Diplomarbeit

Feldtheoretisch strenge Charakterisierung mehrfach geschichteter, mikrostreifengespeister Aperturantennen im Ortsbereich

Ingo D. Rullhusen

4. Mai 1995

Betreuung	:	Prof. Dr.-Ing. F. Arndt, Dipl.-Ing. R. Bunger
Erster Gutachter	:	Prof. Dr.-Ing. F. Arndt
Zweiter Gutachter	:	Prof. Dr. D. Silber

UNIVERSITÄT BREMEN
Institut für Hochfrequenztechnik
Prof. Dr.-Ing. F. Arndt

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Allgemeines

In den letzten Jahren haben Mobil- und Satellitenkommunikation zunehmend an Bedeutung gewonnen. Der damit steigende Bedarf an Übertragungskapazitäten erfordert einerseits die Erschließung immer höherer Frequenzbereiche, wobei andererseits die einzelnen Systemkomponenten möglichst klein und preiswert gehalten werden müssen, um auch den Bedürfnissen in Konsumentenkreisen gerecht zu werden. In diesem Sinne ist es also unter anderem notwendig, Antennen mit geringen Abmessungen zur Verfügung zu stellen, die im Gigahertz-Bereich breitbandig betrieben werden können und einfach herstellbar sind.

Diesen Anforderungen kommen planare, streifengespeiste Aperturantennen besonders nahe. Eine solche Anordnung gemäß Abbildung 1 kann zum Beispiel mittels Fotoätzens einer beidseitig beschichteten Leiterplatte erzeugt werden. Dabei wird auf der Oberseite die Apertur freigeätzt und auf der Unterseite das Speisenetzwerk strukturiert; die Justierung beider relativ zueinander muß also nur einmal beim Belichten erfolgen. Die Unterseite kann dann mit einem weiteren Dielektrikum und einer Metallplatte verschlossen werden,

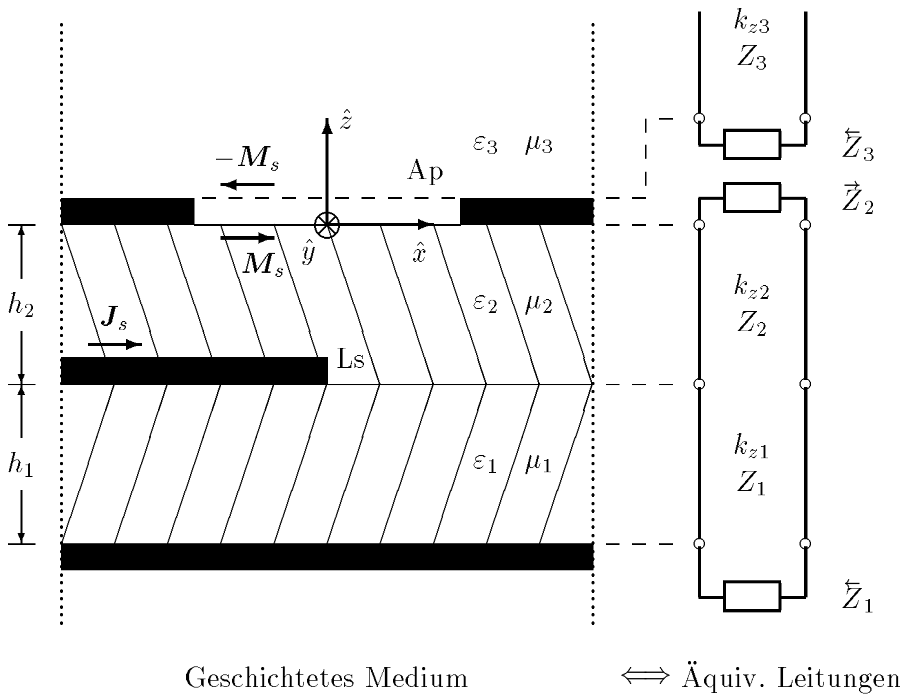


Abbildung 1: Grundstruktur mit Leitungsäquivalent

wodurch Abstrahlungen nach unten vermieden werden können. Planare Aperturantennen weisen dabei deutliche Vorteile gegenüber ausschließlichen Mikrostreifenanordnungen auf. Streifengespeiste Aperturantennen sind somit zum Beispiel weniger empfindlich gegenüber Fertigungstoleranzen als Antennen in Mikrostreifentechnologie. Desweiteren besitzen streifengespeiste Aperturantennen eine größere Bandbreite, bilden keine Oberflächenwellen aus und ihr Speisenetzwerk erzeugt keine Abstrahlung.

Im Rahmen dieser Arbeit soll nun die Theorie der analogen Leitungsersatzschaltbilder nach L. B. Felsen und N. Marcuvitz[1] dazu verwendet werden, um die mehrfach geschichtete Struktur von planaren, streifengespeisten Aperturantennen zu berechnen. Ziel dieser Arbeit ist dabei die Anpassung der Theorie an die gegebene Aufgabenstellung und die Erstellung eines Rechnerprogramms zur Umsetzung dieser Theorie.

Mein Dank gilt dabei insbesondere Dipl.-Ing. R. Bunger für seine Anregungen zum Einstieg in diese Thematik und seine umfangreichen Literaturhinweise.

1.2 Zur Vorgehensweise

Im Rahmen dieser Arbeit soll ein Verfahren im Ortsbereich zur Berechnung planarer, streifengespeister Aperturantennen mit mehrfach geschichteten Dielektrika entwickelt werden. Hierbei soll die Momentenmethode in Form der Methode von Galerkin zum Einsatz kommen, um eine problemlösende Matrizengleichung zu gewinnen. Die für die Momentenmethode notwendigen Integraloperatoren zur Berechnung der Feldstärken aus den Stromverteilungen werden dabei als Faltungsintegrale dargestellt, wobei die Impulsantworten, hier Greensche Funktionen genannt, im vektoriellen Falle die Form einer Dyade annehmen. Als Dyade bezeichnet man in diesem Zusammenhang einen Tensor zweiter Stufe, der vollständig durch sechs Zahlen beschrieben werden kann; mitunter stehen auch Differentialoperatoren an Stelle der Zahlen. Somit besteht der Kern dieser Arbeit also in der Entwicklung geeigneter Formulierungen für die notwendigen Greenschen Dyaden.

Um die Wirkung der Apertur Ap in der Abbildung 1 zu erfassen, belegt man zunächst die Apertur von unten mit einer fiktiven magnetischen Flächenstromdichte $\boldsymbol{M}_s$ und von oben mit der entgegengesetzten $-\boldsymbol{M}_s$. Die Feldverteilung wird hierdurch nicht beeinflußt, sofern beide Flächenströme dicht genug zusammen liegen und laut Gleichung (2.5) der dort vorherrschenden tangentialen elektrischen Feldstärke entsprechen. Aus der Gleichung (2.5) ist weiterhin ersichtlich, daß zwischen beiden magnetischen Flächenströmen die tangentiale elektrische Feldstärke verschwindet. Somit ist es also möglich, unter Beibehaltung der magnetischen Flächenströme die Apertur zu verschließen, ohne daß sich eine Änderung ergibt. Da der speisende Leitungsstreifen Ls schließlich über die elektrische Flächenstromdichte $\boldsymbol{J}_s$ dargestellt wird, ist durch das Verschließen der Apertur eine transversal homogene Schichtstruktur entstanden, die über den Formalismus nach Felsen auf zwei äquivalenten Leitungsersatzschaltbildern eineindeutig abgebildet werden kann, um die Wirkungen der magnetischen und elektrischen Flächenstromdichten zu berechnen.

[1] siehe [24]

Dem Übergang auf die äquivalenten Leitungsersatzschaltbilder geht die Zerlegung des elektromagnetischen Feldes im geschichteten Medium in E- und H-Wellen voraus, die sich in z-Richtung ausbreiten. Genauer gesagt werden die E- und H-Wellen in einzelne Wellenmoden zerlegt, wobei sich für jeden einzelnen Modus ein Leitungsäquivalent ergibt. Hierauf soll jedoch nicht jedesmal explizit hingewiesen werden. Es wird vereinfachend davon gesprochen, daß sowohl den E-Wellen als auch den H-Wellen jeweils eine äquivalente Leitung zugeordenet wird, wie in Abbildung 1 angedeutet, da sich diese Wellentypen besonders charakteristisch unterscheiden lassen.

Die problembeschreibenden Integralgleichungen der ursprünglichen Struktur ergeben sich aus den Randbedingungen: Zum einen muß die tangentiale elektrische Feldstärke auf dem als ideal leitend angesetzten Leitungsstreifen Ls verschwinden und zum anderen muß die transversale magnetische Feldstärke in der Apertur Ap stetig von der Schicht 2 in die Schicht 3 übergehen. Die Feldstärken werden nun durch ihre skalaren und vektoriellen Potentiale dargestellt. Aus der ersten Randbedingung erhält man dann durch Nutzung der entsprechenden Integraloperatoren für die Potentiale die Integralgleichung des elektrischen Feldes, aus der zweiten folgt in analoger Weise die Integralgleichung des magnetischen Feldes. Diese beiden Integralgleichungen definieren die gesuchten Flächenstromdichten $\boldsymbol{J}_s$ und $\boldsymbol{M}_s$. Wegen der Lorentz-Eichung reicht zwar formal die Betrachtung der Integraloperatoren der vektoriellen Potentiale aus, es zeigt sich jedoch, daß die Anwendung der Lorentz-Bedingung bei den skalaren Potentialen dann zu stark singulären Integranden führt, die numerisch nicht handhabbar sind. Deshalb werden hier Mischpotentialformen eingeführt, in denen zwar die vektoriellen *und* skalaren Potentiale vorkommen, wobei jedoch deren Integranden weniger starke Singularitäten aufweisen, da man quasi die singulären Anteile auf die skalaren und vektoriellen Potentiale verteilt.

