}^{\varphi\varphi}_{m}D^M_{nn'} = 0, \\ {}^{t\varphi}_{m}D^M_{nn'} &= {}^{\varphi t}_{m}D^M_{nn'} = \pi \int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \frac{1}{\varrho} D(t-t_n)D(t-t_{n'})\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

3.4.4 Berechnung der S-Matrizen

Zunächst soll die Berechnung der Matrix $\underline{S}^C$ im rotationssymmetrischen Fall für den obigen Satz von Basis- und Gewichtsfunktionen dargestellt werden. Für ihre Elemente kann man schreiben:

$$^{\mu\nu}S^C_{\tau\tau'} = \langle \mathsf{W}^\mu_\tau(t;\varphi), -\frac{1}{2}\vec{n} \times \mathsf{C}^\nu_{\tau'}(t;\varphi) + \mathrm{V.p.} \int\limits_{F_A+F_B} \mathrm{rot}[\mathsf{C}^\nu_{\tau'}(t';\varphi')G_0(t;\varphi;t';\varphi')]\mathrm{d}f' \rangle$$

mit

$$\begin{aligned} \mu,\ \nu &= t,\ \varphi, \\ \tau &= mN+n, \\ \tau' &= m'N+n', \\ \\ n,\ n' &= 1;2;\ldots;N, \\ m,\ m' &= 0;1;\ldots;M. \end{aligned}$$

Im rotationssymmetrischen Fall lassen sich die Matrizen $\underline{S}$ also sinnvoll in Untermatrizen der Art, daß

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} {}^{tt}\underline{S} & {}^{t\varphi}\underline{S} \\ {}^{\varphi t}\underline{S} & {}^{\varphi\varphi}\underline{S} \end{pmatrix}$$

ist, aufspalten. Da sich der Rotationsoperator schlecht auswerten läßt, soll er durch

$$\mathrm{rot}[\mathsf{C}^\nu_{\tau'}(t';\varphi')G_0(t;\varphi;t';\varphi')] = \mathrm{grad}G_0(t;\varphi;t';\varphi') \times \mathsf{C}^\nu_{\tau'}(t';\varphi')$$

ersetzt werden. Für den Gradienten der Greenschen Funktion schreibt man wieder

$$\mathrm{grad}G_0(t;\varphi;t';\varphi') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1+jkR}{R^2}\mathrm{e}^{-jkR}\vec{u}_R = -\frac{1}{4\pi}\frac{1+jkR}{R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\vec{R}.$$

Setzt man diese Beziehung in die Gleichung zur Bestimmung der S-Matrixelemente ein, so erhält man

$$\begin{aligned} ^{\mu\nu}S^C_{\tau\tau'} &= -\frac{1}{2} \int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{W}^\mu_\tau(t;\varphi) \cdot [\vec{n} \times \mathsf{C}^\nu_{\tau'}(t;\varphi)]\mathrm{d}f \\ &\quad - \int\limits_{F_A+F_B} \mathrm{V.p.} \int\limits_{F_A+F_B} \frac{1+jkR}{4\pi R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathsf{W}^\mu_\tau(t;\varphi) \cdot [\vec{R} \times \mathsf{C}^\nu_{\tau'}(t';\varphi')]\mathrm{d}f'\mathrm{d}f. \end{aligned}$$

Der Aufpunkt wird durch den Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{u}_\varrho \varrho + \vec{u}_z z$$

beschrieben. Die Tangentenvektoren im Aufpunkt sind

$$\vec{u}_t = \vec{u}_\varrho \sin\gamma + \vec{u}_z \cos\gamma \quad \text{und} \quad \vec{u}_\varphi .$$

Um den Quellpunkt und seine Tangentenvektoren im Aufpunktsystem auszudrücken, benötigt man die folgenden Beziehungen [4]:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_\varrho &= \vec{u}_x \cos\varphi + \vec{u}_y \sin\varphi, \\
\vec{u}_\varphi &= -\vec{u}_x \sin\varphi + \vec{u}_y \cos\varphi, \\
\vec{u}_x &= \vec{u}_\varrho \cos\varphi - \vec{u}_\varphi \sin\varphi, \\
\vec{u}_y &= \vec{u}_\varrho \sin\varphi + \vec{u}_\varphi \cos\varphi.
\end{aligned}$$

Der Quellpunkt wird durch den Ortsvektor

$$\vec{r}' = \vec{u}'_\varrho \varrho' + \vec{u}_z z'$$

beschrieben. Die Einheitsvektoren des Quellsystems werden zunächst mit Hilfe der Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems dargestellt, letztere werden dann unter Verwendung der Einheitsvektoren des Aufpunktes geschrieben.

$$\begin{aligned}
\vec{r}' &= \vec{u}'_\varrho \varrho' + \vec{u}_z z' \\
&= (\vec{u}_x \cos\varphi' + \vec{u}_y \sin\varphi')\varrho' + \vec{u}_z z' \\
&= [(\vec{u}_\varrho \cos\varphi - \vec{u}_\varphi \sin\varphi)\cos\varphi' + (\vec{u}_\varrho \sin\varphi + \vec{u}_\varphi \cos\varphi)\sin\varphi']\varrho' + \vec{u}_z z' \\
&= \vec{u}_\varrho \varrho'(\cos\varphi' \cos\varphi + \sin\varphi' \sin\varphi) + \vec{u}_\varphi \varrho'(\sin\varphi' \cos\varphi - \cos\varphi' \sin\varphi) + \vec{u}_z z' \\
&= \vec{u}_\varrho \varrho' \cos(\varphi' - \varphi) + \vec{u}_\varphi \varrho' \sin(\varphi' - \varphi) + \vec{u}_z z'.
\end{aligned}$$

Entsprechend verfährt man bei den Tangentenvektoren:

$$\begin{aligned}
\vec{u}'_t &= \vec{u}'_\varrho \sin\gamma' + \vec{u}_z \cos\gamma' \\
&= (\vec{u}_x \cos\varphi' + \vec{u}_y \sin\varphi')\sin\gamma' + \vec{u}_z \cos\gamma' \\
&= [(\vec{u}_\varrho \cos\varphi - \vec{u}_\varphi \sin\varphi)\cos\varphi' + (\vec{u}_\varrho \sin\varphi + \vec{u}_\varphi \cos\varphi)\sin\varphi']\sin\gamma' + \vec{u}_z \cos\gamma' \\
&= \vec{u}_\varrho \sin\gamma'(\cos\varphi' \cos\varphi + \sin\varphi' \sin\varphi) + \vec{u}_\varphi \sin\gamma'(\sin\varphi' \cos\varphi - \cos\varphi' \sin\varphi) + \vec{u}_z \cos\gamma' \\
&= \vec{u}_\varrho \sin\gamma' \cos(\varphi' - \varphi) + \vec{u}_\varphi \sin\gamma' \sin(\varphi' - \varphi) + \vec{u}_z \cos\gamma';
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u}'_\varphi &= -\vec{u}_x \sin\varphi' + \vec{u}_y \cos\varphi' \\
&= (-\vec{u}_\varrho \cos\varphi + \vec{u}_\varphi \sin\varphi)\sin\varphi' + (\vec{u}_\varrho \sin\varphi + \vec{u}_\varphi \cos\varphi)\cos\varphi' \\
&= \vec{u}_\varrho(\cos\varphi' \sin\varphi - \sin\varphi' \cos\varphi) + \vec{u}_\varphi(\sin\varphi' \sin\varphi + \cos\varphi' \cos\varphi) \\
&= -\vec{u}_\varrho \sin(\varphi' - \varphi) + \vec{u}_\varphi \cos(\varphi' - \varphi).
\end{aligned}$$

Jetzt kann man mittels
$$\alpha = \varphi' - \varphi$$
auch einen Ausdruck für den Abstand R des Aufpunktes vom Quellpunkt angeben:
$$\begin{aligned} R = |\vec{r} - \vec{r}'| &= |\vec{u}_\varrho(\varrho - \varrho' \cos\alpha) - \vec{u}_\varphi \varrho' \sin\alpha + \vec{u}_z(z - z')| \\ &= \sqrt{(\varrho - \varrho'\cos\alpha)^2 + \varrho'^2 \sin^2\alpha + (z - z')^2} \\ &= \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho'\cos\alpha + (z - z')^2}. \end{aligned}$$
Mit Hilfe der nun näher spezifizierten Orts- und Tangentenvektoren kann man nun die Vektoroperationen im ersten und zweiten Integranden behandeln. Für die Vektoroperationen im ersten Integralausdruck gilt:
$$\begin{aligned} \vec{u}_t \cdot (\vec{n} \times \vec{u}_t) &= 0, \\ \vec{u}_t \cdot (\vec{n} \times \vec{u}_\varphi) &= \vec{n} \cdot (\vec{u}_\varphi \times \vec{u}_t) = -1, \\ \vec{u}_\varphi \cdot (\vec{n} \times \vec{u}_t) &= \vec{n} \cdot (\vec{u}_t \times \vec{u}_\varphi) = 1, \\ \vec{u}_\varphi \cdot (\vec{n} \times \vec{u}_\varphi) &= 0 \end{aligned}$$
mit
$$\vec{n} = \vec{u}_t \times \vec{u}_\varphi.$$
Bei der Behandlung der Vektoroperationen im zweiten Integranden werden nun auch wieder vier Fälle $\mu\nu$ unterschieden:

Fall tt:
$$\vec{u}_t \cdot (\vec{R} \times \vec{u}_t') = \vec{u}_t' \cdot (\vec{u}_t \times \vec{R}),$$
$$\begin{aligned} \vec{u}_t \times \vec{R} &= [\vec{u}_\varrho \sin\gamma + \vec{u}_z \cos\gamma] \times [\vec{u}_\varrho(\varrho - \varrho'\cos\alpha) - \vec{u}_\varphi \varrho' \sin\alpha + \vec{u}_z(z - z')] \\ &= -\vec{u}_z \varrho' \sin\alpha \sin\gamma - \vec{u}_\varphi \sin\gamma (z - z') + \vec{u}_\varphi \cos\gamma(\varrho - \varrho'\cos\alpha) + \vec{u}_\varrho \varrho' \cos\gamma \sin\alpha, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \vec{u}_t' \cdot (\vec{u}_t \times \vec{R}) &= [\vec{u}_\varrho \sin\gamma' \cos\alpha + \vec{u}_\varphi \sin\gamma' \sin\alpha + \vec{u}_z \cos\gamma'] \cdot [-\vec{u}_z \varrho' \sin\alpha \sin\gamma \\ &\quad -\vec{u}_\varphi \sin\gamma(z - z') + \vec{u}_\varphi \cos\gamma(\varrho - \varrho'\cos\alpha) + \vec{u}_\varrho \varrho' \cos\gamma \sin\alpha] \\ &= \varrho' \sin\gamma' \cos\alpha \cos\gamma \sin\alpha + \sin\gamma' \sin\alpha \cos\gamma(\varrho - \varrho'\cos\alpha) \\ &\quad - \sin\gamma' \sin\alpha \sin\gamma(z - z') - \varrho' \cos\gamma' \sin\alpha \sin\gamma, \end{aligned}$$
$$\vec{u}_t \cdot (\vec{R} \times \vec{u}_t') = \sin\alpha[\varrho \cos\gamma \sin\gamma' - \varrho' \sin\gamma \cos\gamma' + (z' - z) \sin\gamma \sin\gamma'].$$

Fall $t\varphi$:
$$\begin{aligned} \vec{u}_t \cdot (\vec{R} \times \vec{u}_\varphi') &= \vec{u}_\varphi' \cdot (\vec{u}_t \times \vec{R}) \\ &= [-\vec{u}_\varrho \sin\alpha + \vec{u}_\varphi \cos\alpha] \cdot [-\vec{u}_z \sin\gamma\ \varrho' \sin\alpha - \vec{u}_\varphi \sin\gamma(z - z') \\ &\quad +\vec{u}_\varphi \cos\gamma(\varrho - \varrho'\cos\alpha) + \vec{u}_\varrho \varrho' \cos\gamma \sin\alpha] \\ &= -\varrho' \sin^2\alpha \cos\gamma - \cos\alpha \sin\gamma(z - z') + \varrho \cos\alpha \cos\gamma - \varrho' \cos^2\alpha \cos\gamma \\ &= \cos\alpha \sin\gamma(z' - z) + \cos\gamma(\varrho\cos\alpha - \varrho'). \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} -\cos\alpha(\varrho'-\varrho)\cos\gamma - 2\varrho'\cos\gamma\sin^2\frac{\alpha}{2} &= -\cos\alpha(\varrho'-\varrho)\cos\gamma - \varrho'\cos\gamma(1-\cos\alpha) \\ &= \cos\gamma(\varrho\cos\alpha - \varrho'). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann durch rückwärtige Anwendung dieser Formel:

$$\begin{aligned} \vec{u}_t\cdot(\vec{R}\times\vec{u}'_\varphi) &= \cos\alpha\sin\gamma(z'-z) - \cos\alpha(\varrho'-\varrho)\cos\gamma - 2\varrho'\cos\gamma\sin^2\frac{\alpha}{2} \\ &= \cos\alpha[(z'-z)\sin\gamma - (\varrho'-\varrho)\cos\gamma] - 2\varrho'\cos\gamma\sin^2\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Fall φt:

$$\vec{u}_\varphi\cdot(\vec{R}\times\vec{u}'_t) = \vec{u}'_t\cdot(\vec{u}_\varphi\times\vec{R}),$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_\varphi\times\vec{R} &= \vec{u}_\varphi\times[\vec{u}_\varrho(\varrho-\varrho'\cos\alpha) - \vec{u}_\varphi\varrho'\sin\alpha + \vec{u}_z(z-z')] \\ &= -\vec{u}_z(\varrho-\varrho'\cos\alpha) + \vec{u}_\varrho(z-z'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}'_t\cdot(\vec{u}_\varphi\times\vec{R}) &= \vec{u}'_t\cdot[-\vec{u}_z(\varrho-\varrho'\cos\alpha) + \vec{u}_\varrho(z-z')] \\ &= [\vec{u}_\varrho\sin\gamma'\cos\alpha + \vec{u}_\varphi\sin\gamma'\sin\alpha + \vec{u}_z\cos\gamma'] \\ &\quad \cdot[-\vec{u}_z(\varrho-\varrho'\cos\alpha) + \vec{u}_\varrho(z-z')] \\ &= \sin\gamma'\cos\alpha(z-z') - \cos\gamma'(\varrho-\varrho'\cos\alpha) \\ &= \cos\alpha\sin\gamma'(z-z') - [\cos\alpha\cos\gamma'(\varrho-\varrho') - \varrho\cos\alpha\cos\gamma' + \varrho\cos\gamma'] \\ &= -\sin\gamma'(z'-z)\cos\alpha + (\varrho'-\varrho)\cos\gamma'\cos\alpha - 2\varrho\cos\gamma'\sin^2\frac{\alpha}{2}, \\ \vec{u}_\varphi\cdot(\vec{R}\times\vec{u}'_t) &= [(\varrho'-\varrho)\cos\gamma' - (z'-z)\sin\gamma']\cos\alpha - 2\varrho\cos\gamma'\sin^2\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Fall $\varphi\varphi$:

$$\begin{aligned} \vec{u}_\varphi\cdot(\vec{R}\times\vec{u}'_\varphi) &= \vec{u}'_\varphi\cdot(\vec{u}_\varphi\times\vec{R}) \\ &= [-\vec{u}_\varrho\sin\alpha + \vec{u}_\varphi\cos\alpha]\cdot[-\vec{u}_z(\varrho-\varrho'\cos\alpha) + \vec{u}_\varrho(z-z')] \\ &= (z'-z)\sin\alpha. \end{aligned}$$

Setzt man nun die Basis- und Gewichtsfunktionen und die obigen Beziehungen für die Vektoroperationen ein, so sind erneut vier Fälle zu unterscheiden. Weil der Abstand

$$R = R(\varrho;\varrho';z;z';\alpha) = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho'\cos\alpha + (z-z')^2}$$

aufgrund der Substitution $\varphi'-\varphi=\alpha$ formal keine Funktion der Variablen φ ist, kann die Integration über φ geschlossen ausgeführt werden. Es zeigt sich hierbei, daß die Matrixelemente mit $m \neq m'$ Null sind.

Fall tt:

$$
\begin{aligned}
{}^{tt}S^C_{\tau\tau'} &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'} \cos(m\varphi)\sin(m'(\alpha+\varphi))\sin\alpha[\varrho\cos\gamma\sin\gamma' \\
&\quad -\varrho'\sin\gamma\cos\gamma' + (z'-z)\sin\gamma\sin\gamma']\frac{1+jkR}{4\pi R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\cos(m\varphi)\sin(m'(\alpha+\varphi))\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\sin(m\varphi+m'(\alpha+\varphi)) - \sin(m\varphi - m'(\alpha+\varphi))]\mathrm{d}\varphi \\
&= \pi\sin m\alpha \quad \text{für} \quad m=m',
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{tt}_{m}S^C_{nn'} &= \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'}[\varrho'\sin\gamma\cos\gamma' - \varrho\cos\gamma\sin\gamma' \\
&\quad -(z'-z)\sin\gamma\sin\gamma']G_{6,m}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t, \\
G_{6,m} &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin(m\alpha)\sin\alpha\frac{1+jkR}{R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}\alpha.
\end{aligned}
$$

Fall $t\varphi$:

$$
\begin{aligned}
{}^{t\varphi}S^C_{\tau\tau'} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\frac{1}{\varrho}D_n D_{n=n'}\cos(m\varphi)\cos(m'\varphi)\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi \\
&\quad -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'}\cos(m\varphi)\cos(m'(\alpha+\varphi))\left\{\cos\alpha[(z'-z)\sin\gamma\right. \\
&\quad \left.-(\varrho'-\varrho)\cos\gamma] - 2\varrho'\cos\gamma\sin^2\frac{\alpha}{2}\right\}\frac{1+jkR}{4\pi R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\cos(m\varphi)\cos(m'(\alpha+\varphi))\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(m\varphi-m'(\alpha+\varphi)) + \cos(m\varphi + m'(\alpha+\varphi))]\mathrm{d}\varphi \\
&= \pi\cos m\alpha \quad \text{für} \quad m=m',
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
{}^{t\varphi}_{m}S^{C}_{nn'} &= \frac{\pi}{2}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \frac{1}{\varrho} D_n D_{n=n'} \mathrm{d}t \\
&+ \int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'} \{[(\varrho' - \varrho)\cos\gamma - (z'-z)\sin\gamma] G_{5,m} \\
&+ \varrho' \cos\gamma G_{4,m}\} \mathrm{d}t' \mathrm{d}t, \\
G_{4,m} &= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} \cos(m\alpha)\sin^2\frac{\alpha}{2}\frac{1+jkR}{R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}\alpha, \\
G_{5,m} &= \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2\pi} \cos(m\alpha)\cos\alpha\frac{1+jkR}{R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}\alpha.
\end{aligned}$$

Fall φt:

$$\begin{aligned}
{}^{\varphi t}S^{C}_{\tau\tau'} &= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \frac{1}{\varrho} D_n D_{n=n'} \sin(m\varphi)\sin(m'\varphi)\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi \\
&+ \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'} \sin(m\varphi)\sin(m'(\alpha+\varphi))\,\{\cos\alpha[(\varrho'-\varrho)\cos\gamma' \\
&-(z'-z)\sin\gamma'] - 2\varrho\cos\gamma'\sin^2\frac{\alpha}{2}\Big\}\frac{1+jkR}{4\pi R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{0}^{2\pi} \sin(m\varphi)\sin(m'(\alpha+\varphi))\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}[\cos(m\varphi - m'(\alpha+\varphi)) - \cos(m\varphi + m'(\alpha+\varphi))]\mathrm{d}\varphi \\
&= \pi\cos m\alpha \quad \text{für} \quad m = m',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{\varphi t}_{m}S^{C}_{nn'} &= \frac{\pi}{2}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \frac{1}{\varrho} D_n D_{n=n'} \mathrm{d}t \\
&+ \int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'} \{[(\varrho' - \varrho)\cos\gamma' - (z'-z)\sin\gamma'] G_{5,m} \\
&- \varrho \cos\gamma' G_{4,m}\} \mathrm{d}t' \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Fall $\varphi\varphi$:

$$\begin{aligned}{}^{\varphi\varphi}S^{C}_{\tau\tau'} &= \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'} \sin(m\varphi)\cos(m'(\alpha+\varphi))(z' \\ &\quad -z)\sin\alpha \frac{1+jkR}{4\pi R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int\limits_{0}^{2\pi}\sin(m\varphi)\cos(m'(\alpha+\varphi))\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}[\sin(m\varphi - m'(\alpha+\varphi)) + \sin(m\varphi + m'(\alpha+\varphi))]\mathrm{d}\varphi \\ &= -\pi\sin m\alpha \quad \text{für} \quad m = m',\end{aligned}$$

$${}^{\varphi\varphi}_{m}S^{C}_{nn'} = -\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'}(z'-z)G_{6,m}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t.$$

Die $G_{4,m}$, $G_{5,m}$ und $G_{6,m}$ lassen sich etwas vereinfachen, wenn man beachtet, daß die Integranden jeweils gerade *und* 2π-periodische Funktionen von α sind. Daraus ergibt sich dann zum Beispiel:

$$\begin{aligned}G_{4,m} &= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\cos(m\alpha)\sin^2\frac{\alpha}{2}\frac{1+jkR}{R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(m\alpha)\sin^2\frac{\alpha}{2}\frac{1+jkR}{R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{0}\cos(m\alpha)\sin^2\frac{\alpha}{2}\frac{1+jkR}{R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(m\alpha)\sin^2\frac{\alpha}{2}\frac{1+jkR}{R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}\alpha \\ &= \int\limits_{0}^{\pi}\cos(m\alpha)\sin^2\frac{\alpha}{2}\frac{1+jkR}{R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}\alpha.\end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich damit für die Elemente der Matrix ${}_{m}\underline{S}^{C}$:

$$\begin{aligned}{}^{tt}_{m}S^{C}_{nn'} &= \int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'}[\varrho'\sin\gamma\cos\gamma' - \varrho\cos\gamma\sin\gamma' \\ &\quad -(z'-z)\sin\gamma\sin\gamma']G_{6,m}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t, \\ {}^{t\varphi}_{m}S^{C}_{nn'} &= \frac{\pi}{2}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\frac{1}{\varrho}D_n D_{n=n'}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'} \{[(\varrho' - \varrho)\cos\gamma - (z' - z)\sin\gamma] G_{5,m} \\
& + \varrho' \cos\gamma G_{4,m}\} \mathrm{d}t' \mathrm{d}t, \\
{}^{\varphi t}_{m}S^{C}_{nn'} = {} & \frac{\pi}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \frac{1}{\varrho} D_n D_{n=n'} \mathrm{d}t \\
& + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'} \{[(\varrho' - \varrho)\cos\gamma' - (z' - z)\sin\gamma'] G_{5,m} \\
& - \varrho \cos\gamma' G_{4,m}\} \mathrm{d}t' \mathrm{d}t, \\
{}^{\varphi\varphi}_{m}S^{C}_{nn'} = {} & - \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_n D_{n'} (z' - z) G_{6,m} \mathrm{d}t' \mathrm{d}t, \\
G_{4,m} = {} & \int_0^{\pi} \cos(m\alpha) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \frac{1 + jkR}{R^3} \mathrm{e}^{-jkR} \mathrm{d}\alpha, \\
G_{5,m} = {} & \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(m\alpha) \cos\alpha \frac{1 + jkR}{R^3} \mathrm{e}^{-jkR} \mathrm{d}\alpha, \\
G_{6,m} = {} & \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(m\alpha) \sin\alpha \frac{1 + jkR}{R^3} \mathrm{e}^{-jkR} \mathrm{d}\alpha.
\end{aligned}
$$

Nun steht noch die Behandlung der Matrix $\underline{S}^X$ aus. Deren Elemente bestimmen sich aus:

$$
\begin{aligned}
{}^{\mu\nu}S^{X}_{\tau\tau'} = {} & \frac{1}{2} \int_{F_A + F_B} \mathsf{U}^{\mu}_{\tau}(t;\varphi) \cdot \{\vec{n} \times [\vec{n} \times \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}(t;\varphi)]\} \mathrm{d}f \\
& + \int_{F_A + F_B} \mathrm{V.p.} \int_{F_A + F_B} \frac{1 + jkR}{4\pi R^3} \mathrm{e}^{-jkR} \mathsf{U}^{\mu}_{\tau}(t;\varphi) \cdot \{\vec{R} \times [\vec{n}' \times \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}(t';\varphi')]\} \mathrm{d}f' \mathrm{d}f.
\end{aligned}
$$

Die Berechnung der Matrix $\underline{S}^X$ unterscheidet sich strukturell von der Berechnung der Matrix $\underline{S}^C$ nur durch die Vektoroperation $\vec{n}'\times$ beziehungsweise $\vec{n}\times$ im Integranden. Mit

$$\vec{n}' = \vec{u}'_t \times \vec{u}'_{\varphi}$$

ist

$$
\begin{aligned}
\vec{n}' \times \mathsf{C}^{t}_{m'n'}(t';\varphi') &= \vec{n}' \times \vec{u}'_t \frac{1}{\varrho'} D(t' - t_{n'}) \sin m'\varphi' \\
&= \vec{u}'_{\varphi} \frac{1}{\varrho'} D(t' - t_{n'}) \sin m'\varphi'
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned}\vec{n}' \times \mathsf{C}^{\varphi}_{m'n'}(t';\varphi') &= \vec{n}' \times \vec{u}'_{\varphi}\frac{1}{\varrho'}D(t'-t_{n'})\cos m'\varphi' \\ &= -\vec{u}'_t\frac{1}{\varrho'}D(t'-t_{n'})\cos m'\varphi'.\end{aligned}$$

Fall tt:

$$\begin{aligned}{}^{tt}S^X_{\tau\tau'} &= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\frac{1}{\varrho}D_nD_{n=n'}\sin(m\varphi)\sin(m'\varphi)\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi \\ &+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_nD_{n'}\sin(m\varphi)\sin(m'(\alpha+\varphi))\left\{\cos\alpha[(z'-z)\sin\gamma\right. \\ &\left.-(\varrho'-\varrho)\cos\gamma]-2\varrho'\cos\gamma\sin^2\frac{\alpha}{2}\right\}\frac{1+jkR}{4\pi R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi, \\ {}^{tt}_{m}S^X_{nn'} &= -\frac{\pi}{2}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\frac{1}{\varrho}D_nD_{n=n'}\mathrm{d}t \\ &-\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_nD_{n'}\{[(\varrho'-\varrho)\cos\gamma-(z'-z)\sin\gamma]G_{5,m} \\ &+\varrho'\cos\gamma G_{4,m}\}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Fall $t\varphi$:

$$\begin{aligned}{}^{t\varphi}S^X_{\tau\tau'} &= -\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_nD_{n'}\sin(m\varphi)\cos(m'(\alpha+\varphi))\sin\alpha[\varrho\cos\gamma\sin\gamma' \\ &-\varrho'\sin\gamma\cos\gamma'+(z'-z)\sin\gamma\sin\gamma']\frac{1+jkR}{4\pi R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi, \\ {}^{t\varphi}_{m}S^X_{nn'} &= -\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_nD_{n'}[\varrho'\sin\gamma\cos\gamma'-\varrho\cos\gamma\sin\gamma' \\ &-(z'-z)\sin\gamma\sin\gamma']G_{6,m}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Fall φt:

$${}^{\varphi t}S^X_{\tau\tau'} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_nD_{n'}\cos(m\varphi)\sin(m'(\alpha+\varphi))(z'$$

$$-z)\sin\alpha\frac{1+jkR}{4\pi R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi,$$

$$ {}^{\varphi t}_{m}S^X_{nn'} = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_nD_{n'}(z'-z)G_{6,m}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t.$$

Fall $\varphi\varphi$:

$$\begin{aligned}
{}^{\varphi\varphi}S^X_{\tau\tau'} &= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\frac{1}{\varrho}D_nD_{n'}\cos(m\varphi)\cos(m'\varphi)\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi \\
&-\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_nD_{n'}\cos(m\varphi)\cos(m'(\alpha+\varphi))\left\{\cos\alpha[(\varrho'-\varrho)\cos\gamma'\right. \\
&\left.-(z'-z)\sin\gamma'] - 2\varrho\cos\gamma'\sin^2\frac{\alpha}{2}\right\}\frac{1+jkR}{4\pi R^3}\mathrm{e}^{-jkR}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi, \\
{}^{\varphi\varphi}_{m}S^X_{nn'} &= -\frac{\pi}{2}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\frac{1}{\varrho}D_nD_{n=n'}\mathrm{d}t \\
&-\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_nD_{n'}\{[(\varrho'-\varrho)\cos\gamma'-(z'-z)\sin\gamma']G_{5,m} \\
&-\varrho\cos\gamma' G_{4,m}\}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Durch einen Vergleich mit den Elementen der Matrix $\underline{S}^C$ sieht man, daß sich die Matrix $\underline{S}^X$ wie folgt ergibt:

$$\underline{S}^X = -\begin{pmatrix} {}^{t\varphi}\underline{S}^C & {}^{tt}\underline{S}^C \\ {}^{\varphi\varphi}\underline{S}^C & {}^{\varphi t}\underline{S}^C \end{pmatrix}.$$

3.4.5 Berechnung der T-Matrizen

Die Elemente der Matrix $\underline{T}^C$ ergeben sich aus

$${}^{\mu\nu}T^C_{\tau\tau'} = \frac{1}{jk}\langle \mathsf{U}^\mu_\tau(t;\varphi), \mathrm{rot\ rot}\int\limits_{F_A+F_B}\mathsf{C}^\nu_{\tau'}(t';\varphi')G_0(t;\varphi;t';\varphi')\mathrm{d}f'\rangle.$$

Die doppelte Rotation kann dabei durch

$$\mathrm{rot\ rot} = \mathrm{grad\ div} - \nabla^2$$

ersetzt werden. Da die Greensche Funktion die Struktur $g(r)/r$ besitzt, erfüllt sie die skalare Wellengleichung

$$\nabla^2 + k^2 = 0$$

für sinusförmige Zeitabhängigkeiten. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Anwendung von ∇^2 in Kugelkoordinaten [4]:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{r^2\tan\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\ .$$

Angewandt ergibt sich:

$$\nabla^2\frac{g(r)}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}g(r) = -k^2\frac{g(r)}{r},$$

wenn

$$g(r) = \mathrm{e}^{-jkr}$$

ist. Man kann also für die doppelte Rotation auch

$$\mathrm{rot\ rot} = \mathrm{grad\ div}\ + k^2$$

schreiben, da die Rotation nur bezüglich der Variablen der Greenschen Funktion gebildet wird. Damit ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}\mathrm{rot\ rot}\int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}G_0\mathrm{d}f' &= (\mathrm{grad\ div} + k^2)\int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}G_0\mathrm{d}f' \\ &= k^2\int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}G_0\mathrm{d}f' + \mathrm{grad}\int\limits_{F_A+F_B} \mathrm{div}(\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}G_0)\mathrm{d}f'.\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften der Greenschen Funktion kann die Divergenz weiter umgeformt werden:

$$\mathrm{div}(\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}G_0) = \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}\cdot\mathrm{grad}G_0 = -\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}\cdot\mathrm{grad}'G_0.$$

Wegen

$$\mathrm{div}'(\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}G_0) = \mathrm{div}'\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}G_0 + \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}\cdot\mathrm{grad}G_0$$

ist

$$\mathrm{div}(\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}G_0) = G_0\mathrm{div}'\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'} - \mathrm{div}'(\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}G_0).$$

Diese Beziehungen in das Integral eingesetzt ergeben:

$$\begin{aligned}\mathrm{rot\ rot}\int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}G_0\mathrm{d}f' &= k^2\int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}G_0\mathrm{d}f' + \mathrm{grad}\int\limits_{F_A+F_B}[G_0\mathrm{div}'\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'} - \mathrm{div}'(\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}G_0)]\mathrm{d}f' \\ &= k^2\int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}G_0\mathrm{d}f' + \mathrm{grad}\int\limits_{F_A+F_B} G_0\mathrm{div}'\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}\mathrm{d}f'.\end{aligned}$$

Der letzte Schritt war durch die Anwendung des zweidimensionalen Divergenzsatzes

$$\int\limits_F \mathrm{div}\,\vec{u}\mathrm{d}f = \oint\limits_L \vec{u}\cdot\vec{n}\mathrm{d}l$$

auf das Integral

$$\int\limits_{F_A+F_B} \mathrm{div}'(\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'} G_0)\mathrm{d}f'$$

möglich. Dieser ist hier gültig, da der Vektor $\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}$ immer in der Fläche $F_A + F_B$ liegt. Da die betrachtete Fläche geschlossen ist, besitzt ihre Randkurve L die Länge Null.

Der zweidimensionale Divergenzsatz wird noch ein weiteres Mal angewendet. Aufgrund des zweidimensionalen Divergenzsatzes ergibt sich

$$\begin{aligned} \int\limits_{F_A+F_B} \mathrm{div}\left(\mathsf{U}^{\mu}_{\tau} \int\limits_{F_A+F_B} G_0 \mathrm{div}'\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}\mathrm{d}f'\right)\mathrm{d}f &= 0, \\ \int\limits_{F_A+F_B} \left(\mathsf{U}^{\mu}_{\tau} \cdot \mathrm{grad} \int\limits_{F_A+F_B} G_0 \mathrm{div}'\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}\mathrm{d}f' + \mathrm{div}\,\mathsf{U}^{\mu}_{\tau} \int\limits_{F_A+F_B} G_0 \mathrm{div}'\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}\mathrm{d}f'\right)\mathrm{d}f &= 0, \end{aligned}$$

d.h.

$$\int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{U}^{\mu}_{\tau} \cdot \mathrm{grad} \int\limits_{F_A+F_B} G_0 \mathrm{div}'\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}\mathrm{d}f'\mathrm{d}f = - \int\limits_{F_A+F_B} \mathrm{div}\,\mathsf{U}^{\mu}_{\tau} \int\limits_{F_A+F_B} G_0 \mathrm{div}'\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}\mathrm{d}f'\mathrm{d}f.$$

Damit erhält man eine neue Beziehung zur Bestimmung der Elemente der Matrix $\underline{T}^C$:

$$\begin{aligned} {}^{\mu\nu}T^{C}_{\tau\tau'} = \frac{1}{jk}\Bigg[& k^2 \int\limits_{F_A+F_B}\int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{U}^{\mu}_{\tau}(t;\varphi)\cdot \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}(t';\varphi')G_0(t;\varphi;t';\varphi')\mathrm{d}f'\mathrm{d}f \\ & - \int\limits_{F_A+F_B}\int\limits_{F_A+F_B} \mathrm{div}\,\mathsf{U}^{\mu}_{\tau}(t;\varphi)G_0(t;\varphi;t';\varphi')\mathrm{div}'\mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}(t';\varphi')\mathrm{d}f'\mathrm{d}f \Bigg]. \end{aligned}$$

Diese Gleichung enthält jetzt keine zweifachen Ableitungen mehr, die verbliebenen einfachen Ableitungen der Basis- und Gewichtsfunktionen sind analytisch durchführbar. Die Definitionslücken der Ableitungen an den Knickpunkten der Dreiecksfunktion sind im Integrationsprozeß ohne Bedeutung.