Um zu einer problemlösenden Matrizengleichung zu kommen, werden nun die Integralgleichungen in Mischpotentialform durch Nutzung der Momentenmethode diskretisiert, indem man für die Flächenströme eine Zerlegung in eine Summe endlich vieler gewichteter Basisfunktionen einsetzt. Aufgrund der Linearität der Integraloperatoren der Potentiale können die Summenbildung und die Gewichte aus den Integraloperatoren herausgezogen werden, so daß man bezüglich der unbekannten Gewichte lineare Gleichungen erhält. Gemäß der Methode von Galerkin werden die Basisfunktionen der Zerlegungen auch als Gewichtsfunktionen verwendet, um durch die Bildung von Testintegralen zu einem Gleichungssystem für die unbekannten Gewichte zu gelangen. Da dieses Gleichungssystem bezüglich der unbekannten Gewichte linear ist, läßt es sich schließlich in eine problemlösende Matrizengleichung umschreiben, deren Elemente über doppelte Integraloperationen berechenbar sind. Die unbekannten Gewichte ergeben sich dann durch Matrixinversion und Multiplikation mit dem Anregungsvektor.

Um die Matrixelemente berechnen zu können, müssen die Integraloperatoren für die Potentiale beziehungsweise Feldstärken ausgewertet werden. Hierzu ist es notwendig, die Greenschen Funktionen beziehungsweise Dyaden zu kennen. Um die Greenschen Dyaden der Feldgrößen zu berechnen, wird jeweils die Antwort auf eine Punktquelle ermittelt. Die Punktquelle entspricht dem erregenden Impuls bei harmonischer Zeitabhängigkeit und komplexer Formulierung. Die direkte Berechnung der Feldantworten ist im allgemeinen in einem geschichteten Medium eine schwierige Aufgabe, weshalb hier die Formulierung nach Felsen verwendet wird. Hiermit ist es möglich, für die in z-Richtung fortschreitenden Moden der E- und H-Wellen jeweils eine äquivalente Leitungsanordnung anzugeben. Die Quellen im geschichteten Medium werden entsprechend zu Strom- und Spannungsquellen in den äquivalenten Leitungen, deren Strom- und Spannungsantworten mittels der Leitungstheorie berechenbar sind. Aus diesen Strom- und Spannungsantworten kann man dann wieder auf die Feldantworten zurückschließen und die gesuchten Greenschen Dyaden berechnen. Wie gezeigt werden wird, handelt es sich bei den einzelnen Modusfunktionen in einem transversal unbeschränkten Medium um Exponentialterme und die Modusparameter sind reelle Zahlen, so daß das Modenspektrum kontinuierlich ist. Dies hat zur Folge, daß sich die Transformationsbeziehungen zwischen dem geschichteten Medium und dem Leitungsmodell mit Hilfe der Fouriertransformation formulieren lassen, weshalb die entsprechenden Herleitungen im Fourierbereich stattfinden. Die Berechnung der Matrixelemente mit den hergeleiteten Greenschen Dyaden erfolgt dann im Ortsbereich.

Wenn nach der Lösung der aufgestellten Matrizengleichung die Gewichte der Flächenströme bekannt sind, ergeben sich die gesuchten Flächenströme direkt durch eine gewichtete Summation über alle Basisfunktionen. Aus diesen nun bekannten Flächenstromverteilungen können jetzt alle charakteristischen Größen berechnet werden. Der Eingangsreflexionsfaktor ergibt sich somit aus einer Zerlegung des Gesamtstromes auf der Speiseleitung in einzelne Wellenterme. Diese Zerlegung wird hier mit der Matrix-Pencil-Methode vorgenommen. Der Reflexionsfaktor folgt dann aus dem Verhältnis der Amplituden der vor- und rücklaufenden Grundwellen, wobei die gewählte Referenzebene zu berücksichtigen ist. Das Fernfeld ergibt sich aus der Anwendung des entsprechenden Faltungsintegrals auf die Verteilung der magnetischen Flächenstromdichte auf der Apertur unter der Nutzung von Fernfeldnäherungen für die Greensche Dyade. Die auftretenden Sommerfeld-Integrale werden dabei mittels der Sattelpunktsmethode berechnet.

2 Bestimmung der problemlösenden Matrizengleichung

Es soll nun über die Integralgleichung des elektrischen und magnetischen Feldes in der Potentialform eine Integralgleichung in der Mischpotentialform aufgestellt werden. Letztere wird dann mit der Momentenmethode in Form der Methode von Galerkin in eine Matrizengleichung überführt, die mit den Mitteln der lineare Algebra lösbar ist.

Die Integralgleichungen der elektrischen und magnetischen Felder ergeben sich aus den Randbedingungen unter Anwendung des Prinzips der Greenschen Funktion, welches in weiten Bereichen der Physik Verwendung findet. Wie noch zu sehen sein wird, handelt es sich bei den Greenschen Funktionen im Falle eines geschichteten Mediums jedoch mitunter um Dyaden. Die Ränder des betrachteten Problems der streifengespeisten Apertur sind zum einen die Oberfläche des Streifenleiters und zum anderen die Aperturfläche. Die metallische Grenzfläche zwischen äußerem Halbraum und Streifenanordnung wird in den Greenschen Dyaden berücksichtigt, ebenso wie die metallische Grundplatte. Die Apertur wird also durch eine magnetische Flächenstromdichte auf beiden Seiten der metallischen Grenzfläche jeweils mit entgegengesetzter Orientierung modelliert.

Hierzu geht man von den symmetrisierten Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{M}, &(2.1)\\ \mathrm{rot}\ \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}, &(2.2)\\ \mathrm{div}\ \vec{D} &= q(\vec{r};t), &(2.3)\\ \mathrm{div}\ \vec{B} &= q_m(\vec{r};t), &(2.4) \end{aligned}$$

aus. $\vec{M}$ stellt hierbei die fiktive magnetische Stromdichte dar, deren Quellen die Veränderungen der fiktiven magnetischen Raumladungsdichte q_m sind. Integriert man nun die Gleichung (2.1) über die Fläche S_R eines Rechtecks, das eine beliebige Grenzfläche zwischen den Gebieten 1 und 2 senkrecht durchstößt und dessen Längskanten jeweils auf verschiedenen Seiten der Grenzfläche liegen, so ergibt sich aus dem Satz von Stokes:

$$\oint\limits_{\partial S_R} \vec{E} \mathrm{d}\vec{s} = -\iint\limits_{S_R} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n}_S \mathrm{d}S - \iint\limits_{S_R} \vec{M} \cdot \hat{n}_S \mathrm{d}S,$$

wobei $\hat{n}_S$ der rechtssinnige Normalenvektor der Fläche S_R ist. Nun geht man davon aus, daß $\vec{B}$ nur endliche Zeitableitungen besitzt und $\vec{M} = \vec{M}_s \delta_{S_R}$ ist, wobei δ_{S_R} für eine auf der Grenzfläche vorhandene Dirac-Distribution steht und $\vec{M}_s$ die magnetische Flächenstromdichte auf S_R darstellt. Läßt man nun die Kanten des Rechtecks, welche die Grenzfläche durchstoßen, gegen Null gehen, so ergibt sich bei hinreichend kleiner Länge l der Längskanten

$$\left(\vec{E}_{t1} - \vec{E}_{t2}\right) \cdot \vec{l} = 0 - \vec{M}_s \cdot \hat{n}_S\, l,$$

wobei $\vec{l}$ den Vektor der Längskante in dem Gebiet 1 darstellt. Beachtet man, daß $\vec{l}$ senkrecht zu $\hat{n}_S$ steht, so ergibt sich also, daß die normal zu der elektrischen Tangentialfeldstärke fließende magnetische Flächenstromdichte bei jener einen Sprung an der Grenzfläche erzeugt. Die korrekte Beachtung der Richtungen und Orientierungen führt dann zu der folgenden Grenzflächenbedingung für die elektrische Feldstärke:

$$\hat{n} \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) = \vec{M}_s, \tag{2.5}$$

wobei $\hat{n}$ der Einheitsnormalenvektor der Grenzfläche ist, der von der Seite 1 zur Seite 2 zeigt. Ausgehend von der Gleichung (2.2) ergibt sich in gleicher Weise unter Beachtung des anderen Vorzeichens:

$$\hat{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = -\vec{J}_s, \tag{2.6}$$

wobei $\vec{J}_s$ hier für die elektrische Flächenstromdichte steht.

Durch Anwendung der Gleichung (2.5) kann man die Apertur von der tangentialen elektrischen Feldstärke befreien, indem man die Apertur beidseitig mit einer entgegengesetzt gleich großen magnetischen Flächenstromdichte belegt. Eine Apertur ohne elektrisches Tangentialfeld kann dann als elektrisch leitend verschlossen angesetzt werden, ohne das elektromagnetische Feld zu verändern. In dem hier betrachteten Fall wird so verfahren, um den oberen Halbraum und die Streifenanordnung rechnerisch zu entkoppeln und getrennt behandeln zu können.