Für die im ersten Integralausdruck auftretenden Skalarprodukte von Einheitsvektoren müssen jetzt Beziehungen gefunden werden.

Fall tt:

$$\begin{aligned} \vec{u}_t \cdot \vec{u}_t' &= (\vec{u}_\varrho \sin\gamma + \vec{u}_z\cos\gamma)\cdot(\vec{u}_\varrho' \sin\gamma' + \vec{u}_z\cos\gamma') \\ &= \vec{u}_\varrho\cdot\vec{u}_\varrho' \sin\gamma\sin\gamma' + \cos\gamma\cos\gamma' \\ &= (\vec{u}_x\cos\varphi + \vec{u}_y\sin\varphi)\cdot(\vec{u}_x\cos\varphi' + \vec{u}_y\sin\varphi')\sin\gamma\sin\gamma' + \cos\gamma\cos\gamma' \\ &= (\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi')\sin\gamma\sin\gamma' + \cos\gamma\cos\gamma' \\ &= \sin\gamma\sin\gamma'\cos(\varphi-\varphi') + \cos\gamma\cos\gamma' \\ &= \sin\gamma\sin\gamma'\cos\alpha + \cos\gamma\cos\gamma'. \end{aligned}$$

Fall $t\varphi$:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_t \cdot \vec{u}'_\varphi &= (\vec{u}_\varrho \sin\gamma + \vec{u}_z \cos\gamma) \cdot (-\vec{u}_x \sin\varphi' + \vec{u}_y \cos\varphi') \\
&= [(\vec{u}_x \cos\varphi + \vec{u}_y \sin\varphi)\sin\gamma + \vec{u}_z \cos\gamma] \cdot [-\vec{u}_x \sin\varphi' + \vec{u}_y \cos\varphi'] \\
&= (-\cos\varphi \sin\varphi' + \sin\varphi \cos\varphi')\sin\gamma \\
&= -(\sin\varphi' \cos\varphi - \cos\varphi' \sin\varphi)\sin\gamma \\
&= -\sin\gamma \sin(\varphi' - \varphi) \\
&= -\sin\gamma \sin\alpha.
\end{aligned}$$

Fall φt:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_\varphi \cdot \vec{u}'_t &= (-\vec{u}_x \sin\varphi + \vec{u}_y \cos\varphi) \cdot (\vec{u}'_\varrho \sin\gamma' + \vec{u}_z \cos\gamma') \\
&= (-\vec{u}_x \sin\varphi + \vec{u}_y \cos\varphi) \cdot [(\vec{u}_x \cos\varphi' + \vec{u}_y \sin\varphi')\sin\gamma' + \vec{u}_z \cos\gamma'] \\
&= (-\sin\varphi \cos\varphi' + \cos\varphi \sin\varphi')\sin\gamma' \\
&= \sin\gamma'(\sin\varphi' \cos\varphi - \cos\varphi' \sin\varphi) \\
&= \sin\gamma' \sin(\varphi' - \varphi) \\
&= \sin\gamma' \sin\alpha.
\end{aligned}$$

Fall $\varphi\varphi$:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_\varphi \cdot \vec{u}'_\varphi &= (-\vec{u}_x \sin\varphi + \vec{u}_y \cos\varphi) \cdot (-\vec{u}_x \sin\varphi' + \vec{u}_y \cos\varphi') \\
&= \cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi' \\
&= \cos(\varphi' - \varphi) \\
&= \cos\alpha.
\end{aligned}$$

Es wurde wieder $\varphi' - \varphi = \alpha$ substituiert. Die Divergenz eines in der Oberfläche liegenden Vektors $\vec{u}$ ergibt sich in den Koordinaten der Oberflächenparametrisierung gemäß [1] zu

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho u_t}{\partial t} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Dies folgt aus einer Betrachtung der Veränderung der Metrik beim Übergang vom kartesischen Koordinatensystem in das System der Oberflächenkoordinaten. Hiermit kann nun die Divergenz im zweiten Integralausdruck umgeschrieben werden. Nach dem Einsetzen dieser Beziehungen in die Bestimmungsgleichung für die Elemente der Matrix $\underline{T}^C$ läßt sich aufgrund der obigen Substitution auch an dieser Stelle die Integration über φ geschlossen ausführen. Es zeigt sich auch hier wieder, daß alle Matrixelemente mit $m \neq m'$ Null und damit unterschiedliche φ-Abhängigkeiten voneinander entkoppelt sind.

Fall tt:

$$ {}^{tt}T^C_{\tau\tau'} = \frac{1}{jk} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \int_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} \Big[k^2 D_n D_{n'} \sin(m\varphi)\sin(m'(\alpha+\varphi))(\sin\gamma \sin\gamma' \cos\alpha $$

$$
\begin{aligned}
&+\cos\gamma\cos\gamma') - \frac{\partial}{\partial t}D_n\frac{\partial}{\partial t'}D_{n'}\sin(m\varphi)\sin(m'(\alpha+\varphi))\Big]\,G_0\mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi,\\
{}^{tt}_{m}T^{C}_{nn'} &= \frac{1}{jk}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}}\Big[k^2D_nD_{n'}(\sin\gamma\sin\gamma' G_{2,m}+\cos\gamma\cos\gamma' G_{1,m})\\
&\quad-\frac{\partial}{\partial t}D_n\frac{\partial}{\partial t'}D_{n'}G_{1,m}\Big]\,\mathrm{d}t'\mathrm{d}t,\\
G_{1,m} &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\cos(m\alpha)\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\mathrm{d}\alpha,\\
G_{2,m} &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\cos(m\alpha)\cos\alpha\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\mathrm{d}\alpha.
\end{aligned}
$$

Fall $t\varphi$:

$$
\begin{aligned}
{}^{t\varphi}T^{C}_{\tau\tau'} &= \frac{1}{jk}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}}\Big[-k^2D_nD_{n'}\sin(m\varphi)\cos(m'(\alpha+\varphi))\sin\gamma\sin\alpha\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial t}D_n\frac{m'}{\varrho'}D_{n'}\sin(m\varphi)\sin(m'(\alpha+\varphi))\Big]\,G_0\mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi,\\
{}^{t\varphi}_{m}T^{C}_{nn'} &= \frac{1}{jk}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}}\left(k^2D_nD_{n'}\sin\gamma G_{3,m}+\frac{\partial}{\partial t}D_n\frac{m}{\varrho'}D_{n'}G_{1,m}\right)\mathrm{d}t'\mathrm{d}t,\\
G_{3,m} &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin(m\alpha)\sin\alpha\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\mathrm{d}\alpha.
\end{aligned}
$$

Fall φt:

$$
\begin{aligned}
{}^{\varphi t}T^{C}_{\tau\tau'} &= \frac{1}{jk}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}}\Big[k^2D_nD_{n'}\cos(m\varphi)\sin(m'(\alpha+\varphi))\sin\gamma'\sin\alpha\\
&\quad+\frac{m}{\varrho}D_n\frac{\partial}{\partial t'}D_{n'}\sin(m\varphi)\sin(m'(\alpha+\varphi))\Big]\,G_0\mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi,\\
{}^{\varphi t}_{m}T^{C}_{nn'} &= \frac{1}{jk}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}}\left(k^2D_nD_{n'}\sin\gamma' G_{3,m}+\frac{m}{\varrho}D_n\frac{\partial}{\partial t'}D_{n'}G_{1,m}\right)\mathrm{d}t'\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Fall $\varphi\varphi$:

$$
{}^{\varphi\varphi}T^{C}_{\tau\tau'} = \frac{1}{jk}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}}\Big[k^2D_nD_{n'}\cos(m\varphi)\cos(m'(\alpha+\varphi))\cos\alpha
$$

$$
\left. -\frac{m}{\varrho}\frac{m'}{\varrho'} D_n D_{n'} \sin(m\varphi)\sin(m'(\alpha+\varphi))\right] G_0 \mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi,
$$

$$
{}^{\varphi\varphi}_{m}T^C_{nn'} = \frac{1}{jk}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} \left(k^2 D_n D_{n'} G_{2,m} - \frac{m^2}{\varrho\varrho'} D_n D_{n'} G_{1,m}\right) \mathrm{d}t'\mathrm{d}t.
$$

Zusammenfassend ergibt sich damit für die Elemente der Matrix ${}_{m}\underline{T}^C$:

$$
\begin{aligned}
{}^{tt}_{m}T^C_{nn'} &= \frac{1}{jk}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} \Big[k^2 D_n D_{n'}(\sin\gamma\sin\gamma' G_{2,m} + \cos\gamma\cos\gamma' G_{1,m}) \\
&\quad \left. -\frac{\partial}{\partial t} D_n \frac{\partial}{\partial t'} D_{n'} G_{1,m}\right] \mathrm{d}t'\mathrm{d}t, \\
{}^{t\varphi}_{m}T^C_{nn'} &= \frac{1}{jk}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} \left(k^2 D_n D_{n'}\sin\gamma G_{3,m} + \frac{\partial}{\partial t} D_n \frac{m}{\varrho'} D_{n'} G_{1,m}\right) \mathrm{d}t'\mathrm{d}t, \\
{}^{\varphi t}_{m}T^C_{nn'} &= \frac{1}{jk}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} \left(k^2 D_n D_{n'}\sin\gamma' G_{3,m} + \frac{m}{\varrho} D_n \frac{\partial}{\partial t'} D_{n'} G_{1,m}\right) \mathrm{d}t'\mathrm{d}t, \\
{}^{\varphi\varphi}_{m}T^C_{nn'} &= \frac{1}{jk}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} \left(k^2 D_n D_{n'} G_{2,m} - \frac{m^2}{\varrho\varrho'} D_n D_{n'} G_{1,m}\right) \mathrm{d}t'\mathrm{d}t, \\
G_{1,m} &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \cos(m\alpha)\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\mathrm{d}\alpha, \\
G_{2,m} &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \cos(m\alpha)\cos\alpha\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\mathrm{d}\alpha, \\
G_{3,m} &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin(m\alpha)\sin\alpha\frac{\mathrm{e}^{-jkR}}{R}\mathrm{d}\alpha.
\end{aligned}
$$

Die Elemente der Matrix $\underline{T}^X$ berechnen sich aus

$$
\begin{aligned}
{}^{\mu\nu}T^X_{\tau\tau'} &= \frac{1}{jk}\left\{k^2 \int\limits_{F_A+F_B}\int\limits_{F_A+F_B} \mathsf{W}^{\mu}_{\tau}(t;\varphi)\cdot[\vec{n}'\times \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}(t';\varphi')] G_0(t;\varphi;t';\varphi')\mathrm{d}f'\mathrm{d}f \right. \\
&\quad \left. - \int\limits_{F_A+F_B}\int\limits_{F_A+F_B} \mathrm{div}\mathsf{W}^{\mu}_{\tau}(t;\varphi) G_0(t;\varphi;t';\varphi')\mathrm{div}'[\vec{n}'\times \mathsf{C}^{\nu}_{\tau'}(t';\varphi')]\mathrm{d}f'\mathrm{d}f\right\}.
\end{aligned}
$$

Fall tt:

$$
\begin{aligned}
{}^{tt}T^{X}_{\tau\tau'} &= \frac{1}{jk}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}}\Big[-k^2 D_n D_{n'}\cos(m\varphi)\sin(m'(\alpha+\varphi))\sin\gamma\sin\alpha \\
&\quad -\frac{\partial}{\partial t}D_n\frac{m'}{\varrho'}D_{n'}\cos(m\varphi)\cos(m'(\alpha+\varphi))\Big]G_0 \mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi, \\
{}^{tt}_{m}T^{X}_{nn'} &= -\frac{1}{jk}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}}\left(k^2 D_n D_{n'}\sin\gamma G_{3,m}+\frac{\partial}{\partial t}D_n\frac{m}{\varrho'}D_{n'}G_{1,m}\right)\mathrm{d}t'\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Fall $t\varphi$:

$$
\begin{aligned}
{}^{t\varphi}T^{X}_{\tau\tau'} &= \frac{1}{jk}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}}\Big[-k^2 D_n D_{n'}\cos(m\varphi)\cos(m'(\alpha+\varphi))(\sin\gamma\sin\gamma'\cos\alpha \\
&\quad +\cos\gamma\cos\gamma')+\frac{\partial}{\partial t}D_n\frac{\partial}{\partial t'}D_{n'}\cos(m\varphi)\cos(m'(\alpha+\varphi))\Big]G_0 \mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi, \\
{}^{t\varphi}_{m}T^{X}_{nn'} &= -\frac{1}{jk}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}}\Big[k^2 D_n D_{n'}(\sin\gamma\sin\gamma' G_{2,m}+\cos\gamma\cos\gamma' G_{1,m}) \\
&\quad -\frac{\partial}{\partial t}D_n\frac{\partial}{\partial t'}D_{n'}G_{1,m}\Big]\mathrm{d}t'\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Fall φt:

$$
\begin{aligned}
{}^{\varphi t}T^{X}_{\tau\tau'} &= \frac{1}{jk}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}}\Big[-k^2 D_n D_{n'}\sin(m\varphi)\sin(m'(\alpha+\varphi))\cos\alpha \\
&\quad +\frac{m}{\varrho}\frac{m'}{\varrho'}D_n D_{n'}\cos(m\varphi)\cos(m'(\alpha+\varphi))\Big]G_0 \mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi, \\
{}^{\varphi t}_{m}T^{X}_{nn'} &= -\frac{1}{jk}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}}\left(k^2 D_n D_{n'}G_{2,m}-\frac{m^2}{\varrho\varrho'}D_n D_{n'}G_{1,m}\right)\mathrm{d}t'\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Fall $\varphi\varphi$:

$$
{}^{\varphi\varphi}T^{X}_{\tau\tau'} = \frac{1}{jk}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}}\Big[k^2 D_n D_{n'}\sin(m\varphi)\cos(m'(\alpha+\varphi))\sin\gamma'\sin\alpha
$$

$$-\frac{m}{\varrho}D_n\frac{\partial}{\partial t'}D_{n'}\cos(m\varphi)\cos(m'(\alpha+\varphi))\Big]\,G_0\mathrm{d}t'\mathrm{d}t\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\varphi,$$

$$ {}^{\varphi\varphi}_{m}T^X_{nn'} = -\frac{1}{jk}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}}\left(k^2D_nD_{n'}\sin\gamma' G_{3,m}+\frac{m}{\varrho}D_n\frac{\partial}{\partial t'}D_{n'}G_{1,m}\right)\mathrm{d}t'\mathrm{d}t.$$

Für die Matrix $\underline{T}^X$ ergibt sich somit:

$$\underline{T}^X = -\begin{pmatrix} {}^{t\varphi}\underline{T}^C & {}^{tt}\underline{T}^C \\ {}^{\varphi\varphi}\underline{T}^C & {}^{\varphi t}\underline{T}^C \end{pmatrix}.$$

3.5 Behandlung der singulären Integrale

3.5.1 Behandlung der S-Matrix-Integrale

Zur Berechnung der S-Matrizen mußten die Integrale in Cauchy-Hauptwerte umgeformt werden. Auf der numerischen Seite erscheinen auch die dreifach singulären Integranden etwas problematisch. Hier treten jedoch keine Probleme auf. Eine Polstelle kann für den Fall $\alpha = 0$ auftreten, wenn sich Auf- und Quellpunkt auf dem selben Kreisumfang befinden. In diesem Fall sind die Integrale $G_{4,m}$, $G_{5,m}$ und $G_{6,m}$ theoretisch nicht berechenbar, da die Integranden für $\alpha \to 0$ in etwa mit $1/\alpha$ ansteigen. Da jedoch die eigentliche Singularität des doppelten Flächenintegrals bereits abgespalten wurde, stellt sich hier das Problem der numerischen Berechnung des dabei entstandenen Cauchyschen Hauptwertes. Hierzu wird beim Auftreten einer Singularität eine kleine Umgebung um diese aus dem Integrationsbereich herausgenommen. Rein mathematisch wäre zur Bildung des Cauchyschen Hauptwertes eine Grenzwertbildung notwendig; diese kann jedoch numerisch nicht dargestellt werden. Rein *numerisch* wird diese Art der Berechnung des Cauchyschen Hauptwertes noch dadurch unterstützt, daß die Sinusfunktion in den Integralen $G_{4,m}$ und $G_{6,m}$ für $\alpha \to 0$ gegen Null geht, und zum anderen dadurch, daß das Integral $G_{5,m}$ durch die eckige Klammer in den Gleichungen zur Bestimmung der S-Matrixelemente im entsprechenden Fall mit einer Null gewichtet wird. Das Integral $G_{4,m}$ kann nur dann zu Konvergenzproblemen führen, wenn der Term $\varrho\cos\gamma'$ nicht Null wird; das Integral $G_{6,m}$ kann nur dann zu Konvergenzproblemen führen, wenn der Term $(\varrho'\sin\gamma\cos\gamma' - \varrho\cos\gamma\sin\gamma')$ nicht Null wird. Dies ist gerade häufig bei nicht rechtwinkligen Strukturen der Fall, wie sie im Rahmen dieser Arbeit untersucht wurden. In diesem Falle ist dann die Integrationsgenauigkeit geeignet zu erhöhen.

Ansonsten können die Gleichungen zur Berechnung der Matrixelemente direkt programmiert werden. Zur Berechnung der Integrale $G_{4,m}$, $G_{5,m}$ und $G_{6,m}$ wurde eine Gaußquadratur[5] der Ordnung 20 und zur Berechnung der Integrale über t und t' eine Simpsonintegration mit adaptiver Genauigkeit verwendet.

[5] siehe [6]

3.5.2 Behandlung der T-Matrix-Integrale

Anders als die S-Matrix-Integrale können die T-Matrix-Integrale nicht direkt programmiert werden. Die Integration über t' und gegebenenfalls auch die über α muß abschnittsweise analytisch durchgeführt werden. Für die Integration über t muß die Rechteckregel verwendet werden, wie noch zu sehen sein wird. Die abschnittsweise analytische Integration über t' kann nur unter einer vereinfachenden Annahme durchgeführt werden:

Jedes der Segmente wird in eine Anzahl von Teilsegmenten eingeteilt. Es wird nun angenommen, daß die Funktionen D_n, $D_{n'}$, ϱ und γ auf jedem dieser Teilsegmente konstant sind bezüglich t'. Diese Forderung wird vom t-abhängigen D_n automatisch erfüllt. Der Hornstrahler wird ferner derart durch einen Polygonzug segmentiert, daß γ auf jedem Segment und damit auch auf jedem Teilsegment konstant ist. Die Funktion $D_{n'}$ wird durch Rechtecke approximiert, so daß sie innerhalb eines Teilsegmentes ebenfalls konstant bezüglich t' ist. Nun lassen sich die obigen Gleichungen zur Berechnung der T-Matrixelemente umformen, indem man das innere Integral über t' auf jeweils möglichst kleine Terme zusammenzieht. Hierbei sind die vereinfachend als konstant bezüglich t' angesehenen Ausdrücke aus den inneren Integralen herauszuziehen, so daß sich einfachere Restintegrale GP ergeben. Das innere Integral ergibt sich dann als Summe über die Integrale der Teilsegmente, die mit den als abschnittsweise konstant angesehenen Funktionen verknüpft sind. Das äußere Integral über t wird dann entsprechend als Summe über den Summenausdruck des inneren Integrals approximiert. Damit werden die Funktionen bei der Integration über t an den Stellen t_p und bei der Integration über t' an den Stellen t_q jeweils in der Mitte eines Teilsegmentes abgetastet. Insgesamt soll es dabei $P = Q$ Teilsegmente geben. Die Matrixelemente berechnen sich dann aus:

$$
\begin{aligned}
{}^{tt}_{m}T^{C}_{nn'} &= \frac{1}{jk}\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{Q}\Big[k^2 D_{np}D_{n'q}(\sin\gamma_p\sin\gamma_q GP_{2,m}+\cos\gamma_p\cos\gamma_q GP_{1,m})\\
&\quad -\frac{\partial}{\partial t}D_{np}\frac{\partial}{\partial t'}D_{n'q}GP_{1,m}\Big]\Delta t_p,\\
{}^{t\varphi}_{m}T^{C}_{nn'} &= \frac{1}{jk}\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{Q}\left(k^2 D_{np}D_{n'q}\sin\gamma_p GP_{3,m}+\frac{\partial}{\partial t}D_{np}\frac{m}{\varrho_q}D_{n'q}GP_{1,m}\right)\Delta t_p,\\
{}^{\varphi t}_{m}T^{C}_{nn'} &= \frac{1}{jk}\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{Q}\left(k^2 D_{np}D_{n'q}\sin\gamma_q GP_{3,m}+\frac{m}{\varrho_p}D_{np}\frac{\partial}{\partial t'}D_{n'q}GP_{1,m}\right)\Delta t_p,\\
{}^{\varphi\varphi}_{m}T^{C}_{nn'} &= \frac{1}{jk}\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{Q}\left(k^2 D_{np}D_{n'q}GP_{2,m}-\frac{m^2}{\varrho_p\varrho_q}D_{np}D_{n'q}GP_{1,m}\right)\Delta t_p,\\
GP_{1,m} &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(m\alpha)\int_{\Delta t_q}\frac{\mathrm{e}^{-jkR_p}}{R_p}\mathrm{d}t'\mathrm{d}\alpha,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
GP_{2,m} &= \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \cos(m\alpha)\cos\alpha \int\limits_{\Delta t_q} \frac{\mathrm{e}^{-jkR_p}}{R_p}\mathrm{d}t'\mathrm{d}\alpha, \\
GP_{3,m} &= \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \sin(m\alpha)\sin\alpha \int\limits_{\Delta t_q} \frac{\mathrm{e}^{-jkR_p}}{R_p}\mathrm{d}t'\mathrm{d}\alpha
\end{aligned}
$$

mit

$$R_p = \sqrt{\varrho_p^2 + \varrho'^2 - 2\varrho_p\varrho'\cos\alpha + (z_p - z')^2}.$$

In diesen Gleichungen ist nun nicht mehr berücksichtigt, daß die Dreiecksfunktion auf nur jeweils zwei Segmenten ungleich Null ist. Bei der Programmierung wurde dieser Umstand natürlich berücksichtigt. Nachfolgend soll nun das Integral

$$\int\limits_{\Delta t_q} \frac{\mathrm{e}^{-jkR_p}}{R_p}\mathrm{d}t'$$

berechnet werden [1]. Um die Exponentialfunktion in eine Reihe zu entwickeln, muß das Argument der Exponentialfunktion sehr klein sein. Man definiert

$$R_{pq} = \sqrt{\varrho_p^2 + \varrho_q^2 - 2\varrho_p\varrho_q\cos\alpha + (z_p - z_q)^2}$$

und schreibt

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Delta t_q} \frac{\mathrm{e}^{-jkR_p}}{R_p}\mathrm{d}t' &\approx \mathrm{e}^{-jkR_{pq}} \int\limits_{\Delta t_q} \frac{\mathrm{e}^{-jk(R_p - R_{pq})}}{R_p}\mathrm{d}t' \\
&\approx \mathrm{e}^{-jkR_{pq}} \int\limits_{\Delta t_q} \frac{1 - jk(R_p - R_{pq})}{R_p}\mathrm{d}t'.
\end{aligned}
$$

Wegen der komplizierten Struktur des Integranden ist eine analytische Integration noch nicht möglich. Deshalb versucht man R_{pq} in der Form

$$R_{pq}^2 = t_0^2 + d^2$$

darzustellen. t_0 ist dabei der Beitrag in t-Richtung, d derjenige senkrecht zur t-Richtung. So berechnet sich t_0 aus

$$t_0 = |\vec{u}_{t_q} \cdot \vec{R}_{pq}|$$

mit

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_{t_q} &= \vec{u}_{\varrho_p}\sin\gamma_q\cos\alpha + \vec{u}_{\varphi_p}\sin\gamma_q\sin\alpha + \vec{u}_z\cos\gamma_q, \\
\vec{R}_{pq} &= \vec{u}_{\varrho_p}(\varrho_p - \varrho_q\cos\alpha) - \vec{u}_{\varphi_p}\varrho_q\sin\alpha + \vec{u}_z(z_p - z_q).
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
t_0 &= |(\varrho_p - \varrho_q\cos\alpha)\sin\gamma_q\cos\alpha - \varrho_q\sin^2\alpha\sin\gamma_q + (z_p - z_q)\cos\gamma_q| \\
&= |-\varrho_q\sin\gamma_q + \varrho_p\sin\gamma_q\cos\alpha + (z_p - z_q)\cos\gamma_q| \\
&= |(\varrho_q - \varrho_p\cos\alpha)\sin\gamma_q + (z_q - z_p)\cos\gamma_q|.
\end{aligned}
$$

Hiermit kann nun das Integral berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Delta t_q} \frac{\mathrm{e}^{-jkR_p}}{R_p}\mathrm{d}t' &\approx \mathrm{e}^{-jkR_{pq}} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1 - jk(\sqrt{t'^2+d^2} - R_{pq})}{\sqrt{t'^2+d^2}}\mathrm{d}t' \\
&\approx \mathrm{e}^{-jkR_{pq}} \left[\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1+jkR_{pq}}{\sqrt{t'^2+d^2}}\mathrm{d}t' - jk \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t' \right] \\
&\approx \mathrm{e}^{-jkR_{pq}} \left[(1+jkR_{pq}) \ln \frac{t_2 + \sqrt{t_2^2+d^2}}{t_1 + \sqrt{t_1^2+d^2}} - jk\Delta t_q \right] = f(\alpha)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
t_1 &= t_0 - \frac{\Delta t_q}{2}, \\
t_2 &= t_0 + \frac{\Delta t_q}{2},
\end{aligned}
$$

wobei die Stammfunktion des ersten Integrals [4] entnommen wurde. Der soeben hergeleitete Ausdruck für das Integral über die Greensche Funktion kann nicht für den Fall $(p = q) \wedge (\alpha \approx 0)$ verwendet werden, da in diesem Falle $t_0 = R_{pq} = 0$ ist, so daß t_1 negativ und der Nenner des Argumentes der ln-Funktion Null wird. Anschaulich ausgedrückt: Wenn man sich das bezüglich φ halbierte Teilsegment in M Teilbereiche unterteilt denkt, kann die Integralformel in diesem Fall auf dem ersten Teilbereich nicht verwendet werden, denn hier fallen Auf- und Quellpunkt zusammen.

Fall $p \neq q$:

$$
\begin{aligned}
GP_{1,m} &\approx \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \cos(m\alpha) f(\alpha)\mathrm{d}\alpha, \\
GP_{2,m} &\approx \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \cos(m\alpha)\cos\alpha f(\alpha)\mathrm{d}\alpha, \\
GP_{3,m} &\approx \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin(m\alpha)\sin\alpha f(\alpha)\mathrm{d}\alpha.
\end{aligned}
$$

Fall $p = q$:

$$
\begin{aligned}
GP_{1,m} &\approx \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{M}} \int\limits_{\Delta t_q} \frac{\mathrm{e}^{-jkR_p}}{R_p}\mathrm{d}t'\mathrm{d}\alpha + \int\limits_{\frac{\pi}{M}}^{\pi} \cos(m\alpha) f(\alpha)\mathrm{d}\alpha \right], \\
GP_{2,m} &\approx \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{M}} \int\limits_{\Delta t_q} \frac{\mathrm{e}^{-jkR_p}}{R_p}\mathrm{d}t'\mathrm{d}\alpha + \int\limits_{\frac{\pi}{M}}^{\pi} \cos(m\alpha)\cos\alpha f(\alpha)\mathrm{d}\alpha \right],
\end{aligned}
$$

$$GP_{3,m} \approx \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(m\alpha)\sin\alpha f(\alpha)\mathrm{d}\alpha.$$

Nun ist das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{M}}\int_{\Delta t_q} \frac{\mathrm{e}^{-jkR_p}}{R_p}\mathrm{d}t'\mathrm{d}\alpha$$

näherungsweise zu integrieren. Auf die Kosinusfunktionen konnte wegen $\alpha \approx 0$ verzichtet werden, um analytisch integrieren zu können. Die Teilbereichsfläche, auf der das Flächenintegral berechnet werden soll, habe die Kantenlängen Δt_q und $\varrho_q\frac{\pi}{M}$. Zur Umwandlung des Integrals in ein ebenes Flächenintegral muß die Integrationsvariable α substituiert werden:

$$\begin{aligned} x &= \varrho_q\alpha, \\ \mathrm{d}\alpha &= \frac{\mathrm{d}x}{\varrho_q}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{M}}\mathrm{d}\alpha &= \frac{1}{\varrho_q}\int_0^{\varrho_q\frac{\pi}{M}}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Man nimmt nun an, daß sich der Aufpunkt in t-Richtung genau in der Mitte des Teilsegmentes befindet. Dieses wird durch die Anwendung der Rechteckregel bei der Integration über t gewährleistet, die den Integranden jeweils nur in der Mitte des Intervalls Δt_p abtastet. Die Exponentialfunktion wird im folgenden wieder durch eine abgebrochene Reihe dargestellt. Weil der Integrand aufgrund der Lage des Aufpunktes eine gerade Funktion von t' ist, gilt mit $t' = y$:

$$\int_{\Delta t_q}\int_0^{\frac{\pi}{M}} \frac{\mathrm{e}^{-jkR_p}}{R_p}\mathrm{d}t'\mathrm{d}\alpha = \frac{2}{\varrho_q}\int_0^{\frac{\Delta t_q}{2}}\int_0^{\varrho_q\frac{\pi}{M}} \frac{1-jk\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Mit

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[x\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)+y\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial y}\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}y\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}-x\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}-y\frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

kann für das Flächenintegral eine Stammfunktion angegeben werden:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{\varrho_q}\int_0^{\frac{\Delta t_q}{2}}\int_0^{\varrho_q\frac{\pi}{M}}\frac{1-jk\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\varrho_q}\int_0^{y_0}\int_0^{x_0}\frac{1-jk\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\varrho_q}\left[\left[x\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)+y\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]_0^{x_0}\right]_0^{y_0}+\frac{2}{\varrho_q}[-jkx_0y_0] \\
&= \frac{2}{\varrho_q}\left[x_0\ln\left(y+\sqrt{x_0^2+y^2}\right)+y\ln\left(x_0+\sqrt{x_0^2+y^2}\right)-y\ln y\right]_0^{y_0}-jk\frac{\pi}{M}\Delta t_q \\
&= \frac{2}{\varrho_q}\left[x_0\ln\left(y+\sqrt{x_0^2+y^2}\right)+y\ln\frac{x_0+\sqrt{x_0^2+y^2}}{y}\right]_0^{y_0}-jk\frac{\pi}{M}\Delta t_q \\
&= \frac{2}{\varrho_q}\left[x_0\ln\left(y_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)+y_0\ln\frac{x_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{y_0}-x_0\ln x_0\right]-jk\frac{\pi}{M}\Delta t_q \\
&= \frac{2}{\varrho_q}\left(x_0\ln\frac{y_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{x_0}+y_0\ln\frac{x_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{y_0}\right)-jk\frac{\pi}{M}\Delta t_q
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \varrho_q\frac{\pi}{M}, \\
y_0 &= \frac{\Delta t_q}{2}
\end{aligned}
$$

und

$$
\lim_{y\to 0} y\ln y = \lim_{y\to 0}\frac{\ln y}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0}(-y) = 0
$$

nach der Regel von de l' Hospital. Für die numerische Integration über α wurde eine Gauß-quadratur der Ordnung 20 verwendet. Als Anzahl der Unterteilungen M in φ-Richtung eignet sich $M = 20$.

4 Analyse eines Rundhornstrahlers

Mittels der in den vorherigen Abschnitten dargestellten Matrizengleichungen und den Ausdrücken für die Matrixelemente, kann man nun die magnetische Oberflächenstromdichte M berechnen. Aus dieser kann nun der Aperturreflexionsfaktor und das elektromagnetische Fernfeld des Hornstrahlers berechnet werden.

4.1 Ermittlung des Aperturreflexionsfaktors

An der Apertur wird die eingespeiste Welle mit dem Modus $i = s$ teilweise reflektiert. Bei einem guten Hornstrahler sollte der daraus resultierende Aperturreflexionsfaktor möglichst gering sein, um eine gute Leistungsabstrahlung in den Freiraum zu erhalten. Für die magnetische Oberflächenstromdichte auf der Fläche F_A galt

$$\mathsf{M}(\vec{r}') = -\vec{n}' \times \mathsf{E}(\vec{r}')$$

und für die elektrische Tangentialfeldstärke auf der Apertur

$$\mathsf{E}_t(x,y) = \vec{e}_s(x,y) + \sum_i V_i^- \vec{e}_i(x,y),$$

wobei auch hier berücksichtigt wurde, daß mit der Amplitude 1 gespeist wird. Man erhält damit für die magnetische Oberflächenstromdichte

$$\mathsf{M} = -\vec{n}' \times \vec{e}_s - \sum_i V_i^- (\vec{n}' \times \vec{e}_i).$$

Wie schon bei der Berechnung der Entwicklungskoeffizienten, nutzt man auch hier die Orthonormalität der Modusvektoren aus:

$$\begin{aligned}
\int_{F_A} \mathsf{M} \cdot (\vec{n}' \times \vec{e}_j) \mathrm{d}f' &= -\int_{F_A} (\vec{n}' \times \vec{e}_s) \cdot (\vec{n}' \times \vec{e}_j) \mathrm{d}f' \\
&\quad - \sum_i V_i^- \int_{F_A} (\vec{n}' \times \vec{e}_i) \cdot (\vec{n}' \times \vec{e}_j) \mathrm{d}f' \\
&= -\left\{ \begin{array}{ll} 1 + V_s^- & \text{für} \quad j = s \\ V_j^- & \text{für} \quad j \neq s \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Ersetzt man M jetzt durch die entsprechende Reihenentwicklung, so ist zu schreiben:

$$Z \sum_{q=1}^{Q} V_q \int_{F_A} \mathsf{M}_q \cdot (\vec{n}' \times \vec{e}_s) \mathrm{d}f' = Z \sum_{q=1}^{Q} V_q A_{qs} = -1 - V_s^-,$$

d.h.

$$V_s^- = -Z \sum_{q=1}^{Q} V_q A_{qs} - 1.$$

Da mit der Amplitude 1 gespeist wird, stellt V_s^- schon den Aperturreflexionsfaktor bezüglich des Speisemodus dar.