2.1 Aufstellung der Integralgleichungen

Zur Herleitung der problembeschreibenden Integralgleichungen geht man zunächst von der Grenzflächenbeziehung (2.5) aus, wobei im folgenden mit komplexen Amplituden gerechnet wird. Als Zeitabhängigkeit wird hierbei $\mathrm{e}^{j\omega t}$ angenommen; es gilt also zum Beispiel:

$$\vec{E}(\vec{r};t) = \mathrm{Re}\left(\boldsymbol{E}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right).$$

Für die tangentiale elektrische Feldstärke auf dem Leitungsstreifen gilt somit im allgemeinen

$$\boldsymbol{E}_t = Z_s \boldsymbol{J}_s, \tag{2.7}$$

wobei Z_s der komplexe Oberflächenwiderstand ist. Im hier angenommenen Fall von ausschließlich idealen elektrischen Leiteren ist also die tangentiale elektrische Feldstärke auf allen leitenden Flächen gleich null. Auf der Oberfläche des Leitungsstreifens gilt somit

$$\hat{n}_{\mathrm{Ls}} \times (\boldsymbol{E}_2\{\boldsymbol{J}_s\} + \boldsymbol{E}_2\{\boldsymbol{M}_s\}) = -\hat{n}_{\mathrm{Ls}} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}, \tag{2.8}$$

wobei $\boldsymbol{E}_2\{\boldsymbol{J}_s\}$ und $\boldsymbol{E}_2\{\boldsymbol{M}_s\}$ für verschiedene Integraloperatoren stehen, welche die jeweiligen Beiträge der elektrischen und magnetischen Flächenstromdichten zu der elektrischen Feldstärke liefern, und $\hat{n}_{\mathrm{Ls}}$ für den von der Leitungsfläche weg zeigenden Einheitsnormalenvektor steht. Hierbei wird nur die elektrische Flächenstromdichte auf dem Leitungsstreifen betrachtet; die Wirkungen der resultierenden Flächenstromdichten auf der Grundplatte und auf der Deckplatte seien in den Integraloperatoren enthalten. Die Anregung wird hierbei noch vollkommen unspezifisch als einfallende elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}$ dargestellt, deren Tangentialkomponente zu kompensieren ist.

Betrachtet man nun die Apertur, die die obere Schicht 2 der Streifenanordnung vom äußeren Halbraum 3 trennt, so kann man hier die Grenzflächenbeziehung (2.6) anwenden: Da in der Apertur keine leitenden Materialien vorhanden sind, ist dort die elektrische Flächenstromdichte gleich null. Damit ergibt sich sofort, daß die magnetische Feldstärke an der Apertur stetig von dem Raum 2 in den Raum 3 übergehen muß. Die Stetigkeit der elektrischen Feldstärke kann nicht verwendet werden, da diese bereits bei der Einführung der magnetischen Flächenstromdichte verwendet wurde. Durch Gleichsetzen der magnetischen Feldstärken ergibt sich dann an der Apertur:

$$\hat{n}_{\mathrm{Ap}} \times (\boldsymbol{H}_2\{\boldsymbol{J}_s\} + \boldsymbol{H}_2\{\boldsymbol{M}_s\}) = \hat{n}_{\mathrm{Ap}} \times \boldsymbol{H}_3\{-\boldsymbol{M}_s\}, \tag{2.9}$$

wobei $\boldsymbol{H}_2\{\boldsymbol{J}_s\}$, $\boldsymbol{H}_2\{\boldsymbol{M}_s\}$ und $\boldsymbol{H}_3\{-\boldsymbol{M}_s\}$ erneut entsprechende Integraloperatoren darstellen, um aus den Flächenströmen die entsprechenden Beiträge zur magnetischen Feldstärke zu gewinnen. Der Vektor $\hat{n}_{\mathrm{Ap}}$ stellt dabei den von Raumgebiet 2 ins Raumgebiet 3 zeigenden Einheitsnormalenvektor der Aperturfläche dar.

2.1.1 Integralgleichungen in Potentialform

Anstatt die Feldintegralgleichungen (2.8) und (2.9) zu verwenden, sollen aus diesen Potentialintegralgleichungen abgeleitet werden. Hierzu ist zunächst eine Darstellung der

Feldstärken durch Potentiale notwendig. Zunächst sei der Fall angenommen, daß $q_{ms} = 0$ und $\boldsymbol{M}_s = \vec{0}$ seien. In diesem Fall ist $\boldsymbol{B}$ quellenfrei und kann als Rotation eines Vektorpotentials dargestellt werden:

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_J$$

beziehungsweise

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_J. \tag{2.10}$$

Die elektrische Feldstärke ergibt sich dann aus der Maxwellschen Gleichung (2.1) in komplexer Darstellung über

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -j\omega\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_J$$

zu

$$\boldsymbol{E} = -j\omega\boldsymbol{A}_J - \mathrm{grad}\,\phi_J, \tag{2.11}$$

wobei beachtet wurde, daß stets

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = \vec{0}$$

gilt. Für den Fall, daß $q_s = 0$ und $\boldsymbol{J}_s = \vec{0}$ sind, ergibt sich in analoger Art und Weise aus der Quellenfreiheit von $\boldsymbol{D}$:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_M \tag{2.12}$$

und

$$\boldsymbol{H} = -j\omega\boldsymbol{A}_M - \mathrm{grad}\,\phi_M. \tag{2.13}$$

Der allgemeine Fall ergibt sich dann aus der linearen Überlagerung beider Teilergebnisse zu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -j\omega\boldsymbol{A}_J - \mathrm{grad}\,\phi_J - \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_M, & (2.14)\\ \boldsymbol{H} &= -j\omega\boldsymbol{A}_M - \mathrm{grad}\,\phi_M + \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_J, & (2.15) \end{aligned}$$

wobei als Feldkonstanten diejenigen am Aufpunkt zu verwenden sind.

Setzt man diese Gleichungen in die Gleichungen (2.8) und (2.9) ein, so ergeben sich:

$$\begin{aligned} \hat{n}_{\mathrm{Ls}} \times \left(-j\omega\boldsymbol{A}_J^2\{\boldsymbol{J}_s\} - \mathrm{grad}\,\phi_J^2\{\boldsymbol{J}_s\} - \frac{1}{\varepsilon_2}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_M^2\{\boldsymbol{M}_s\}\right) &= -\hat{n}_{\mathrm{Ls}} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}, & (2.16)\\ \hat{n}_{\mathrm{Ap}} \times \left(\frac{1}{\mu_2}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_J^2\{\boldsymbol{J}_s\} - j\omega\boldsymbol{A}_M^2\{\boldsymbol{M}_s\} - \mathrm{grad}\,\phi_M^2\{\boldsymbol{M}_s\}\right) &= \\ \hat{n}_{\mathrm{Ap}} \times \left(-j\omega\boldsymbol{A}_M^3\{-\boldsymbol{M}_s\} - \mathrm{grad}\,\phi_M^3\{-\boldsymbol{M}_s\}\right). & & (2.17) \end{aligned}$$

Hierbei stellen die mit geschweiften Klammern dargestellten Ausdrücke erneut Integraloperatoren dar. Diese ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_J^2\{\boldsymbol{J}_s\}(\vec{r}) &= \iint_{\mathrm{Ls}} \underline{G}_{AJ}^2(\vec{r};\vec{r}\,') \cdot \boldsymbol{J}_s(\vec{r}\,')\mathrm{d}S', & (2.18)\\ \phi_J^2\{\boldsymbol{J}_s\}(\vec{r}) &= \frac{j\omega}{k_2^2}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}_J^2\{\boldsymbol{J}_s\}(\vec{r}), & (2.19) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}_M^{2;3}\{\boldsymbol{M}_s\}(\vec{r}) = \iint\limits_{\mathrm{Ap}} \underline{G}_{AM}^{2;3}(\vec{r};\vec{r}') \cdot \boldsymbol{M}_s(\vec{r}')\mathrm{d}S', \tag{2.20}$$

$$\phi_M^{2;3}\{\boldsymbol{M}_s\}(\vec{r}) = \frac{j\omega}{k_{2;3}^2}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}_M^{2;3}\{\boldsymbol{M}_s\}(\vec{r}), \tag{2.21}$$

wobei ferner die Kontinuitätsgleichungen

$$\mathrm{div}_t\,\boldsymbol{J}_s = -j\omega q_s, \tag{2.22}$$

$$\mathrm{div}_t\,\boldsymbol{M}_s = -j\omega q_{ms} \tag{2.23}$$

gelten. Der Index t an den Operatoren weist darauf hin, daß diese in den transversalen Richtungen angewendet werden. Aufgrund der Planarität der hier betrachteten Strukturen sind hier die Bezeichnungen transversal und tangential äquivalent, da die Quellflächen Ls und Ap rein transversal verlaufen. Die Flächenintegrale entsprechen dabei einer Faltungsoperation über dem jeweiligen Quellgebiet. Mit $k_{2;3}$ werden die Wellenzahlen der entsprechenden Medien bezeichnet, die sich über

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{2.24}$$

aus den Materialkonstanten ergeben. Mit $\underline{G}_{AJ}^2$ und $\underline{G}_{AM}^{2;3}$ werden hierbei die Greenschen Dyaden der Vektorpotentiale bezeichnet, während es sich bei q_s und q_{ms} um die Flächenladungsdichten handelt. Die skalaren Potentiale $\phi_{J,M}^{2;3}$ ergeben sich jeweils aus der Lorentz-Eichung der Divergenz des entsprechenden Vektorpotentials. Charakteristisch für diese Darstellung ist die Tatsache, daß jeweils nur die Vektorpotentiale benötigt werden. Setzt man jedoch die Gleichungen (2.19) oder (2.21) in die Gleichungen (2.16) beziehungsweise (2.17) ein, so ergeben sich doppelte Differentialoperatoren. Hierdurch ergeben sich stark singuläre Ausdrücke, die numerisch schwierig zu handhaben sind. Deshalb ist es vorteilhafter, zwei zusätzliche skalare Potentiale einzuführen und die vektoriellen Potentiale entsprechend anzupassen. Die entsprechenden Ausdrücke sind dabei schwächer singulär und können somit leichter behandelt werden.