4.2 Ermittlung des Fernfeldes

Das elektromagnetische Fernfeld läßt sich jetzt mit Hilfe des Kirchhoff-Huygensschen Prinzips ermitteln. Dabei geht man jedoch nicht von den Flächenstromdichten M und J aus, denn J müßte zuvor noch berechnet werden, sondern man ermittelt das elektrische Feld aus den kombinierten Oberflächenstromdichten. Diese kann man, wie bereits gezeigt, aus einer Oberflächenstromdichte C berechnen. Der Momentenvektor $\underline{C}$ dieser Oberflächenstromdichte ergibt sich aus

$$\underline{C} = \left(\underline{S}^X + \underline{T}^C\right)^{-1} \underline{D}^M \underline{V},$$

wobei die Matrix

$$\left(\underline{S}^X + \underline{T}^C\right)^{-1} \underline{D}^M$$

erfreulicherweise schon bekannt ist, da sie zur Berechnung der Admittanzmatrix des beliebig begrenzten Raumes gebraucht wurde. Zur Berechnung der kombinierten Oberflächenstromdichte C ist also nur eine Matrizenmultiplikation des Momentenvektors der magnetischen Oberflächenstromdichte M mit einer bereits ermittelten Matrix notwendig. Zusammen mit

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_{cm} &= \oint\limits_{F_A+F_B} \mathsf{M}_c G_0 \mathrm{d}f', \\ \vec{\Pi}_{ce} &= \oint\limits_{F_A+F_B} \mathsf{J}_c G_0 \mathrm{d}f' \end{aligned}$$

ergibt sich das elektrische Feld zu:

$$\mathsf{E} = -\mathrm{rot}\vec{\Pi}_{cm} + \frac{1}{j\omega\varepsilon}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{\Pi}_{ce}.$$

Zunächst soll ein einfacher Ausdruck zur Berechnung des Abstandes R aufgestellt werden. Die Lage des Aufpunktes wird dabei in Kugelkoordinaten beschieben. Der Nullpunkt des Kugelkoordinatensystems fällt dabei mit dem Nullpunkt des Zylinderkoordinatensystems zusammen. Als Näherung für den Abstand R zwischen Auf- und Quellpunkt verwendet man den Kugelradius r, vermindert um die senkrechte Projektion des Vektors $\vec{r}'$ auf den Vektor $\vec{r}$:

$$R \approx r - \vec{u}_r \cdot \vec{r}'$$

mit

$$\vec{u}_r = \vec{u}_x \sin\vartheta\cos\varphi + \vec{u}_y \sin\vartheta\sin\varphi + \vec{u}_z\cos\vartheta,$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_r \cdot \vec{r}' &= x'\sin\vartheta\cos\varphi + y'\sin\vartheta\sin\varphi + z'\cos\vartheta \\ &= \varrho'\cos\varphi'\sin\vartheta\cos\varphi + \varrho'\sin\varphi'\sin\vartheta\sin\varphi + z'\cos\vartheta \\ &= \varrho'\sin\vartheta\cos(\varphi' - \varphi) + z'\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Mit

$$\mathrm{rot}(\psi\vec{v}) = \psi\mathrm{rot}\vec{v} + (\mathrm{grad}\psi) \times \vec{v}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{\Pi}_{cm} &= \oint\limits_{F_A+F_B} \mathrm{rot}(\mathsf{M}_c G_0)\mathrm{d}f' \\
&\approx \oint\limits_{F_A+F_B} (0 + (\mathrm{grad}G_0) \times \mathsf{M}_c)\,\mathrm{d}f' \\
&= \oint\limits_{F_A+F_B} \left(-\frac{1+jkR}{R}G_0\vec{u}_R\right) \times \mathsf{M}_c\mathrm{d}f' \\
&= \oint\limits_{F_A+F_B} (-\frac{1}{R} - jk)\vec{u}_R \times G_0\mathsf{M}_c\mathrm{d}f' \\
&\approx -jk\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{cm},
\end{aligned}$$

sofern $R \to \infty$, was beim Fernfeld automatisch erfüllt ist. Entsprechend ergibt sich:

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{\Pi}_{ce} \approx -k^2\vec{u}_r \times (\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{ce}).$$

Unter Verwendung der sogenannten Fernfeldvektorpotentiale

$$\begin{aligned}
\vec{\Pi}_{cmo} &= \oint\limits_{F_A+F_B} \mathsf{M}_c \mathrm{e}^{jk\vec{u}_r\cdot\vec{r}'}\mathrm{d}f', \\
\vec{\Pi}_{ceo} &= \oint\limits_{F_A+F_B} \mathsf{J}_c \mathrm{e}^{jk\vec{u}_r\cdot\vec{r}'}\mathrm{d}f'
\end{aligned}$$

und

$$-\frac{k^2}{j\omega\varepsilon} = -\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{j\omega\varepsilon} = j\omega\mu = jkZ$$

schreibt man für die elektrische Feldstärke im Fernfeld

$$\begin{aligned}
\mathsf{E} &= jk\frac{\mathrm{e}^{-jkr}}{4\pi r}[\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{cmo} + Z\vec{u}_r \times (\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{ceo})] \\
&= jk\frac{\mathrm{e}^{-jkr}}{4\pi r}\{\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{cmo} + Z[\vec{u}_r(\vec{u}_r \cdot \vec{\Pi}_{ceo}) - \vec{\Pi}_{ceo}]\}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Da die Oberflächenstromdichten entsprechend der Momentenmethode als Reihe darstellbar sind, lassen sich auch die Fernfeldvektorpotentiale als Reihe darstellen, d.h.

$$\vec{\Pi}_{co} = \sum_{q=1}^{\bar{Q}} {}_q\vec{\Pi}_{co}.$$

Jedes Teilvektorpotential stellt einen Vektor dar, der entweder in die t- oder φ-Richtung zeigt. Für diese Teilvektorpotentiale gilt nun:

$$\begin{aligned}
{}_{m'n'}\vec{\Pi}^{t}_{cmo} &= +ZX^{t}_{m'n'} \int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_{n'} \int\limits_{0}^{2\pi} \vec{u}'_{\varphi} \sin(m'\varphi') \mathrm{e}^{jk\vec{u}_r \cdot \vec{r}'} \mathrm{d}\varphi' \mathrm{d}t', \\
{}_{m'n'}\vec{\Pi}^{\varphi}_{cmo} &= -ZX^{\varphi}_{m'n'} \int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_{n'} \int\limits_{0}^{2\pi} \vec{u}'_{t} \cos(m'\varphi') \mathrm{e}^{jk\vec{u}_r \cdot \vec{r}'} \mathrm{d}\varphi' \mathrm{d}t', \\
{}_{m'n'}\vec{\Pi}^{t}_{ceo} &= +ZX^{t}_{m'n'} \int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_{n'} \int\limits_{0}^{2\pi} \vec{u}'_{t} \sin(m'\varphi') \mathrm{e}^{jk\vec{u}_r \cdot \vec{r}'} \mathrm{d}\varphi' \mathrm{d}t', \\
{}_{m'n'}\vec{\Pi}^{\varphi}_{ceo} &= +ZX^{\varphi}_{m'n'} \int\limits_{t_{n'-1}}^{t_{n'+1}} D_{n'} \int\limits_{0}^{2\pi} \vec{u}'_{\varphi} \cos(m'\varphi') \mathrm{e}^{jk\vec{u}_r \cdot \vec{r}'} \mathrm{d}\varphi' \mathrm{d}t'.
\end{aligned}$$

Der obere Index t oder φ deutet dabei die jeweils zugrunde liegende Komponente der kombinierten Oberflächenstromdichte C an. Somit zeigt ${}_{m'n'}\vec{\Pi}^{t}_{cmo}$ zum Beispiel in φ-Richtung, da dieses durch ein vektorielles Produkt mit dem Normalenvektor entstanden ist entsprechend früherer Definitionen.

Die notwendigen Vektoroperationen werden im kartesischen Koordinatensystem ausgeführt. Für die notwendige Transformation ins kartesische Koordinatensystem verwendet man

$$\begin{aligned}
\vec{u}'_t &= \vec{u}_x \cos\varphi' \sin\gamma' + \vec{u}_y \sin\varphi' \sin\gamma' + \vec{u}_z \cos\gamma', \\
\vec{u}'_{\varphi} &= -\vec{u}_x \sin\varphi' + \vec{u}_y \cos\varphi'.
\end{aligned}$$

Die inneren Integrale sollen nun zur Rechenzeitoptimierung des Programmes analytisch berechnet werden. Hierzu geht man von einer Speisung mit einer H_{11}-Welle aus, so daß $m' = 1$ ist. Durch Einsetzen der Ausdrücke für $\vec{u}'_{\varphi}$ beziehungsweise $\vec{u}'_t$ und $\vec{u}_r \cdot \vec{r}'$ lassen sich die Integrale in ihre Vektorkomponenten aufspalten. Für das innere Integral von ${}_{m'n'}\vec{\Pi}^{t}_{cmo}$ ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{0}^{2\pi} \vec{u}'_{\varphi} \sin(m'\varphi') \mathrm{e}^{jk\vec{u}_r \cdot \vec{r}'} \mathrm{d}\varphi' &= -\vec{u}_x \mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta} \int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2\varphi' \cdot \mathrm{e}^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)} \mathrm{d}\varphi' \\
&\quad +\vec{u}_y \mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta} \int\limits_{0}^{2\pi} \sin\varphi' \cos\varphi' \cdot \mathrm{e}^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)} \mathrm{d}\varphi',
\end{aligned}$$

wobei

$$a' = k\varrho' \sin\vartheta$$

ist. Im folgenden sind nun die beiden Teilintegrale zu untersuchen. Hierfür wird die folgende Integralformel nach Poisson benötigt [5]:

$$J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \cdot \int_0^\pi e^{jx\cos\varphi}\sin^{2\nu}\varphi \mathrm{d}\varphi, \tag{9}$$

was für alle ν mit $\mathrm{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}$ gilt. Betrachten wir nun das Teilintegral der $\vec{u}_x$-Komponente:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi' \cdot e^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi' &= \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \sin^2(\alpha+\varphi) e^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha \\
&= (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \sin^2\alpha \cdot e^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha \\
&\quad + \sin^2\varphi \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} e^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha \\
&\quad + 2\sin\varphi\cos\varphi \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \sin\alpha\cos\alpha \cdot e^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha.
\end{aligned}$$

Da das Integral einer ungeraden Funktion über eine Periodenlänge gleich Null ist, fällt der letzte Term der letzten Gleichung weg. Da die Integranden 2π-periodisch sind, können die Integrationsintervalle der Länge 2π beliebig verschoben werden. Mit Hilfe von Gleichung (9) ergibt sich dann:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi' \cdot e^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi' = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \int_0^{2\pi} \sin^2\alpha \cdot e^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha + \sin^2\varphi \int_0^{2\pi} e^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

$$\begin{aligned}
&= 2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \int_0^{\pi} \sin^2\alpha \cdot e^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha + 2\sin^2\varphi \int_0^{\pi} e^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha \\
&= 2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) J_1(a')}{\frac{a'}{2}} + 2\sin^2\varphi\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) J_0(a').
\end{aligned}$$

Nun ist der spezielle Funktionswert der Gammafunktion zu beachten:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Aus

$$\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$$

folgt ferner

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Beachtet man ferner noch die allgemeine Beziehung

$$\frac{2n}{x}J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)$$

so ergibt sich schließlich:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi' \cdot \mathrm{e}^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi' = 2\pi\left[\frac{J_0(a')}{2} + \left(\frac{1}{2} - \sin^2\varphi\right)J_2(a')\right]. \tag{10}$$

Nun wird das Teilintegral der $\vec{u}_y$-Komponente betrachtet. Der folgende Rechenweg ist dabei analog zur Vorgehensweise im vorherigen Fall:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin\varphi'\cos\varphi' \cdot \mathrm{e}^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi' &= \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \sin(\alpha+\varphi)\cos(\alpha+\varphi)\mathrm{e}^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha \\
&= \sin\varphi\cos\varphi \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \mathrm{e}^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha \\
&\quad -2\sin\varphi\cos\varphi \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \sin^2\alpha \cdot \mathrm{e}^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha \\
&\quad +(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \underbrace{\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \sin\alpha\cos\alpha \cdot \mathrm{e}^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha}_{=0} \\
&= \sin\varphi\cos\varphi \cdot 2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)J_0(a') \\
&\quad -2\sin\varphi\cos\varphi \cdot 2\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)J_1(a')}{\frac{a'}{2}} \\
&= 2\pi\sin\varphi\cos\varphi\left(J_0(a') - 2\frac{J_1(a')}{a'}\right) \\
&= -2\pi\sin\varphi\cos\varphi \cdot J_2(a').
\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich nun endgültig für das innere Integral von ${}_{m'n'}\vec{\Pi}^t_{cmo}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \vec{u}'_\varphi \sin(m'\varphi')\mathrm{e}^{jk\vec{u}_r\cdot\vec{r}'}\mathrm{d}\varphi' &= -\vec{u}_x\mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta} \cdot 2\pi\left[\frac{J_0(a')}{2} + \left(\frac{1}{2} - \sin^2\varphi\right)J_2(a')\right] \\
&\quad -\vec{u}_y\mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta} \cdot 2\pi\sin\varphi\cos\varphi \cdot J_2(a').
\end{aligned}$$

Für das innere Integral von ${}_{m'n'}\vec{\Pi}^{\varphi}_{ceo}$ ergibt sich:

$$\int_0^{2\pi} \vec{u}'_{\varphi}\cos(m'\varphi')\mathrm{e}^{jk\vec{u}_r\cdot\vec{r}'}\mathrm{d}\varphi' = -\vec{u}_x\mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta}\int_0^{2\pi}\sin\varphi'\cos\varphi'\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi'$$
$$+\vec{u}_y\mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi' - \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi'\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi'\right).$$

Unter Nutzung der bereits hergeleiteten Beziehungen, ergibt sich schließlich für das innere Integral von ${}_{m'n'}\vec{\Pi}^{\varphi}_{ceo}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \vec{u}'_{\varphi}\cos(m'\varphi')\mathrm{e}^{jk\vec{u}_r\cdot\vec{r}'}\mathrm{d}\varphi' &= \vec{u}_x\mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta}\cdot 2\pi\sin\varphi\cos\varphi\cdot J_2(a')\\ &\quad+\vec{u}_y\mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta}\cdot 2\pi\left[\frac{J_0(a')}{2}+\left(\frac{1}{2}-\cos^2\varphi\right)J_2(a')\right].\end{aligned}$$

Nun wird das innere Integral von ${}_{m'n'}\vec{\Pi}^{\varphi}_{cmo}$ betrachtet. Durch die entsprechende Komponentenzerlegung ergibt sich für dieses:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \vec{u}'_t\cos(m'\varphi')\mathrm{e}^{jk\vec{u}_r\cdot\vec{r}'}\mathrm{d}\varphi' &= \vec{u}_x\sin\gamma'\cdot\mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi'\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi'\\ &\quad+\vec{u}_y\sin\gamma'\cdot\mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta}\int_0^{2\pi}\sin\varphi'\cos\varphi'\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi'\\ &\quad+\vec{u}_z\cos\gamma'\cdot\mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta}\int_0^{2\pi}\cos\varphi'\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi'.\end{aligned}$$

Das einzige noch unbekannte Integral ist das der $\vec{u}_z$-Komponente, wenn man beachtet, daß

$$\sin^2\varphi' + \cos^2\varphi' = 1$$

ist. Für das noch unbekannte Integral ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos\varphi'\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi' &= \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}\cos(\alpha+\varphi)\mathrm{e}^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha\\ &= \cos\varphi\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}\cos\alpha\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha - \sin\varphi\underbrace{\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}\sin\alpha\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha}_{=0}\\ &= \cos\varphi\left[\sin\alpha\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos\alpha}\right]_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\cos\varphi \int\limits_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \sin\alpha \cdot (-ja'\sin\alpha) \cdot \mathrm{e}^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha \\
= \;& ja'\cos\varphi \int\limits_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \sin^2\alpha \cdot \mathrm{e}^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha \\
= \;& \pi ja'\cos\varphi\left(J_0(a') + J_2(a')\right),
\end{aligned}
$$

wobei sich der letzte Schritt direkt aus Gleichung (10) ergibt. Insgesamt ergibt sich das innere Integral von ${}_{m'n'}\vec{\Pi}^{\varphi}_{cmo}$ damit zu:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^{2\pi} \vec{u}_t'\cos(m'\varphi')\mathrm{e}^{jk\vec{u}_r\cdot\vec{r}''}\mathrm{d}\varphi' \;=\;& \vec{u}_x\sin\gamma'\cdot\mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta}\cdot 2\pi\left[\frac{J_0(a')}{2} + \left(\frac{1}{2} - \cos^2\varphi\right)J_2(a')\right] \\
& -\vec{u}_y\sin\gamma'\cdot\mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta}\cdot 2\pi\sin\varphi\cos\varphi\cdot J_2(a') \\
& +\vec{u}_z\cos\gamma'\cdot\mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta}\cdot \pi ja'\cos\varphi\left(J_0(a') + J_2(a')\right).
\end{aligned}
$$

Das innere Integral von ${}_{m'n'}\vec{\Pi}^{t}_{ceo}$ ergibt sich schließlich zu:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^{2\pi} \vec{u}_t'\sin(m'\varphi')\mathrm{e}^{jk\vec{u}_r\cdot\vec{r}''}\mathrm{d}\varphi' \;=\;& \vec{u}_x\sin\gamma'\cdot\mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta}\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi'\cos\varphi'\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi' \\
& +\vec{u}_y\sin\gamma'\cdot\mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi'\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi' \\
& +\vec{u}_z\cos\gamma'\cdot\mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta}\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi'\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi'.
\end{aligned}
$$

Das einzige noch unbekannte Integral ist das der $\vec{u}_z$-Komponente. Für dieses ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi'\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos(\varphi'-\varphi)}\mathrm{d}\varphi' \;=\;& \int\limits_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}\sin(\alpha+\varphi)\mathrm{e}^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha \\
=\;& \sin\varphi\int\limits_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}\cos\alpha\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha + \underbrace{\cos\varphi\int\limits_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}\sin\alpha\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha}_{=0} \\
=\;& \sin\varphi\left[\sin\alpha\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos\alpha}\right]_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \\
& -\sin\varphi\int\limits_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}\sin\alpha\cdot(-ja'\sin\alpha)\cdot\mathrm{e}^{ja'\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= ja' \sin\varphi \int\limits_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \sin^2\alpha \cdot \mathrm{e}^{ja'\cos\alpha} \mathrm{d}\alpha \\
&= \pi j a' \sin\varphi \left(J_0(a') + J_2(a')\right),
\end{aligned}
$$

wobei sich der letzte Schritt wieder aus der Gleichung (10) ergibt. Insgesamt ergibt sich das innere Integral von ${}_{m'n'}\vec{\Pi}^{t}_{ceo}$ damit zu:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{0}^{2\pi} \vec{u}_t' \cos(m'\varphi') \mathrm{e}^{jk\vec{u}_r\cdot\vec{r}'} \mathrm{d}\varphi' = &-\vec{u}_x \sin\gamma' \cdot \mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta} \cdot 2\pi \sin\varphi\cos\varphi \cdot J_2(a') \\
&+\vec{u}_y \sin\gamma' \cdot \mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta} \cdot 2\pi \left[\frac{J_0(a')}{2} + \left(\frac{1}{2} - \sin^2\varphi\right) J_2(a')\right] \\
&+\vec{u}_z \cos\gamma' \cdot \mathrm{e}^{jkz'\cos\vartheta} \cdot \pi j a' \sin\varphi \left(J_0(a') + J_2(a')\right).
\end{aligned}
$$

Nachdem nun die Fernfeldvektorpotentiale bekannt sind, finden Transformationen ins Kugelkoordinatensystem und ins Ludwig-3-System, welches zur Berechnung der Kreuzpolarisation gebraucht wird, statt. Hierfür müssen die vektoriellen und skalaren Produkte in Gleichung (8) in das jeweilige System transformiert werden.

Zunächst sei das vektorielle Produkt betrachtet:

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{cmo} &= (\vec{u}_x \sin\vartheta\cos\varphi + \vec{u}_y \sin\vartheta\sin\varphi + \vec{u}_z\cos\vartheta) \\
&\quad \times (\vec{u}_x \Pi_{cmox} + \vec{u}_y \Pi_{cmoy} + \vec{u}_z \Pi_{cmoz}) \\
&= +\vec{u}_z \Pi_{cmoy} \sin\vartheta\cos\varphi - \vec{u}_y \Pi_{cmoz} \sin\vartheta\cos\varphi \\
&\quad -\vec{u}_z \Pi_{cmox} \sin\vartheta\sin\varphi + \vec{u}_x \Pi_{cmoz} \sin\vartheta\sin\varphi \\
&\quad +\vec{u}_y \Pi_{cmox} \cos\vartheta - \vec{u}_x \Pi_{cmoy} \cos\vartheta \\
&= +\vec{u}_x (\Pi_{cmoz} \sin\vartheta\sin\varphi - \Pi_{cmoy}\cos\vartheta) \\
&\quad +\vec{u}_y (\Pi_{cmox}\cos\vartheta - \Pi_{cmoz}\sin\vartheta\cos\varphi) \\
&\quad +\vec{u}_z (\Pi_{cmoy}\sin\vartheta\cos\varphi - \Pi_{cmox}\sin\vartheta\sin\varphi).
\end{aligned}
$$

Zur Transformation ins Kugelkoordinatensystem verwendet man

$$
\begin{aligned}
v_\vartheta &= v_x \cos\vartheta\cos\varphi + v_y\cos\vartheta\sin\varphi - v_z\sin\vartheta, \\
v_\varphi &= -v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_\vartheta \cdot (\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{cmo}) &= +(\Pi_{cmoz}\sin\vartheta\sin\varphi - \Pi_{cmoy}\cos\vartheta)\cos\vartheta\cos\varphi \\
&\quad +(\Pi_{cmox}\cos\vartheta - \Pi_{cmoz}\sin\vartheta\cos\varphi)\cos\vartheta\sin\varphi \\
&\quad -(\Pi_{cmoy}\sin\vartheta\cos\varphi - \Pi_{cmox}\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_\varphi \cdot (\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{cmo}) &= -(\Pi_{cmoz}\sin\vartheta\sin\varphi - \Pi_{cmoy}\cos\vartheta)\sin\varphi \\
&\quad +(\Pi_{cmox}\cos\vartheta - \Pi_{cmoz}\sin\vartheta\cos\varphi)\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Eine kleine Umformung erleichtert das Vereinfachen der Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\vec{u}_\vartheta \cdot (\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{cmo}) &= +(\cos^2\vartheta\sin\varphi + \sin^2\vartheta\sin\varphi)\Pi_{cmox}\\ &\quad +(-\cos^2\vartheta\cos\varphi - \sin^2\vartheta\cos\varphi)\Pi_{cmoy}\\ &\quad +(\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi - \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi)\Pi_{cmoz},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_\varphi \cdot (\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{cmo}) &= +(\cos\vartheta\cos\varphi)\Pi_{cmox}\\ &\quad +(\cos\vartheta\sin\varphi)\Pi_{cmoy}\\ &\quad +(-\sin\vartheta\sin^2\varphi - \sin\vartheta\cos^2\varphi)\Pi_{cmoz}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_\vartheta \cdot (\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{cmo}) &= \Pi_{cmox}\sin\varphi - \Pi_{cmoy}\cos\varphi,\\ \vec{u}_\varphi \cdot (\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{cmo}) &= \Pi_{cmox}\cos\vartheta\cos\varphi + \Pi_{cmoy}\cos\vartheta\sin\varphi - \Pi_{cmoz}\sin\vartheta.\end{aligned}$$

Die Transformation ins Ludwig-3-System basiert auf der Definition

$$\begin{aligned}\vec{u}_{p1} &= \vec{u}_\vartheta\sin\varphi + \vec{u}_\varphi\cos\varphi,\\ \vec{u}_{p2} &= \vec{u}_\vartheta\cos\varphi - \vec{u}_\varphi\sin\varphi.\end{aligned}$$

Der Vektor $\vec{u}_{p1}$ soll dabei die Referenzpolarisation und der Vektor $\vec{u}_{p2}$ die Kreuzpolarisation kennzeichnen. Die Definition lehnt sich an das Verfahren zur Messung von Fernfeldern an. Eine ausführliche Behandlung dieser Definition und der Kreuzpolarisation findet man in [2]. Zur Ausführung dieser Transformation sind nun wieder die einzelnen Terme der Gleichung (8) zu betrachten. Erneut wird zunächst das vektorielle Produkt betrachtet:

$$\begin{aligned}&\vec{u}_{p1} \cdot (\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{cmo})\\ &= \Pi_{cmox}\sin^2\varphi - \Pi_{cmoy}\sin\varphi\cos\varphi\\ &\quad +\Pi_{cmox}\cos\vartheta\cos^2\varphi + \Pi_{cmoy}\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi - \Pi_{cmoz}\sin\vartheta\cos\varphi\\ &= (\sin^2\varphi + \cos\vartheta\cos^2\varphi)\Pi_{cmox}\\ &\quad +(\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\Pi_{cmoy}\\ &\quad -\Pi_{cmoz}\sin\vartheta\cos\varphi\\ &= (1 - \cos^2\varphi + \cos\vartheta\cos^2\varphi)\Pi_{cmox}\\ &\quad -\Pi_{cmoy}(1 - \cos\vartheta)\sin\varphi\cos\varphi\\ &\quad -\Pi_{cmoz}\sin\vartheta\cos\varphi\\ &= [1 - (1 - \cos\vartheta)\cos^2\varphi]\Pi_{cmox}\\ &\quad -\Pi_{cmoy}(1 - \cos\vartheta)\sin\varphi\cos\varphi\\ &\quad -\Pi_{cmoz}\sin\vartheta\cos\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\vec{u}_{p2} \cdot (\vec{u}_r \times \vec{\Pi}_{cmo})\\ &= \Pi_{cmox}\sin\varphi\cos\varphi - \Pi_{cmoy}\cos^2\varphi\\ &\quad -\Pi_{cmox}\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi - \Pi_{cmoy}\cos\vartheta\sin^2\varphi + \Pi_{cmoz}\sin\vartheta\sin\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\sin\varphi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi)\Pi_{cmox} \\
&\quad +(-\cos^2\varphi - \cos\vartheta\sin^2\varphi)\Pi_{cmoy} \\
&\quad +\Pi_{cmoz}\sin\vartheta\sin\varphi \\
&= \Pi_{cmox}(1-\cos\vartheta)\sin\varphi\cos\varphi \\
&\quad +[(1-\cos\vartheta)\sin^2\varphi - 1]\Pi_{cmoy} \\
&\quad +\Pi_{cmoz}\sin\vartheta\sin\varphi.
\end{aligned}$$

Nun werden die restlichen Terme betrachtet. $\vec{\Pi}_{ceo}$ ergibt sich in Kugelkoordinaten zu:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_\vartheta \cdot \vec{\Pi}_{ceo} &= \Pi_{ceox}\cos\vartheta\cos\varphi + \Pi_{ceoy}\cos\vartheta\sin\varphi - \Pi_{ceoz}\sin\vartheta, \\
\vec{u}_\varphi \cdot \vec{\Pi}_{ceo} &= -\Pi_{ceox}\sin\varphi + \Pi_{ceoy}\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Die Transformation ins Ludwig-3-System ergibt:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_{p1} \cdot \vec{\Pi}_{ceo} &= \Pi_{ceox}\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + \Pi_{ceoy}\cos\vartheta\sin^2\varphi - \Pi_{ceoz}\sin\vartheta\sin\varphi \\
&\quad -\Pi_{ceox}\sin\varphi\cos\varphi + \Pi_{ceoy}\cos^2\varphi \\
&= (\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\Pi_{ceox} \\
&\quad +(\cos\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\Pi_{ceoy} \\
&\quad -\Pi_{ceoz}\sin\vartheta\sin\varphi \\
&= \Pi_{ceox}(\cos\vartheta - 1)\sin\varphi\cos\varphi \\
&\quad +[(\cos\vartheta - 1)\sin^2\varphi + 1]\Pi_{ceoy} \\
&\quad -\Pi_{ceoz}\sin\vartheta\sin\varphi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u}_{p2} \cdot \vec{\Pi}_{ceo} &= \Pi_{ceox}\cos\vartheta\cos^2\varphi + \Pi_{ceoy}\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi - \Pi_{ceoz}\sin\vartheta\cos\varphi \\
&\quad +\Pi_{ceox}\sin^2\varphi - \Pi_{ceoy}\sin\varphi\cos\varphi \\
&= (\cos\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\Pi_{ceox} \\
&\quad +(\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\Pi_{ceoy} \\
&\quad -\Pi_{ceoz}\sin\vartheta\cos\varphi \\
&= [(\cos\vartheta - 1)\cos^2\varphi + 1]\Pi_{ceox} \\
&\quad +\Pi_{ceoy}(\cos\vartheta - 1)\sin\varphi\cos\varphi \\
&\quad -\Pi_{ceoz}\sin\vartheta\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Mittels dieser Transformationen kann nun die Richtcharakteristik eines Hornstrahlers aus den berechneten Oberflächenstromdichten ermittelt werden. Die Kreuzpolarisation ist aus der elektrischen Feldstärke im Ludwig-3-System berechenbar. Das elektrische Fernfeld ergibt sich in diesem zu:

$$\begin{pmatrix} \mathsf{E}\cdot\vec{u}_{p1} \\ \mathsf{E}\cdot\vec{u}_{p2} \end{pmatrix} = jk\frac{\mathrm{e}^{-jkr}}{4\pi r}$$

$$\cdot\left[\begin{pmatrix} 1-(1-\cos\vartheta)\cos^2\varphi & -(1-\cos\vartheta)\sin\varphi\cos\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi \\ (1-\cos\vartheta)\sin\varphi\cos\varphi & (1-\cos\vartheta)\sin^2\varphi-1 & \sin\vartheta\sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Pi_{cmox} \\ \Pi_{cmoy} \\ \Pi_{cmoz} \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.+Z\begin{pmatrix} (1-\cos\vartheta)\sin\varphi\cos\varphi & (1-\cos\vartheta)\sin^2\varphi-1 & \sin\vartheta\sin\varphi \\ (1-\cos\vartheta)\cos^2\varphi-1 & (1-\cos\vartheta)\sin\varphi\cos\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Pi_{ceox} \\ \Pi_{ceoy} \\ \Pi_{ceoz} \end{pmatrix}\right].$$

4.3 Ermittlung der maximalen Kreuzpolarisation

Zur Charakterisierung der Kreuzpolarisation wird ihr normierter maximaler Wert genommen, der innerhalb eines Bereiches auftritt, in dem die Referenzpolarisation einen vorgegebenen Wert $|\mathsf{E}_{\mathrm{Ref}\sigma}(\varphi)|$ nicht unterschreitet. Die maximale Kreuzpolarisation ist dann

$$X_\sigma = \frac{\max|\mathsf{E}_{\mathrm{Kp}}(\vartheta;\varphi)|}{|\mathsf{E}_{\mathrm{Ref\ max}}(\varphi)|} \qquad \text{für} \quad |\mathsf{E}_{\mathrm{Ref}}(\vartheta;\varphi)| \geq |\mathsf{E}_{\mathrm{Ref}\sigma}(\varphi)|.$$

Da Hornstrahler oft als Speisehörner für Reflektorantennen benutzt werden, wählt man $\sigma = -12\mathrm{dB}$, weil der Abfall am Rand des Spiegels häufig bei $-12\mathrm{dB}$ liegen soll.

5 Berechnung von Rundhornstrahlern

5.1 Bemerkungen zum Rechnerprogramm

Das Programm `RHS` beruht auf dem Programm `ROECWG` beziehungsweise `ROECWG2` von Rainer Bunger. Es wurde im Rahmen dieser Arbeit derart abgewandelt, daß beliebige als Polygonzug beschriebene Rundhornstrahler berechnet werden können. Die Beschreibung des Polygonzuges ist mit den übrigen Daten der Anordnung und den Daten des Rechenvorganges in der Eingabedatei anzugeben. Dieses Programm ist neben der Berechnung der Hornstrahleranordnung bei einer Frequenz für eine breitbandige Berechnung ausgelegt. Gibt man in der Eingabedatei `0` Wobbelschritte an, so wird nicht gewobbelt. Über die Eingabe von φ in ganzen Graden kann die Ebene bestimmt werden, in der das Fernfeld untersucht werden soll. Zur Untersuchung der Kreuzpolarisation ist hierfür $\varphi = 45°$ besonders geeignet, da dort die maximale Kreuzpolarisation auftritt. Ausgegeben werden die Eingabedaten, alle ausbreitungsfähigen Moden, ein Diagramm der magnetischen Oberflächenstromdichte, ein Fernfelddiagramm für die φ-Ebene und eines für die hierzu senkrechte Ebene, der Aperturreflexionsfaktor in Betrag und Winkel, die maximale Kreuzpolarisation in Dezibel und der Öffnungswinkel in Grad jeweils für die Betriebswellenlänge. Bei einer wobbelnden Simulation werden zusätzlich der Aperturreflexionsfaktor, die maximale Kreuzpolarisation und der Öffnungswinkel als Funktion von $2a/\lambda$ ausgegeben. Die magnetische Oberflächenstromdichte und die Fernfelddiagramme werden auch in Form der Dateien `MSCD.OUT`, `FP00.OUT` und `FP90.OUT` bei der Betriebswellenlänge ausgegeben, so daß diese auch zur externen Verarbeitung zur Verfügung stehen.

Die Anzahl der Segmente auf der Apertur ist in der Eingabedatei anzugeben. Bei einer zu geringen Anzahl von Segmenten auf der Apertur zeigt der φ-Anteil der magnetischen Oberflächenstromdichte starke Schwankungen in seinem radialen Verlauf. Diese Schwankungen können durch eine Erhöhung der Segmentanzahl auf der Aperturfläche F_A verringert werden, wobei sich die Rechenzeit jedoch deutlich erhöht, da sie in etwa quadratisch mit der Gesamtsegmentanzahl ansteigt. Dabei ist die Wirkung auf die Ergebnisse relativ gering, so daß eine völlige Glättung des Verlaufes der magnetischen Oberflächenstromdichte nicht notwendig erscheint. Es ist vor allem darauf zu achten, daß eine Singularität der φ-Komponente höchstens an der Grenze zwischen Apertur und metallischer Hohlleiterwand auftritt. Sonstige Spitzen des Verlaufes der magnetischen Oberflächenstromdichte sind durch Erhöhung der Segmentanzahl unter den Spitzenwert in Randnähe zu drücken.