In diesem Sinne sollen nun die Integralgleichungen in die Mischpotentialform gebracht werden, die sich durch das Vorhandensein vektorieller und skalarer Potentiale auszeichnet. Hierzu wird zunächst die Gleichung (2.18) in die Gleichung (2.19) eingesetzt:

$$\begin{aligned}\phi_J^2\{\boldsymbol{J}_s\}(\vec{r}) &= \frac{j\omega}{k_2^2}\mathrm{div}\iint\limits_{\mathrm{Ls}} \underline{G}_{AJ}^2(\vec{r};\vec{r}') \cdot \boldsymbol{J}_s(\vec{r}')\mathrm{d}S' \\ &= \frac{j\omega}{k_2^2}\iint\limits_{\mathrm{Ls}} \left[\mathrm{div}\,\underline{G}_{AJ}^2(\vec{r};\vec{r}')\right] \cdot \boldsymbol{J}_s(\vec{r}')\mathrm{d}S'.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Das Ziel liegt nun darin, einen Integralausdruck zu erhalten, der von der Flächenladung q_s abhängt. Dies ist über die Kontinuitätsrelation möglich, wenn man die Divergenzbildung auf $\boldsymbol{J}_s(\vec{r}')$ beziehen kann. Entsprechendes gilt natürlich auch für das skalare Potential aus der magnetischen Flächenstromdichte.

2.1.2 Gestalt der Greenschen Dyaden

Um die Divergenzbildung bezüglich der Dyade auswerten zu können, muß man sich zunächst die Gestalt der Greenschen Dyade in einem geschichteten Medium verdeutlichen. Durch das ineinander Einsetzen der Maxwellschen Gleichungen unter Beachtung der Lorentz-Eichung ergibt sich, daß die Vektorpotentiale innerhalb einer homogenen Schicht die vektorielle Wellengleichung erfüllen. Die Greensche Dyade stellt nun im Sinne des Prinzips der Greenschen Funktionen die Antwort auf eine Anregung mit einer Dirac-Dyade dar. Für die Greensche Dyade des magnetischen Vektorpotentials gilt somit

$$\left(\nabla^2 + k_l^2\right) \underline{G}_{AJ}^l = -\mu_i \underline{I}\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \tag{2.26}$$

wenn die Anregung in der Schicht i erfolgt und die Greensche Dyade in der Schicht l gesucht wird. k_l stellt dabei gemäß der Definition (2.24) die Wellenzahl in der Schicht l dar. Der Quellpunkt befinde sich dabei in der Höhe z' über dem Ursprung, so daß $\vec{r}' = z'\,\hat{z}$ ist. Ferner sei

$$\underline{I} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}$$

die Identitätsdyade, wobei das dyadische Produkt durch Auslassung eines Verknüpfungszeichens zwischen Vektoren angedeutet wird. Die Argumentangaben werden im folgenden zugunsten der Übersichtlichkeit fortgelassen.

Um die Gleichung (2.26) auswerten zu können, untersucht man die jeweiligen Komponenten einzeln. Aufgrund der Rotationssymmetrie sind hierbei nur zwei Anregungsrichtungen zu betrachten: vertikal zur Schichtung und horizontal zu dieser. Wenn man die z-Achse senkrecht zur Schichtung wählt, ergibt sich zunächst bei einer vertikalen Anregung des magnetischen Vektorpotentials, welche einem vertikalen elektrischen Dipol entspricht, das Differentialgleichungssystem laut [11] zu:

$$\left(\nabla^2 + k_l^2\right) G_{AJzz}^l = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad l \neq i \\ -\mu_i \delta(\vec{r} - \vec{r}') & \text{für} \quad l = i \end{cases} . \tag{2.27}$$

Dies bedeutet, daß eine z-gerichtete elektrische Stromdichte nur eine z-Komponente des magnetischen Vektorpotentials erzeugt. Diese z-Komponente ist wegen der Inhomogenität in der Wellengleichung zwingend notwendig, die übrigen Komponenten wurden gleich null gesetzt. Nun ist zu zeigen, daß dies zu einer widerspruchsfreien Lösung führt, unter den Randbedingungen eines geschichteten Mediums. Die Randbedingungen sind, daß die elektrische und die magnetische Tangentialfeldstärke an einer stromfreien Grenzfläche ($z = z_l$) jeweils stetig ineinander übergehen. Unter Beachtung der Tatsache, daß G_{AJzz}^l ja die z-Komponente des magnetischen Vektorpotentials in der l-ten Schicht darstellt, ergibt sich dann mit Hilfe der Gleichung (2.15) für alle $z = z_l$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_t^l &= \boldsymbol{H}_t^{l+1}, \\ \left(\frac{1}{\mu_l} \operatorname{rot} G_{AJzz}^l \hat{z}\right)_t &= \left(\frac{1}{\mu_{l+1}} \operatorname{rot} G_{AJzz}^{l+1} \hat{z}\right)_t, \\ -\frac{1}{\mu_l}\frac{\partial G_{AJzz}^l}{\partial y}\hat{x} + \frac{1}{\mu_l}\frac{\partial G_{AJzz}^l}{\partial x}\hat{y} &= -\frac{1}{\mu_{l+1}}\frac{\partial G_{AJzz}^{l+1}}{\partial y}\hat{x} + \frac{1}{\mu_{l+1}}\frac{\partial G_{AJzz}^{l+1}}{\partial x}\hat{y}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Zylindersymmetrie sind die Ableitungen nach x und y identisch, so daß sich als Randbedingung

$$\frac{1}{\mu_l} G^l_{AJzz} = \frac{1}{\mu_{l+1}} G^{l+1}_{AJzz} \tag{2.28}$$

für alle $z = z_l$ ergibt, sofern man die Integrationskonstanten ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich null setzt. Aus der Forderung der Stetigkeit des elektrischen Tangentialfeldes ergibt sich mit Hilfe der Gleichung (2.14) für alle $z = z_l$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^l_t &= \boldsymbol{E}^{l+1}_t, \\ \vec{0} - \left\{\mathrm{grad}\left[\frac{j\omega}{k_l^2}\mathrm{div}\left(G^l_{AJzz}\hat{z}\right)\right]\right\}_t &= \vec{0} - \left\{\mathrm{grad}\left[\frac{j\omega}{k_{l+1}^2}\mathrm{div}\left(G^{l+1}_{AJzz}\hat{z}\right)\right]\right\}_t, \\ \frac{1}{k_l^2}\frac{\partial^2 G^l_{AJzz}}{\partial x \partial z}\hat{x} + \frac{1}{k_l^2}\frac{\partial^2 G^l_{AJzz}}{\partial y \partial z}\hat{y} &= \frac{1}{k_{l+1}^2}\frac{\partial^2 G^{l+1}_{AJzz}}{\partial x \partial z}\hat{x} + \frac{1}{k_{l+1}^2}\frac{\partial^2 G^{l+1}_{AJzz}}{\partial y \partial z}\hat{y}, \end{aligned}$$

Wegen der Zylindersymmetrie sind erneut die Ableitungen nach x und y gleich, so daß sich

$$\frac{1}{k_l^2}\frac{\partial G^l_{AJzz}}{\partial z} = \frac{1}{k_{l+1}^2}\frac{\partial G^{l+1}_{AJzz}}{\partial z} \tag{2.29}$$

für alle $z = z_l$ ergibt, sofern man die entsprechenden Integrationskonstanten erneut zu null setzt. Definiert man nun die zweidimensionale Fouriertransformation einer Funktion $f(x; y)$ durch

$$\mathcal{F}\{f(x;y)\}(k_x;k_y) = \tilde{f}(k_x;k_y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x;y)\mathrm{e}^{j(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.30}$$

und deren Inverse durch

$$\mathcal{F}^{-1}\{f(k_x;k_y)\}(x;y) = f(x;y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_x;k_y)\mathrm{e}^{-j(xk_x + yk_y)}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y, \tag{2.31}$$

so ergibt die Fouriertransformation der partiellen Differentialgleichungen (2.27) die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + k_{zl}^2\right)\tilde{G}^l_{AJzz} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad l \neq i \\ -\mu_i\delta(z - z') & \text{für} \quad l = i \end{cases}, \tag{2.32}$$

wobei $k_{zl}^2 = k_l^2 - k_t^2$ mit $k_t^2 = k_x^2 + k_y^2$ ist. Hierbei wurde

$$\mathcal{F}\{\nabla^2\Box\}(k_x;k_y;z) = (-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2})\mathcal{F}\{\Box\}(k_x;k_y;z) \tag{2.33}$$

verwendet, wobei angenommen wird, daß der Ausdruck $\Box$ von x, y und z abhängt. Durch Anwendung der Randbedingungen (2.28) und (2.29) im Fourierbereich und unter Beachtung der Ausstrahlungsbedingung, lassen sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen (2.32) lösen. Unter Beachtung der Rotationssymmetrie ergibt sich aus der Gesamtlösung für alle Schichten

$$\tilde{G}_{AJzz} = \tilde{G}_{AJvv}(k_t; z; z')$$

im Fourierbereich dann die Lösung im Ortsbereich für den gesamten Raum zu:

$$\begin{aligned} G_{AJzz}(\vec{r};\vec{r}') &= \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{G}_{AJvv}(k_t;z;z')\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \tilde{G}_{AJvv}(k_t;z;z')\mathrm{J}_0(k_t\varrho)k_t\,\mathrm{d}k_t, \end{aligned} \tag{2.34}$$

wobei J_0 die Besselfunktion nullter Ordnung ist und wegen der Rotationssymmetrie die Zusammenhänge

$$x = \varrho\cos\varphi \tag{2.35}$$

$$y = \varrho\sin\varphi \tag{2.36}$$

und

$$k_x = k_t\cos\alpha \tag{2.37}$$

$$k_y = k_t\sin\alpha \tag{2.38}$$

gelten. Mit Hilfe dieser Zusammenhänge geht die inverse Fouriertransformation mittels der Integraldarstellung der Besselfunktion in den obigen Ausdruck über.

Nun soll die Anregung in horizontaler Richtung erfolgen; dieses entspricht dem Wirken eines horizontalen elektrischen Dipols. Analog zur vorherigen Vorgehensweise soll zunächst angenommen werden, daß das magnetische Vektorpotential einer solchen Anregung nur eine x-Komponente enthält, wenn die Anregung in dieser Richtung erfolgt. Die Existenz der x-Komponente folgt aus dem Differentialgleichungssystem

$$\left(\nabla^2 + k_l^2\right) G^l_{AJxx} = \begin{cases} 0 & \text{für } \; l \neq i \\ -\mu_i\delta(\vec{r}-\vec{r}') & \text{für } \; l = i \end{cases} . \tag{2.39}$$

Es zeigt sich jedoch, daß die Randbedingungen mit nur einer Komponente in diesem Fall nicht erfüllt werden können. Die Randbedingungen der elektrischen Tangentialfeldstärke ergeben sich dem obigen Vorgehen entsprechend für alle $z = z_l$ zu:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{E}^l_t = \boldsymbol{E}^{l+1}_t, \\ \left\{-j\omega G^l_{AJxx}\hat{x} - \operatorname{grad}\left[\tfrac{j\omega}{k_l^2}\operatorname{div}\left(G^l_{AJxx}\hat{x}\right)\right]\right\}_t = \\ \left\{-j\omega G^{l+1}_{AJxx}\hat{x} - \operatorname{grad}\left[\tfrac{j\omega}{k_{l+1}^2}\operatorname{div}\left(G^{l+1}_{AJxx}\hat{x}\right)\right]\right\}_t, \\ \left[G^l_{AJxx} + \tfrac{1}{k_l^2}\tfrac{\partial^2 G^l_{AJxx}}{\partial x^2}\right]\hat{x} + \tfrac{1}{k_l^2}\tfrac{\partial^2 G^l_{AJxx}}{\partial y\partial x}\hat{y} = \\ \left[G^{l+1}_{AJxx} + \tfrac{1}{k_{l+1}^2}\tfrac{\partial^2 G^{l+1}_{AJxx}}{\partial x^2}\right]\hat{x} + \tfrac{1}{k_{l+1}^2}\tfrac{\partial^2 G^{l+1}_{AJxx}}{\partial y\partial x}\hat{y}, \end{gathered}$$

wobei erneut die Definition (2.24) verwendet wurde. Die letzte Gleichung enthält offenbar einen Widerspruch, da ihre Erfüllung nur möglich ist, wenn $k_l^2 = k_{l+1}^2$ gilt, was im allgemeinen jedoch nicht der Fall ist. Um die Randbedingungen zu erfüllen, nimmt man nun ferner die Existenz einer zusätzlichen z-Komponente an. Für diese ergeben sich die zusätzlichen Differentialgleichungen:

$$\left(\nabla^2 + k_l^2\right) G^l_{AJzx} = 0. \tag{2.40}$$

Die Randbedingungen des elektrischen Feldes ergeben dann für alle $z = z_l$ zu:

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{E}_t^l = \boldsymbol{E}_t^{l+1}, \\
\left\{-j\omega G_{AJxx}^l\hat{x} - j\omega G_{AJzx}^l\hat{z} - \text{grad}\left[\tfrac{j\omega}{k_l^2}\text{div}\left(G_{AJxx}^l\hat{x} + G_{AJzx}^l\hat{z}\right)\right]\right\}_t = \\
\left\{-j\omega G_{AJxx}^{l+1}\hat{x} - j\omega G_{AJzx}^{l+1}\hat{z} - \text{grad}\left[\tfrac{j\omega}{k_{l+1}^2}\text{div}\left(G_{AJxx}^{l+1}\hat{x} + G_{AJzx}^{l+1}\hat{z}\right)\right]\right\}_t, \\
\left[G_{AJxx}^l + \tfrac{1}{k_l^2}\left(\tfrac{\partial^2 G_{AJxx}^l}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 G_{AJzx}^l}{\partial x \partial z}\right)\right]\hat{x} + \tfrac{1}{k_l^2}\left(\tfrac{\partial^2 G_{AJxx}^l}{\partial y \partial x} + \tfrac{\partial^2 G_{AJzx}^l}{\partial y \partial z}\right)\hat{y} = \\
\left[G_{AJxx}^{l+1} + \tfrac{1}{k_{l+1}^2}\left(\tfrac{\partial^2 G_{AJxx}^{l+1}}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 G_{AJzx}^{l+1}}{\partial x \partial z}\right)\right]\hat{x} + \tfrac{1}{k_{l+1}^2}\left(\tfrac{\partial^2 G_{AJxx}^{l+1}}{\partial y \partial x} + \tfrac{\partial^2 G_{AJzx}^{l+1}}{\partial y \partial z}\right)\hat{y}.
\end{gathered}
$$

Die letzten Gleichungen können mit den Randbedingungen

$$
G_{AJxx}^l = G_{AJxx}^{l+1}, \tag{2.41}
$$

$$
\frac{1}{k_l^2}\left(\frac{\partial G_{AJxx}^l}{\partial x} + \frac{\partial G_{AJzx}^l}{\partial z}\right) = \frac{1}{k_{l+1}^2}\left(\frac{\partial G_{AJxx}^{l+1}}{\partial x} + \frac{\partial G_{AJzx}^{l+1}}{\partial z}\right) \tag{2.42}
$$

für alle $z = z_l$ erfüllt werden, sofern man annimmt, daß diese Gleichungen in der gesamten Grenzfläche gelten sollen. Aus der Stetigkeit der magnetischen Tangentialfeldstärke bezüglich z ergibt sich nun ebenfalls für alle $z = z_l$:

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{H}_t^l = \boldsymbol{H}_t^{l+1}, \\
\left[\tfrac{1}{\mu_l}\text{rot}\left(G_{AJxx}^l\hat{x} + G_{AJzx}^l\hat{z}\right)\right]_t = \left[\tfrac{1}{\mu_{l+1}}\text{rot}\left(G_{AJxx}^{l+1}\hat{x} + G_{AJzx}^{l+1}\hat{z}\right)\right]_t, \\
\tfrac{1}{\mu_l}\left[-\tfrac{\partial G_{AJzx}^l}{\partial y}\hat{x} + \left(\tfrac{\partial G_{AJzx}^l}{\partial x} - \tfrac{\partial G_{AJxx}^l}{\partial z}\right)\hat{y}\right] = \\
\tfrac{1}{\mu_{l+1}}\left[-\tfrac{\partial G_{AJzx}^{l+1}}{\partial y}\hat{x} + \left(\tfrac{\partial G_{AJzx}^{l+1}}{\partial x} - \tfrac{\partial G_{AJxx}^{l+1}}{\partial z}\right)\hat{y}\right].
\end{gathered}
$$

Die letzteren Gleichungen werden durch die Randbedingungen

$$
\frac{1}{\mu_l}G_{AJzx}^l = \frac{1}{\mu_{l+1}}G_{AJzx}^{l+1}, \tag{2.43}
$$

$$
\frac{1}{\mu_l}\frac{\partial G_{AJxx}^l}{\partial z} = \frac{1}{\mu_{l+1}}\frac{\partial G_{AJxx}^{l+1}}{\partial z} \tag{2.44}
$$

für alle $z = z_l$ erfüllt, unter der Annahme, daß diese Gleichungen in der gesamten Grenzfläche gelten.