Die Segmentierung der äußeren Oberfläche des Hohlleiterstückes erfolgt im Unterprogramm `EINTLG` automatisch aufgrund des Segmentierungsgrades der Apertur, entsprechend den Erfahrungswerten, die in das Programm `ROECWG` eingeflossen sind. Die Segmentierung des Horns erfolgt im gleichen Unterprogramm gemäß der Angabe der Segmentanzahl pro Streckenzug. Bei einer zu kleinen Segmentzahl kann es zu sichtbar falschen Ergebnissen kommen, wie zum Beispiel zu Reflexionsfaktoren, die betragsmäßig größer als eins sind. In jedem Fall sollte deshalb die Segmentanzahl schrittweise so weit angehoben werden, bis sich nur noch vernachlässigbare Abweichungen zum höchstmöglichen

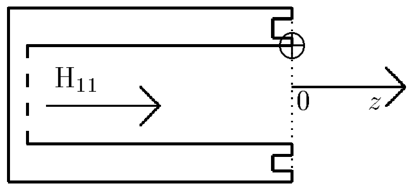
Segmentierungsgrad ergeben. In [2] werden 10 bis 15 Segmente pro Wellenlänge als häufig sinnvoller Segmentierungsgrad angegeben. Bei weit innen liegenden Aperturen können sich jedoch auch höhere Segmentierungsgrade ergeben. Vor allem auf der Apertur sind im allgemeinen deutlich mehr Segmente erforderlich, da alle Gewichte der gesamten kombinierten Oberflächenstromdichte ausschließlich aus der magnetischen Oberflächenstromdichte auf der Apertur berechnet werden.

Die Integrationsgenauigkeit wird innerhalb des Programmes durch die Parameter `LMAX` bestimmt. Da teilweise dreidimensionale Integrale zu berechnen sind, wirkt sich die Wahl der Parameter extrem stark auf die Rechenzeit aus. Im allgemeinen eignen sich die Werte

`LMAX`	=	16 in der Funktion `AE`,
`LMAX`	=	4 im Unterprogramm `MDM`,
`LMAX`	=	2/2 (32/6) im Unterprogramm `MSCSX`,
`LMAX`	=	2/2 (16/6) im Unterprogramm `MTCTX`,
`LMAX`	=	2 in der Funktion `TTEO`,
`LMAX`	=	2 in der Funktion `TTMO`.

Der Schrägstrich weist darauf hin, daß mit adaptiver Integrationsgenauigkeit gearbeitet wird, um die Rechenzeit zu minimieren: Bei geringem Abstand zwischen Quell- und Aufpunkt ist eine höhere Integrationsgenauigkeit notwendig, bei großem Abstand reicht hingegen eine geringe Integrationsgenauigkeit aus. Wenn man in den Unterprogrammen `MSCSX` und `MTCTX` die eingeklammerten Werte verwendet, erhöht sich die Rechenzeit erheblich. Die Auswirkungen auf das Ergebnis sind jedoch bei kleinen Strukturen vergleichsweise gering. Bei größeren nicht rechtwinkligen Strukturen müssen hier unter Umständen höhere Werte gewählt werden. Die Anzahl der Moden zur Berechnung der Rundhohlleitermatrix ist im entsprechenden Unterprogramm `MTHL` zu 16 festgelegt worden.

Der Nutzen einer analytischen Lösung der inneren Integrale der Fernfeldvektorpotentiale, die in den Funktionen `GEP`, `GET`, `GMP` und `GMT` dargestellt werden, hängt vom verwendeten Rechnertyp ab: Auf dem RISC-Rechner IBM/RS6000 ergibt sich teilweise eine Rechenzeitersparnis von 35% bei Verwendung der analytischen Lösungen, sofern die Integrationsgenauigkeit bei der Matrizenberechnung gering ist. Auf dem Vektorrechner Siemens/VP200 erhöht sich jedoch die Rechenzeit unter den gleichen Bedingungen um etwa 50%, da die analytische Lösung die Vektorisierbarkeit deutlich einschränkt. Dabei ist natürlich der genaue Rechnertyp unerheblich, entscheidend ist hierbei die Unterscheidung zwischen Vektorrechner und RISC-Rechner. Deshalb ist es sinnvoll für beide Rechnertypen unterschiedliche Programme zu verwenden. Da die auf dem RISC-Rechner verwendete NAG-Programmbibliothek keine Besselfunktion zweiter Ordnung enthält, wurde diese als Hornersches Schema im Programm selbst implementiert. Bei Wahl des jeweils geeigneten Programmtyps ergibt sich zum Beispiel bei 138 Segmenten, wie in einem der folgenden Beispiele, auf dem Siemens/VP200 eine Rechenzeit von etwa 6 Minuten pro Frequenzwert und auf dem IBM/RS6000 eine von etwa 40 Minuten pro Frequenzwert jeweils bei der niedrigen Integrationsgenauigkeit.



⊕ : Nullpunkt für Hornbeschreibung
(genaue Maße siehe Text)

Abbildung 3: Rundhohlleiterstrahler

5.2 Rechenbeispiele

5.2.1 Gerillter Rundhohlleiterstrahler

An dieser Stelle wurde der in Abbildung 3 dargestellte gerillte Rundhohlleiterstrahler berechnet. Dieser besitzt einen Außendurchmesser von 34mm, einen Innendurchmesser von 23mm, eine Länge von 29mm, eine Rillentiefe von 7,5mm, eine Rillenbreite von 1,5mm und einen Rillenabstand von 1mm von der Innenseite. Die Berechnung ging von einer Betriebsfrequenz von 1,917cm ($2a/\lambda = 1,20$) aus. Damit ergibt sich für die Eingabedatei:

```
                                                    EINGABEDATEI FUER
----------------------------------+--------------+-   DAS PROGRAMM   ---
                                                           RHS

BETRIEBSWELLENLAENGE      :        1.917D0        CM
WOBBELSCHRITTE            :        10
UNTERE WOBBELGRENZE       :        0.6D0
OBERE  WOBBELGRENZE       :        1.6D0
PHI-EBENE                 :        45             GRAD

ANZAHL DER SEGMENTE AUF FA:        32
SEGMENTANZAHL PRO STRECKE :         9

-HOHLLEITERGEOMETRIE--------------+--------------+---------------------

AUSSENDURCHMESSER (2*B)   :        34.0D0         MM
INNENDURCHMESSER  (2*A)   :        23.0D0         MM
HOHLLEITERLAENGE          :        29.0D0         MM
```

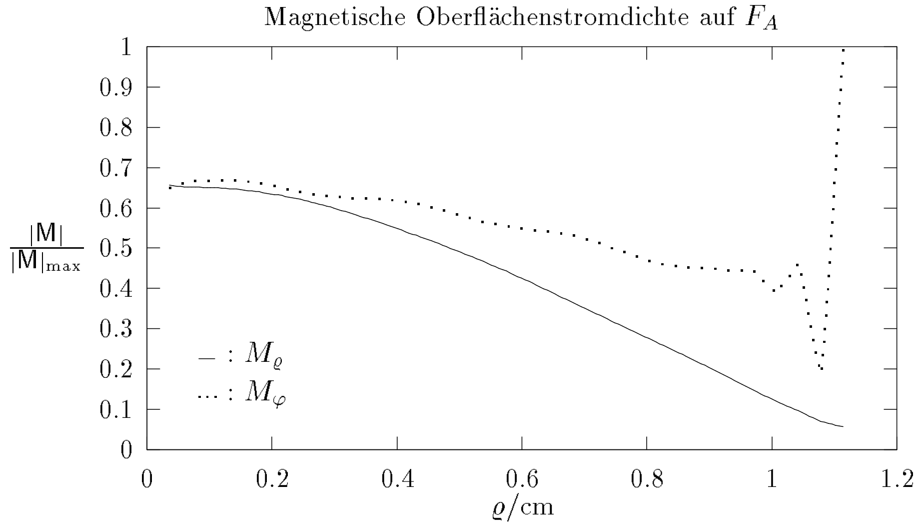


Abbildung 4: Aperturbelegung des Rundhohlleiterstrahlers bei Betriebswellenlänge

```
-HORNSTRAHLERGEOMETRIE------------+-----Z/MM-----+-----(RHO-A)/MM-------

ERSTER  ECKPUNKT            :       0.0D0          1.0D0
ZWEITER ECKPUNKT            :      -7.5D0          1.0D0
ETC.                        :      -7.5D0          2.5D0
                                    0.0D0          2.5D0
```

Die in den Abbildungen 4, 5, 6, 7, 8 und 9 dargestellten Ergebnisse stimmen mit den Ergebnissen des Programms ROECWG2 gut überein. Es ergeben sich jedoch kleine Abweichungen, da die Struktur anders segmentiert wurde. Die gute Übereinstimmung ist jedoch zwangsläufig gegeben, da das Programm RHS im Kern auf dem Programm ROECWG2 beziehungsweise ROECWG beruht. Es soll nur gezeigt werden, daß RHS die Funktionen dieser Programme einschließt.

Die Simulationen wurden für die Ebene $\varphi = 45°$ durchgeführt. Das Fernfeld wurde dabei in Schritten von je ein Grad ermittelt, so daß sich für dieses ein nahezu kontinuierlicher Verlauf ergibt. Die als Funktion der Wellenlänge ermittelten Größen wurden in elf Punkten ermittelt, die extra in den Diagrammen markiert sind. Die durch diese gezogenen Kurven dienen nur der Veranschaulichung und geben nicht den wahren Verlauf zwischen den einzelnen Punkten wieder.

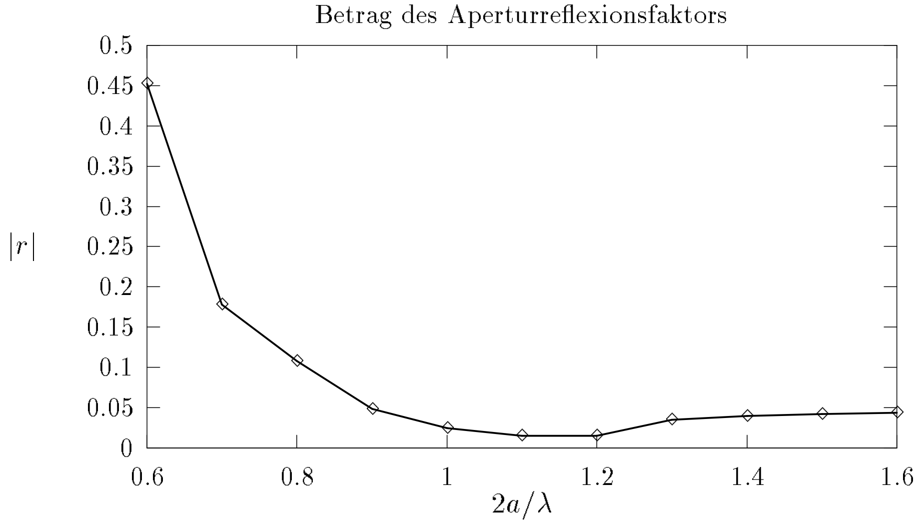


Abbildung 5: Aperturreflexionsfaktor (bzgl. H_{11}) des Rundhohlleiterstrahlers

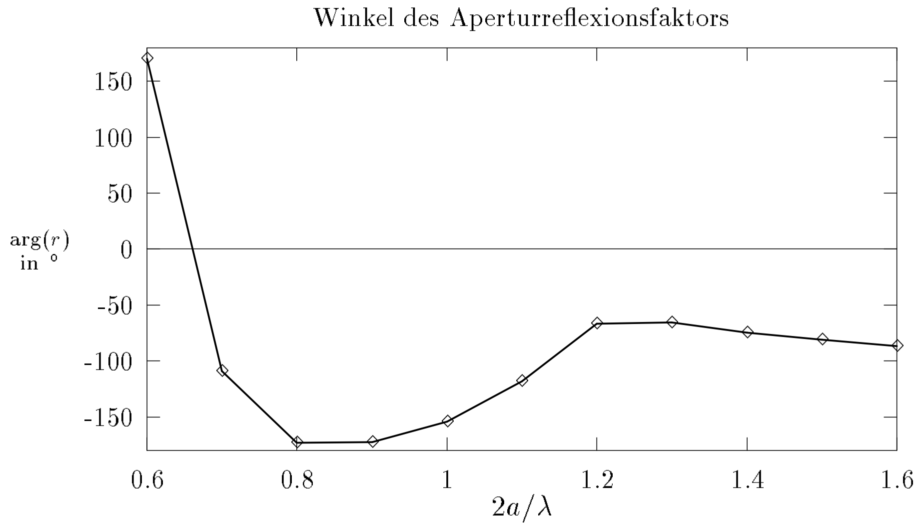


Abbildung 6: Aperturreflexionsfaktor (bzgl. H_{11}) des Rundhohlleiterstrahlers

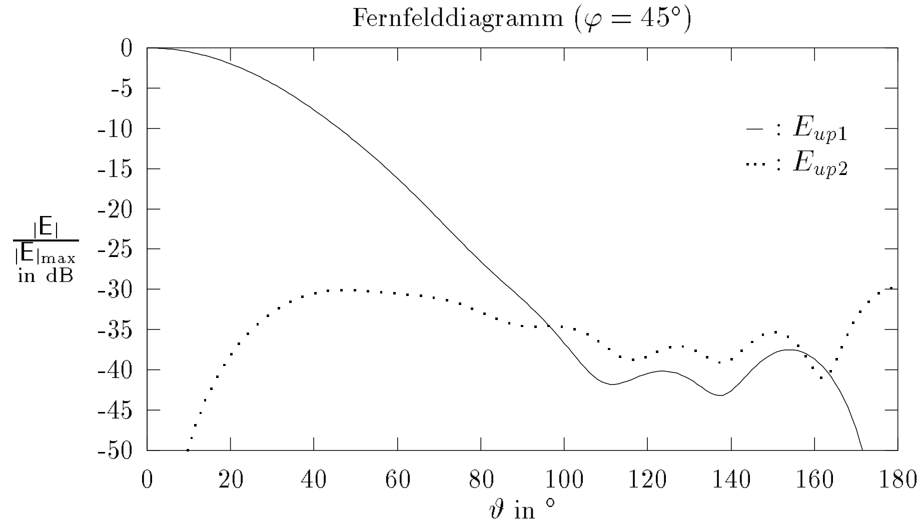


Abbildung 7: Fernfeld des Rundhohlleiterstrahlers bei Betriebswellenlänge

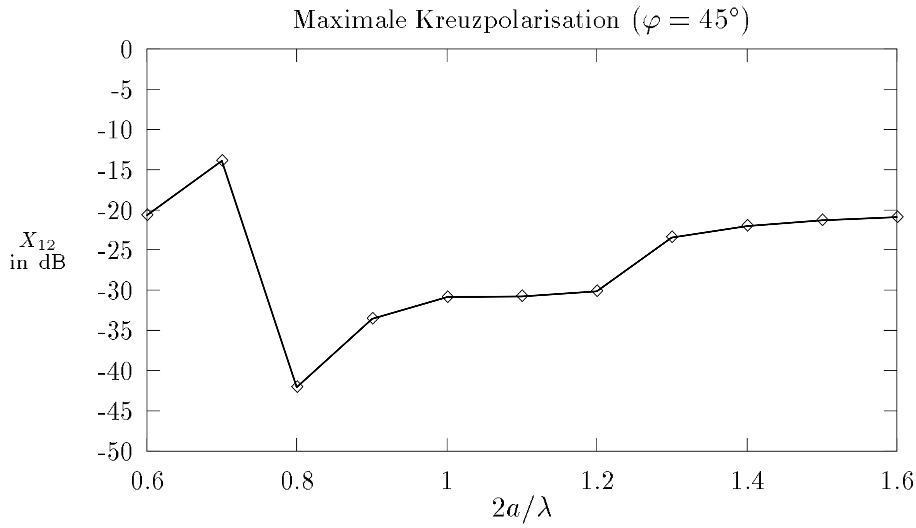


Abbildung 8: Maximale Kreuzpolarisation des Rundhohlleiterstrahlers

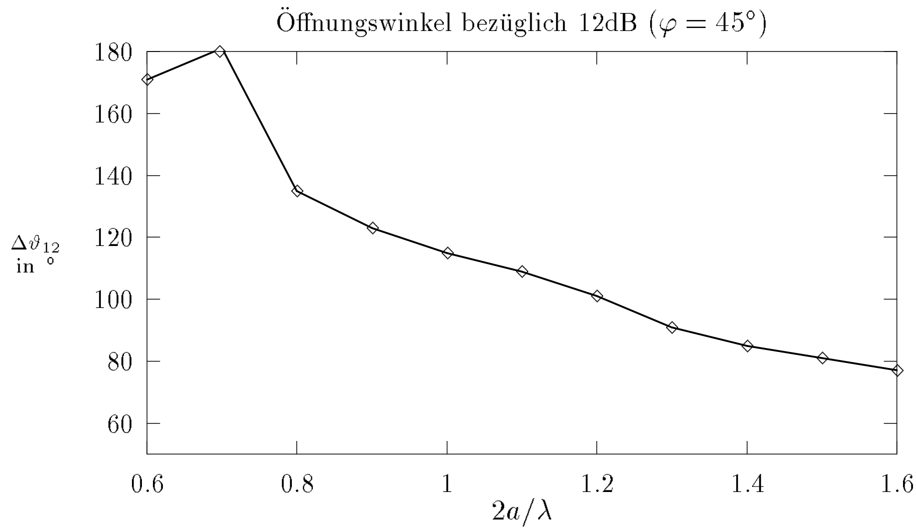


Abbildung 9: Öffnungswinkel des Rundhohlleiterstrahlers

5.2.2 Kurzgeschlossener Rundhohlleiter

Desweiteren wurde ein nahezu kurzgeschlossener Rundhohlleiter berechnet, wie in Abbildung 10 dargestellt. Dieser besitzt einen Innendurchmesser von 23mm, einen Außendurchmesser von 34mm und einen Öffnungsdurchmesser von 0,1mm. Bei einer Betriebswellenlänge von 1,917cm ($2a/\lambda = 1,20$) stellt dieser Abschluß also in guter Näherung einen Kurzschluß dar, da die Öffnung kleiner als ein Zehntel der Wellenlänge ist. Die Eingabedatei ergibt sich damit zu:

```
                                                       EINGABEDATEI FUER
-----------------------------------+--------------+-   DAS PROGRAMM    ---
                                                             RHS

BETRIEBSWELLENLAENGE       :        1.917D0        CM
WOBBELSCHRITTE             :        10
UNTERE WOBBELGRENZE        :        0.6D0
OBERE  WOBBELGRENZE        :        1.6D0
PHI-EBENE                  :        45             GRAD

ANZAHL DER SEGMENTE AUF FA:         40
SEGMENTANZAHL PRO STRECKE :         10

-HOHLLEITERGEOMETRIE--------------+--------------+----------------------

AUSSENDURCHMESSER (2*B)    :        34.0D0         MM
INNENDURCHMESSER  (2*A)    :        23.0D0         MM
HOHLLEITERLAENGE           :        20.0D0         MM

-HORNSTRAHLERGEOMETRIE------------+-----Z/MM-----+-----(RHO-A)/MM-------

ERSTER  ECKPUNKT           :        9.4D0          0.0D0
ZWEITER ECKPUNKT           :        9.4D0          -11.45D0
ETC.                       :        14.9D0         -11.45D0
                                    14.9D0         5.5D0
```