Transformiert man nun die Gleichungen (2.39) und (2.40) in den Fourierbereich, so erhält man

$$
\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + k_{zl}^2\right)\tilde{G}_{AJxx}^l = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad l \neq i \\ -\mu_i\delta(z-z') & \text{für} \quad l = i \end{cases}, \tag{2.45}
$$

$$
\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + k_{zl}^2\right)\tilde{G}_{AJzx}^l = 0. \tag{2.46}
$$

Hierbei wurde erneut $k_{zl}^2 = k_l^2 - k_t^2$ mit $k_t^2 = k_x^2 + k_y^2$ angesetzt, nachdem die Formel (2.33) angewendet wurde. Das gewöhnliche Differentialgleichungssystem (2.45) kann nun mit den

Randbedingungen (2.41) und (2.44) gelöst werden. Als Gesamtlösung für alle Schichten ergebe sich im Fourierbereich

$$\tilde{G}_{AJxx} = \tilde{G}_{AJhh}(k_t; z; z'),$$

woraus sich schließlich, unter Verwendung der Definitionen (2.35) bis (2.38),

$$\begin{aligned} G_{AJxx}(\vec{r}; \vec{r}') &= \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{G}_{AJhh}(k_t; z; z')\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \tilde{G}_{AJhh}(k_t; z; z')\mathrm{J}_0(k_t\varrho)k_t\,\mathrm{d}k_t, \end{aligned} \tag{2.47}$$

ergibt. Die Lösung des homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems (2.46) verläuft unter Beachtung der Randbedingungen (2.42) und (2.43) ähnlich. Es ist nur zu beachten, daß die Randbedingungen (2.42) Ableitungen nach x enthalten, so daß sich deren Fouriertransformierte zu

$$jk_x\left(\frac{k_{l+1}^2}{k_l^2} - 1\right)\tilde{G}^l_{AJxx} = \frac{k_{l+1}^2}{k_l^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tilde{G}^l_{AJzx} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tilde{G}^{l+1}_{AJzx} \tag{2.48}$$

ergeben. Hiermit ist es naheliegend, die Lösung im Fourierbereich in der Form

$$\tilde{G}_{AJzx} = -jk_x\tilde{G}_{AJvh}(k_t; z; z'),$$

zu schreiben. Im Ortsbereich ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} G_{AJzx}(\vec{r}; \vec{r}') &= \mathcal{F}^{-1}\{-jk_x\tilde{G}_{AJvh}(k_t; z; z')\} \\ &= \cos\varphi\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \tilde{G}_{AJvh}(k_t; z; z')\mathrm{J}_1(k_t\varrho)k_t^2\,\mathrm{d}k_t, \end{aligned} \tag{2.49}$$

wobei erneut die Definitionen (2.35) bis (2.38) gelten.

Für einen anregenden horizontalen elektrischen Dipol in y-Richtung gilt im Prinzip die gleiche Herleitung wie zuvor, es ist jeweils nur die Bezeichnung x durch die Bezeichnung y zu ersetzen:

$$G_{AJyy}(\vec{r}; \vec{r}') = G_{AJxx}(\vec{r}; \vec{r}'), \tag{2.50}$$

$$G_{AJzy}(\vec{r}; \vec{r}') = \mathcal{F}^{-1}\{-jk_y\tilde{G}_{AJvh}(k_t; z; z')\}. \tag{2.51}$$

Bei der Rücktransformation in der letzten Gleichung erhält man einen Ausdruck, der dem in Gleichung (2.49) entspricht, wenn man $\cos\varphi$ durch $\sin\varphi$ ersetzt.

Nun kann man die Gestalt der Greensche Dyade eines horizontal geschichteten Mediums für einen beliebigen Verlauf der elektrischen Stromdichte angeben, indem man die magnetischen Vektorpotentiale des vertikalen und der beiden horizontalen elektrischen Dipole addiert:

$$\underline{G}_{AJ}(\vec{r}; \vec{r}') = (\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y})G_{AJxx} + \hat{z}\hat{x}G_{AJzx} + \hat{z}\hat{y}G_{AJzy} + \hat{z}\hat{z}G_{AJzz}. \tag{2.52}$$

Substitutionsschema										
	elektr. $\rightarrow$ magnet.					magnet. $\rightarrow$ elektr.				
ursprünglich:	E	D	J	q	ε	H	B	M	q_m	μ
ersetzbar durch:	H	B	M	q_m	μ	$-E$	$-D$	$-J$	$-q$	ε

Tabelle 1: Formulierung eines analogen elektromagnetischen Problems

Wegen der Symmetrie der Maxwellschen Gleichungen (2.1) bis (2.4) erhält man ebenfalls eine physikalische Lösung eines elektromagnetischen Problems, wenn man die elektrischen und die magnetischen Größen gemäß der Tabelle 1 miteinander vertauscht. Auf diese Weise erhält man also die Greensche Dyade der magnetische Stromdichte in der Gestalt:

$$\underline{G}_{AM}(\vec{r};\vec{r}') = (\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y})G_{AMxx} + \hat{z}\hat{x}G_{AMzx} + \hat{z}\hat{y}G_{AMzy} + \hat{z}\hat{z}G_{AMzz}. \tag{2.53}$$

Neben diesen Formen der Greenschen Dyaden existieren auch noch andere Darstellungen, die jedoch hier nicht weiter betrachtet werden sollen.

2.1.3 Integralgleichungen in Mischpotentialform

Nun wird erneut die Gleichung (2.25) betrachtet. Ziel ist es, diese so umzuformen, daß die Divergenz vor der Flächenstromdichte steht. Dies hat den Vorteil, daß die Divergenzoperation letztlich auf die Basisfunktionen der Flächenstromdichte anzuwenden ist, was analytisch geschehen kann. Um den Differentialoperator von Aufpunkt- in Quellpunktkoordinaten zu übertragen, wählt man in der Schicht l den Ansatz[2]

$$\frac{j\omega}{k_l^2}\operatorname{div}\underline{G}^l_{AJ}(\vec{r};\vec{r}') = \frac{1}{j\omega}\operatorname{grad}' K^l_{\phi J}(\vec{r};\vec{r}') + j\omega \boldsymbol{P}^l_J(\vec{r};\vec{r}'), \tag{2.54}$$

wobei der Korrekturvektor $\boldsymbol{P}^l_J$ noch zu bestimmen ist. Nimmt man eine beliebige, geschlossene Quellfläche S an, so ergibt sich mit diesem Ansatz dann das skalare Potential in der Schicht l als Summe über die Beiträge der einzelnen Quellschichten i zu:

$$\begin{aligned}
\phi^l_J(\vec{r}) &= \sum_i \left\{ \frac{j\omega}{k_l^2} \iint\limits_{S_i} \left[\operatorname{div}\underline{G}^l_{AJ}(\vec{r};\vec{r}')\right] \cdot \boldsymbol{J}_s(\vec{r}')\mathrm{d}S' \right\} \\
&= \sum_i \left\{ \iint\limits_{S_i} \frac{1}{j\omega} \left[\operatorname{grad}' K^l_{\phi J}(\vec{r};\vec{r}')\right] \cdot \boldsymbol{J}_s(\vec{r}')\mathrm{d}S' + \iint\limits_{S_i} j\omega \boldsymbol{P}^l_J(\vec{r};\vec{r}') \cdot \boldsymbol{J}_s(\vec{r}')\mathrm{d}S' \right\} \\
&= \sum_i \left\{ j\omega \iint\limits_{S_i} \boldsymbol{P}^l_J(\vec{r};\vec{r}') \cdot \boldsymbol{J}_s(\vec{r}')\mathrm{d}S' + \iint\limits_{S_i} K^l_{\phi J}(\vec{r};\vec{r}')\, q_s(\vec{r}')\,\mathrm{d}S' \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{j\omega} \iint\limits_{S_i} \operatorname{div}'_S \left[K^l_{\phi J}(\vec{r};\vec{r}')\boldsymbol{J}_s(\vec{r}')\right] \mathrm{d}S' \right\},
\end{aligned}$$

[2] siehe [14]

wobei die Beziehung

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}'_S K_{\phi J}\boldsymbol{J}_s &= \nabla'_S \cdot (K_{\phi J}\boldsymbol{J}_s) \\
&= \nabla'_S \cdot \dot{K}_{\phi J}\boldsymbol{J}_s + \nabla'_S \cdot K_{\phi J}\dot{\boldsymbol{J}}_s \\
&= \boldsymbol{J}_s \cdot \nabla'_S K_{\phi J} + K_{\phi J}\nabla'_S \cdot \boldsymbol{J}_s \\
&= \boldsymbol{J}_s \cdot \nabla' K_{\phi J} + K_{\phi J}\nabla'_S \cdot \boldsymbol{J}_s \\
&= \boldsymbol{J}_s \cdot \operatorname{grad}' K_{\phi J} + K_{\phi J}\operatorname{div}'_S \boldsymbol{J}_s
\end{aligned} \tag{2.55}$$

rückwärts angewendet wurde und die Kontinuitätsgleichung (2.22) zum Einsatz kam. Der Index S zeigt dabei an, daß der jeweilige Operator nur tangential zur Fläche S interpretiert wird. Durch die Umformung des Divergenzintegrals mit dem Satz von Gauß, erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
\phi^l_J(\vec{r}) = \sum_i \Bigg\{ & j\omega \iint\limits_{S_i} \boldsymbol{P}^l_J(\vec{r};\vec{r}\,') \cdot \boldsymbol{J}_s(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}S' + \iint\limits_{S_i} K^l_{\phi J}(\vec{r};\vec{r}\,')\, q_s(\vec{r})\,\mathrm{d}S' \\
& + \frac{1}{j\omega}\Bigg[\oint\limits_{\partial S_i} K^l_{\phi J}(\vec{r};\vec{r}\,')\boldsymbol{J}_s(\vec{r}\,') \cdot \hat{u}_i\,\mathrm{d}s' - \oint\limits_{\partial S_{i+1}} K^l_{\phi J}(\vec{r};\vec{r}\,')\boldsymbol{J}_s(\vec{r}\,') \cdot \hat{u}_{i+1}\,\mathrm{d}s' \Bigg]\Bigg\},
\end{aligned} \tag{2.56}$$

wobei ∂S_i und ∂S_{i+1} den Rand des Quellflächenanteils in der Schicht i darstellen. Die geschlossene Kurve ∂S_i resultiert zum Beispiel aus dem Schnitt der geschlossenen Quellfläche S mit der Grenzfläche zwischen den Schichten i und $(i-1)$. Der Umlaufsinn ist in allen Fällen rechtssinnig zur z-Richtung. Liegt eine nicht geschlossene Quellfläche vor, so ergeben sich auf den Grenzflächen Linienintegrale, deren Endpunkte über weitere Linienintegrale verbunden sind, die die Schicht i durchlaufen. Da die letzteren Linienintegrale entlang des Randes von S verlaufen, ergeben diese Null, da kein Stromfluß durch den Rand auftritt. Es verbleiben auch dann also nur die Integrale auf den Grenzflächen. Der Einheitsvektor $\hat{u}_i$ steht dabei senkrecht auf ∂S_i, liegt in der Fläche S und zeigt aus der Schicht i heraus. Für die Wirkung der magnetischen Flächenstromdichte kann man in gleicher Weise einen ähnlichen Ausdruck finden:

$$\begin{aligned}
\phi^l_M(\vec{r}) = \sum_i \Bigg\{ & j\omega \iint\limits_{S_i} \boldsymbol{P}^l_M(\vec{r};\vec{r}\,') \cdot \boldsymbol{M}_s(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}S' + \iint\limits_{S_i} K^l_{\phi M}(\vec{r};\vec{r}\,')\, q_{ms}(\vec{r})\,\mathrm{d}S' \\
& + \frac{1}{j\omega}\Bigg[\oint\limits_{\partial S_i} K^l_{\phi M}(\vec{r};\vec{r}\,')\boldsymbol{M}_s(\vec{r}\,') \cdot \hat{u}_i\,\mathrm{d}s' - \oint\limits_{\partial S_{i+1}} K^l_{\phi M}(\vec{r};\vec{r}\,')\boldsymbol{M}_s(\vec{r}\,') \cdot \hat{u}_{i+1}\,\mathrm{d}s' \Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Um mit dieser Darstellung weiter arbeiten zu können, sind nun die $K_{\phi J,M}$ und die $P_{J,Mx}$, $P_{J,My}$ und $P_{J,Mz}$ zu bestimmen. Hierzu transformiert man zum Beispiel die Gleichung (2.54) komponentenweise in den Fourierbereich:

$$\frac{j\omega}{k_l^2}\left(-jk_x\tilde{G}^l_{AJxx} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tilde{G}^l_{AJzx}\right) = \frac{1}{j\omega} jk_x\tilde{K}^l_{\phi J} + j\omega\tilde{P}^l_{Jx}, \tag{2.58}$$

$$\frac{j\omega}{k_l^2}\left(-jk_y\tilde{G}^l_{AJxx} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tilde{G}^l_{AJzy}\right) = \frac{1}{j\omega} jk_y\tilde{K}^l_{\phi J} + j\omega\tilde{P}^l_{Jy}, \tag{2.59}$$

$$\frac{j\omega}{k_l^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tilde{G}^l_{AJzz} = \frac{1}{j\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z'}\tilde{K}^l_{\phi J} + j\omega\tilde{P}^l_{Jz}. \tag{2.60}$$

Hierbei wurde der Quellpunkt wieder als auf der z-Achse positioniert angenommen. Ferner wurde beachtet, daß wegen der Homogenität der Medien in horizontaler Richtung

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\varrho}} G(\vec{r};\vec{r}') = -\frac{\partial}{\partial \hat{\varrho}'} G(\vec{r};\vec{r}') \tag{2.61}$$

gelten muß, wobei $\hat{\varrho}$ ein beliebiger Einheitsvektor in horizontaler Richtung sei. Da mit den Gleichungen (2.58) bis (2.60) nur drei Gleichungen für vier Unbekannte vorliegen, kann man einige Größen willkürlich festlegen, sofern keine Widersprüche entstehen. Hieraus sieht man, daß eine Vielzahl an Mischpotentialformen möglich ist. Im folgenden sei

$$\tilde{P}^l_{Jx} = \tilde{P}^l_{Jy} = 0$$

festgelegt. Diese Definition entspricht der Formulierung C in [14]. Diese Formulierung hat den Vorteil, daß die Umlaufintegrale oberhalb und unterhalb einer Grenzfläche gleich sind und sich damit in Summe zweier Schichten gegenseitig aufheben. Dies resultiert daraus, daß $K_{\phi J}$ in der Formulierung C bezüglich der Aufpunktposition z und der Quellpunktposition z' an jeder Schichtgrenze stetig ist. Nun kann man die unbekannten Größen aus der bekannten Greenschen Dyade ermitteln. Für die zugehörigen Größen der magnetischen Flächenstromdichte ergeben sich entsprechende Formulierungen.

Führt man nun die dyadischen Kerne

$$\underline{K}^l_{AJ}(\vec{r};\vec{r}') = \underline{G}^l_{AJ}(\vec{r};\vec{r}') + \nabla\, \boldsymbol{P}^l_J(\vec{r};\vec{r}'), \tag{2.62}$$

$$\underline{K}^l_{AM}(\vec{r};\vec{r}') = \underline{G}^l_{AM}(\vec{r};\vec{r}') + \nabla\, \boldsymbol{P}^l_M(\vec{r};\vec{r}') \tag{2.63}$$

ein, wobei man beachte, daß ∇ und $\boldsymbol{P}^l_{J,M}$ über das dyadische Produkt miteinander verknüpft sind, so lassen sich die Integralgleichungen (2.16) und (2.17) durch Einsetzen von (2.56) und (2.57) mit Wahl der entsprechenden Quellflächen in die Mischpotentialform bringen:

$$\hat{n}_{\mathrm{Ls}} \times \left(-j\omega \acute{\boldsymbol{A}}^2_J\{\boldsymbol{J}_s\} - \mathrm{grad}\, \acute{\phi}^2_J\{\boldsymbol{J}_s\} - \frac{1}{\varepsilon_2}\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}^2_M\{\boldsymbol{M}_s\}\right) = -\hat{n}_{\mathrm{Ls}} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}, \tag{2.64}$$

$$\hat{n}_{\mathrm{Ap}} \times \left(\frac{1}{\mu_2}\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}^2_J\{\boldsymbol{J}_s\} - j\omega \acute{\boldsymbol{A}}^2_M\{\boldsymbol{M}_s\} - \mathrm{grad}\, \acute{\phi}^2_M\{\boldsymbol{M}_s\}\right) = \hat{n}_{\mathrm{Ap}} \times \left(-j\omega \acute{\boldsymbol{A}}^3_M\{-\boldsymbol{M}_s\} - \mathrm{grad}\, \acute{\phi}^3_M\{-\boldsymbol{M}_s\}\right). \tag{2.65}$$

Hierbei stellen die mit geschweiften Klammern dargestellten Ausdrücke erneut Integraloperatoren dar. Diese ergeben sich unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichungen (2.22) und (2.23) zu:

$$\acute{\boldsymbol{A}}^2_J\{\boldsymbol{J}_s\}(\vec{r}) = \iint_{\mathrm{Ls}} \underline{K}^2_{AJ}(\vec{r};\vec{r}') \cdot \boldsymbol{J}_s(\vec{r}')\mathrm{d}S', \tag{2.66}$$

$$\acute{\phi}^2_J\{\boldsymbol{J}_s\}(\vec{r}) = \iint_{\mathrm{Ls}} K^2_{\phi J}(\vec{r};\vec{r}')\, q_s(\vec{r}')\, \mathrm{d}S', \tag{2.67}$$

$$\acute{\boldsymbol{A}}^{2;3}_M\{\boldsymbol{M}_s\}(\vec{r}) = \iint_{\mathrm{Ap}} \underline{K}^{2;3}_{AM}(\vec{r};\vec{r}') \cdot \boldsymbol{M}_s(\vec{r}')\mathrm{d}S', \tag{2.68}$$

$$\acute{\phi}^{2;3}_M\{\boldsymbol{M}_s\}(\vec{r}) = \iint_{\mathrm{Ap}} K^{2;3}_{\phi M}(\vec{r};\vec{r}')\, q_{ms}(\vec{r}')\, \mathrm{d}S', \tag{2.69}$$

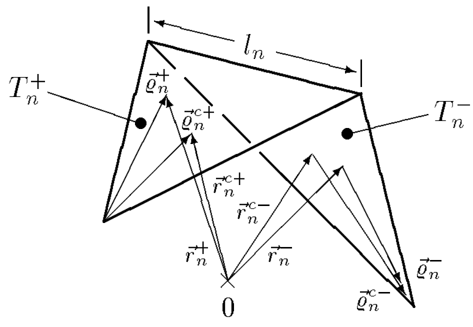


Abbildung 2: Einer inneren Kante n zugeordnete Dreiecke und Vektoren

wobei weiterhin die Gleichungen (2.18) und (2.20) gelten. Die neu eingeführten dyadischen Kerne besitzen laut den Gleichungen (2.62) beziehungsweise (2.63) zusätzliche Einträge zur jeweiligen Greenschen Dyade und haben somit die Gestalt:

$$\underline{K}_A(\vec{r};\vec{r}\,') = (\hat{x}\hat{x}+\hat{y}\hat{y})K_{Axx} + \hat{x}\hat{z}K_{Axz} + \hat{y}\hat{z}K_{Ayz} + \hat{z}\hat{x}K_{Azx} + \hat{z}\hat{y}K_{Azy} + \hat{z}\hat{z}K_{Azz}. \quad (2.70)$$

Die erhaltenen Integralgleichungen (2.64) und (2.65) in Mischpotentialform sollen nun mittels der Momentenmethode gelöst werden.