Das Fernfeld ist bei dieser Anordnung nicht von Interesse, da es bei einer technischen Realisierung im Rauschen verschwinden würde. Um so interessanter ist jedoch der Reflexionsfaktor, da dieser für einen idealen Kurzschluß exakt berechnet werden kann:

Die Grenzwellenzahl für die H_{11}-Welle in dem angegebenen Rundhohlleiter ergibt sich zu

$$k_c = 1,601029...\text{cm}^{-1}.$$

Damit ergibt sich die Wellenlänge im Hohlleiter über

$$k^2 = k_z^2 + k_c^2$$

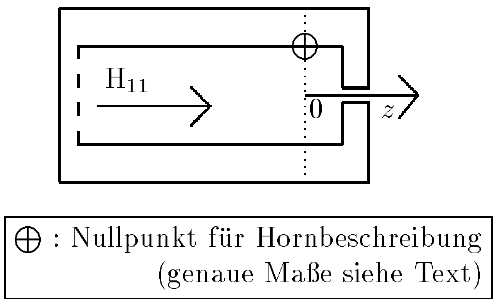


Abbildung 10: Kurzgeschlossener Rundhohlleiter

zu

$$\lambda_h = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - k_c^2}}.$$

Der Winkel des Reflexionsfaktors ergibt sich damit zu

$$\arg(r) = -2 \cdot \frac{l}{\lambda_h} \cdot 360° + 180°,$$

wobei die 180° dem Phasensprung bei der Reflexion entstammen. l ist hierbei der Abstand des Kurzschlusses von der Bezugsebene, in diesem Fall ist $l = 0,94$cm. Für den Betrag des Reflexionsfaktors ergibt sich natürlich bei einem idealen Kurzschluß

$$|r| = 1.$$

Die Simulationsergebnisse sind in den Abbildungen 11 und 12 den theoretischen Werten gegenübergestellt. Beim Winkel des Aperturreflexionsfaktors bezüglich der H_{11}-Welle ist dabei kein Unterschied zwischen den theoretischen und den simulierten Werten erkennbar: Beide Kurven liegen übereinander. Der Betrag des Aperturreflexionsfaktors nimmt hingegen in der Simulation sogar Werte größer als eins an, was physikalisch natürlich unmöglich ist. Diese Abweichung zeigt sich jedoch erst in der dritten Nachkommastelle.

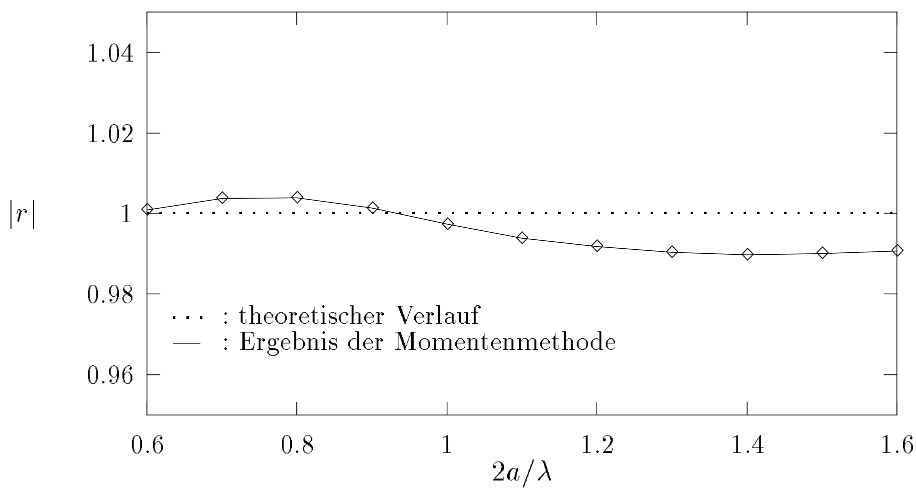


Abbildung 11: Betrag des Aperturreflexionsfaktors bei Quasi-Kurzschluß

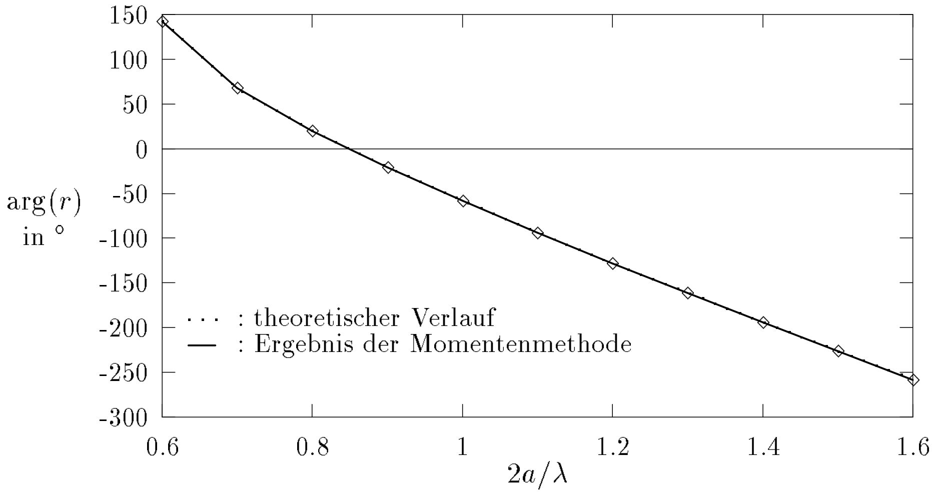


Abbildung 12: Winkel des Aperturreflexionsfaktors bei Quasi-Kurzschluß

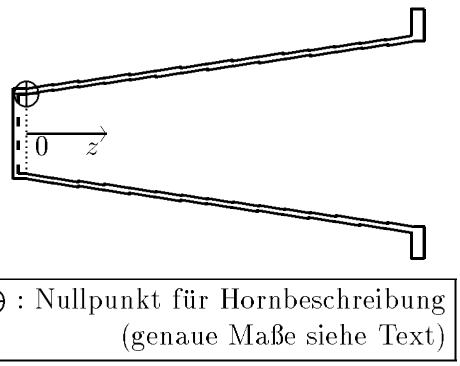


Abbildung 13: Rundhornstrahler endlicher Außengeometrie

5.2.3 Rundhornstrahler endlicher Außengeometrie

Als nächstes wurde der in Abbildung 13 dargestellte Rundhornstrahler mit endlicher Außengeometrie berechnet. Der angesetzte Hohlleiter besitzt dabei einen Innendurchmesser von 1,8cm, einen Außendurchmesser von 2,2cm und eine Länge von 1,0cm. Der Rundhornstrahler besitzt desweiteren einen halben Öffnungswinkel von zirka 4,91°, bei einer Kegellänge von 30,25cm. Daran schließt sich ein zylindrischer Querschnittsverlauf von 0,82cm an. Das Hornende ist mit einem Wulst der Höhe 1,0cm und der Dicke 0,5cm versehen. Die Simulation erfolgt bei einer Wellenlänge von 2,398cm ($2a/\lambda = 7,505$), was einer Frequenz von 12,5GHz entspricht. Das Fernfeld wird hierbei in den Ebenen $\varphi = 0°$ und $\varphi = 90°$ betrachtet. Die Eingabedatei ergibt sich damit zu:

```
                                                                  EINGABEDATEI FUER
----------------------------------+--------------+-   DAS PROGRAMM   ---
                                                                       RHS

BETRIEBSWELLENLAENGE       :       2.398339664D0  CM
WOBBELSCHRITTE             :       0
UNTERE WOBBELGRENZE        :       0.7D0
OBERE  WOBBELGRENZE        :       0.8D0
PHI-EBENE                  :       0              GRAD

ANZAHL DER SEGMENTE AUF FA:        80
SEGMENTANZAHL PRO STRECKE :        40

-HOHLLEITERGEOMETRIE--------------+--------------+----------------------

AUSSENDURCHMESSER (2*B)    :       22.0D0         MM
INNENDURCHMESSER  (2*A)    :       18.0D0         MM
```

```
HOHLLEITERLAENGE          :      10.0D0        MM

-HORNSTRAHLERGEOMETRIE------------+-----Z/MM-----+-----(RHO-A)/MM-------

ERSTER  ECKPUNKT          :      30.25D0       2.6D0
ZWEITER ECKPUNKT          :      60.5D0        5.2D0
ETC.                      :      90.75D0       7.8D0
                                 121.0D0       10.4D0
                                 151.25D0      13.0D0
                                 181.5D0       15.5D0
                                 211.75D0      18.2D0
                                 242.0D0       20.8D0
                                 272.25D0      23.4D0
                                 302.5D0       26.0D0
                                 310.7D0       26.0D0
                                 310.7D0       36.0D0
                                 305.7D0       36.0D0
                                 305.7D0       28.275D0
                                 280.7D0       26.126D0
                                 155.7D0       15.383D0
                                 25.0D0        4.149D0
```

Diese Simulation verwendete 868 Segmente und benötigte ca. 770 Minuten Rechenzeit auf dem Siemens/VP200 bei der hohen Integrationsgenauigkeit gemäß den obigen eingeklammerten Werten für `LMAX`. Die berechneten Fernfelddiagramme sind in den Abbildungen 14 und 15 den gemessenen Werten gegenübergestellt. Die Messungen erfolgten jeweils in zwei Drehrichtungen, so daß sich jeweils zwei Meßkurven ergaben aus denen die Asymmetrie der realen Anordnung zu erkennen ist. Desweiteren lieferte die Simulation einen Reflexionsfaktor vom Betrage 0,0154 ($\hat{=} - 36,25$dB). Der Öffnungswinkel in der E-Ebene bezüglich -12dB Randabfall wurde zu $47°$ berechnet.

Die Rechenergebnisse stimmen zwar gut mit den Meßwerten überein, die Rechenzeit erreicht hierbei jedoch eine ansich unakzeptable Größe. Hierbei ist ja zu bedenken, daß bei dem Entwurf eines Rundhornstrahlers etliche Frequenzpunkte berechnet werden müssen, während im obigen Fall nur ein Frequenzpunkt berechnet wurde. Ferner sind insgesamt verschiedene Varianten durchzurechnen, die eventuell von einem Optimierungsprogramm generiert wurden. Dies ist bei derartigen Rechenzeiten natürlich nicht möglich.

Deutlich kleinere Strukturen sind jedoch durchaus in akzeptabler Zeit berechenbar. Bei diesen zeichnet sich die verwendete Momentenmethode dadurch aus, daß an den Kanten der Struktur keinerlei numerische Probleme entstehen und daß somit prinzipiell beliebige Rundhornstrahler berechnet werden können.

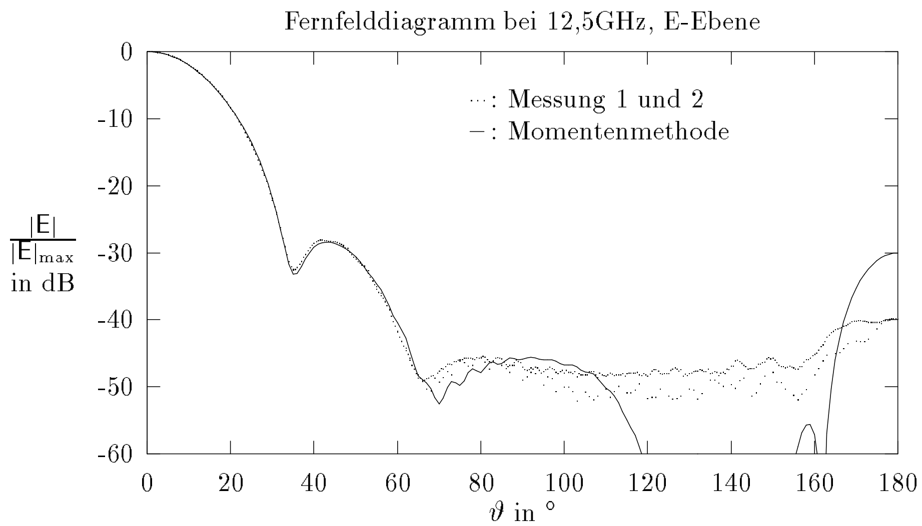


Abbildung 14: Fernfeld in der E-Ebene ($\varphi = 0°$)

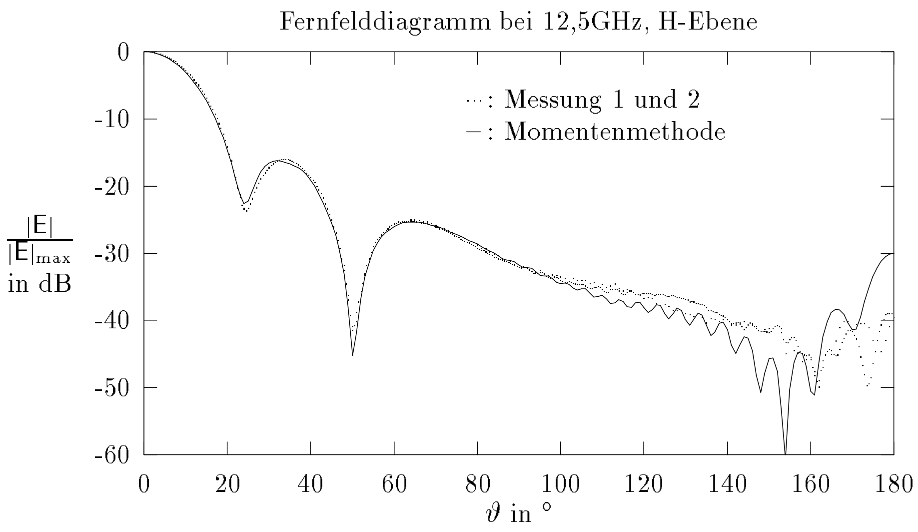


Abbildung 15: Fernfeld in der H-Ebene ($\varphi = 90°$)

Literatur

[1] „Berechnung eines Rundhohlleiterstrahlers unter Berücksichtigung der endlichen Außengeometrie“
Rainer Bunger (Diplomarbeit)
11. Oktober 1993 (2. Auflage)

[2] „Kreuzpolarisationseigenschaften von Hohlleitungsstrahlern“
Volker Hombach (Dissertation)
Bochum 1981

[3] „Theoretische Elektrotechnik“
Károly Simonyi
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1989 (9. Auflage)

[4] „Taschenbuch der Mathematik“
I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew
Verlag Harri Deutsch, Thun 1989 (24. Auflage)

[5] „Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen“
Niels Nielsen
Verlag B. G. Teubner, Leipzig 1904

[6] „Approximate Calculation of Integrals“
V. I. Krylov
The Macmillan Company, New York 1962

[7] „Analysis of a Finite Element Method: PDE/PROTRRAN“
Granville Sewell
Springer-Verlag New York Inc., 1985

[8] „Methode der finiten Elemente“
Hans Rudolf Schwarz
B. G. Teubner Stuttgart 1991

[9] „Radiation and Scattering from Bodies of Revolution“
J. R. Mautz, R. F. Harrington
Appl. Scient. Res. (1969), S. 405-435

[10] „A Comparsion Between Two Kinds of Equivalent Currents to Analyze Conducting Bodies with Apertures Using Moment Methods: Application to Horns with Symmetry of Revolution“
Manuel F. Catedra
IEEE Trans. AP 35 (1987)

[11] „Design of Corrugated Conical Horns“
Bruce MacA. Thomas
IEEE Trans. AP 26 (1978)

[12] „H-Field, E-Field, and Combined-Field Solutions for Conducting Bodies of Revolution“
Joseph R. Mautz, Roger F. Harrington
AEÜ, Band 32 [1978], Heft 4

[13] „A Combined-Source Solution for Radiation and Scattering from a Perfectly Conducting Body“
Joseph R. Mautz, Roger F. Harrington
IEEE Trans. AP 27 (1979)

[14] „Reflector and Lens Antennas
Analysis and Design Using Personal Computers“
Carlyle J. Sletten (Hrsg.)
Artech House Inc. 1988

[15] „Mikrowellentechnik (Band 2)“
Erich Pehl
Dr. Alfred Hüthig Verlag GmbH Heidelberg 1984