2.2 Anwendung der Momentenmethode

Um die Integralgleichungen (2.64) und (2.65) numerisch lösen zu können, muß zunächst das Lösungsgebiet, der Träger der Flächenströme, diskretisiert werden. Dies geschieht hier durch eine approximative Unterteilung in Dreiecksflächen. Da die Träger der Flächenströme im hier betrachteten Fall räumlich nicht geschlossene, ebene Flächen darstellen, besitzt das erzeugte Dreiecksnetz innere und äußere Kanten. Dabei ist zu beachten, daß durch die äußeren Kanten kein Stromfluß stattfinden darf, um die Kontinuitätsbedingung zu erfüllen beziehungsweise um das Auftreten von Linienladungen zu vermeiden.

Die Flächenströme selbst werden zur numerischen Lösung gemäß

$$\boldsymbol{J}_s(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{N} I_n \vec{f}_n(\vec{r}), \quad (2.71)$$

$$\boldsymbol{M}_s(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{M} V_n \vec{f}_{N+n}(\vec{r}) \quad (2.72)$$

als eine Summe von gewichteten Basisfunktionen $\vec{f}_n$ angesetzt. Dabei ist N die Anzahl der inneren Kanten im Träger der elektrischen Flächenstromdichte und M die Anzahl der inneren Kanten im Träger der magnetischen Flächenstromdichte; es erfolgt also eine Zuordnung der Basisfunktionen zu den inneren Kanten. Die zur Kante n gehörende

Basisfunktion $\vec{f}_n$ wird dabei als

$$\vec{f}_n(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{2F_n^+}\vec{\varrho}_n^+ & \vec{r} \text{ auf } T_n^+ \\ \frac{l_n}{2F_n^-}\vec{\varrho}_n^- & \vec{r} \text{ auf } T_n^- \\ \vec{0} & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.73}$$

definiert, wobei der Kante n die in der Abbildung 2 dargestellten Größen zugeordnet sind. Mit $F_n^\pm$ sei hier die Fläche des Dreiecks $T_n^\pm$ bezeichnet. Der Vektor der Basisfunktion verläuft also vom Scheitelpunkt des Dreiecks zum Ortspunkt, in welchem dieser ermittelt werden soll, oder umgekehrt, sofern der Ortspunkt in der Dreiecksfläche liegt. Der Normierungsfaktor stellt jeweils sicher, daß der Vektorfluß durch die Kante n linksseitig und rechtsseitig gleich ist, so daß keine Linienladungen auf dieser Kante entstehen können. Die Wahl derartiger Basisfunktionen hat den weiteren Vorteil, daß sich für deren Flächendivergenz ein besonders einfacher Ausdruck ergibt. Zu deren Berechnung geht man in ein Polarkoordinatensystem über, dessen Ursprung im jeweiligen Scheitelpunkt liegt. Im Dreieck T_n^+ ergibt sich damit zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_t\, \vec{f}_n(\vec{r}^+) &= \frac{l_n}{2F_n^+}\mathrm{div}_t\, \vec{\varrho}_n^+ \\ &= \frac{l_n}{2F_n^+}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\varrho\varrho + 0\right)\bigg|_{\varrho=\varrho_n^+} \\ &= \frac{l_n}{F_n^+}. \end{aligned}$$

Entsprechendes ergibt sich auch für das Dreieck T_n^-, so daß sich insgesamt

$$\mathrm{div}_t\vec{f}_n(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{F_n^+} & \vec{r} \text{ auf } T_n^+ \\ -\frac{l_n}{F_n^-} & \vec{r} \text{ auf } T_n^- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.74}$$

ergibt. Damit ist die Flächenladungsdichte auf einer Dreiecksfläche konstant und die Gesamtladung eines Dreieckspaares mit gemeinsamer Kante ist Null. Die Konstanz der Flächenladungsdichte bleibt auch erhalten, wenn man berücksichtigt, daß zu einer Dreiecksfläche maximal drei Basisfunktionen einen Beitrag liefern können; aufgrund dessen können jedoch die einzelnen Dreiecke insgesamt betragsmäßig unterschiedlich große Ladungen besitzen.

Um die Momentenmethode im Sinne der Methode von Galerkin anzuwenden, sei hier über

$$\left\langle \vec{f}, \vec{g} \right\rangle_S = \iint_S \vec{f}\cdot\vec{g}\,\mathrm{d}S \tag{2.75}$$

ein inneres Produkt definiert. Häufig wird, in Anlehnung an das Skalarprodukt im Hilbertraum und die Orthogonalitätsrelation komplexer Größen, das innere Produkt auch durch $\langle \vec{f}, \vec{g}^* \rangle_S$ definiert. Dies führt hier jedoch zu keiner grundsätzlichen Änderung, da die Basisfunktionen sowieso reell definiert wurden.

Nun werden die Integralgleichungen (2.64) und (2.65) den Ansätzen (2.71) und (2.72) unterworfen. Aufgrund der Linearität werden die Summenzeichen und die Gewichte aus den Integraloperatoren herausgezogen, so daß sich

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\Big(-j\omega\hat{n}_{\mathrm{Ls}}\times\acute{\boldsymbol{A}}_J^2\{\vec{f}_n\}-\hat{n}_{\mathrm{Ls}}\times\operatorname{grad}\acute{\phi}_J^2\{\vec{f}_n\}\Big)\,I_n&\\ +\sum_{n=1}^{M}\Big(-\frac{1}{\varepsilon_2}\hat{n}_{\mathrm{Ls}}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_M^2\{\vec{f}_{N+n}\}\Big)\,V_n &= -\hat{n}_{\mathrm{Ls}}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}\end{aligned}\tag{2.76}$$

und

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{M}\Big(-j\omega\hat{n}_{\mathrm{Ap}}\times\acute{\boldsymbol{A}}_M^2\{\vec{f}_{N+n}\}-\hat{n}_{\mathrm{Ap}}\times\operatorname{grad}\acute{\phi}_M^2\{\vec{f}_{N+n}\}\Big)\,V_n&\\ +\sum_{n=1}^{M}\Big(-j\omega\hat{n}_{\mathrm{Ap}}\times\acute{\boldsymbol{A}}_M^3\{\vec{f}_{N+n}\}-\hat{n}_{\mathrm{Ap}}\times\operatorname{grad}\acute{\phi}_M^3\{\vec{f}_{N+n}\}\Big)\,V_n&\\ +\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\mu_2}\hat{n}_{\mathrm{Ap}}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_J^2\{\vec{f}_n\}I_n &= \vec{0}\end{aligned}\tag{2.77}$$

ergeben, wobei weiterhin für die Integraloperatoren die Gleichungen (2.18), (2.20) und (2.66) bis (2.69) gelten. Nun werden diese Integralgleichungen mit Gewichtsfunktionen ins innere Produkt gesetzt, wobei das innere Produkt jeweils über die Fläche zu bilden ist, auf der die entsprechende Integralgleichung definiert ist: für die Integralgleichung des elektrischen Feldes wäre dies die elektrisch leitende Schicht, für die Integralgleichung des magnetischen Feldes die Apertur. Als Gewichtsfunktionen werden hierbei nach der Methode von Galerkin für die Integralgleichung des elektrischen Feldes die Vektorfunktionen $(\hat{n}_{\mathrm{Ls}}\times\vec{f}_1)$ bis $(\hat{n}_{\mathrm{Ls}}\times\vec{f}_N)$ und für die Integralgleichung des magnetischen Feldes diejenigen von $(\hat{n}_{\mathrm{Ap}}\times\vec{f}_{N+1})$ bis $(\hat{n}_{\mathrm{Ap}}\times\vec{f}_{N+M})$ verwendet. Hierdurch erhält man dann ein lösbares lineares Gleichungssystem mit $(N+M)$ Gleichungen für $(N+M)$ Unbekannte:

$$\underline{A}\cdot\underline{B}=\underline{C},\tag{2.78}$$

wobei für die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix}(d_{n\nu}+e_{n\nu}) & (f_{n\mu})\\ (g_{m\nu}) & (h_{m\mu}+i_{m\mu}+j_{m\mu}+k_{m\mu})\end{pmatrix},\tag{2.79}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix}(I_n)\\ (V_m)\end{pmatrix},\tag{2.80}$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix}(c_n)\\ 0_1\\ \vdots\\ 0_M\end{pmatrix}\tag{2.81}$$

gilt; die Indizes m, μ laufen dabei von 1 bis M und die Indizes n, ν von 1 bis N. Für die Matrixelemente selbst ergibt sich dann unter der Berücksichtigung, daß die Lagrangesche Identität

$$(\hat{n}\times\vec{a})\cdot(\hat{n}\times\vec{f}_k)=(\hat{n}\cdot\hat{n})(\vec{a}\cdot\vec{f}_k)-(\hat{n}\cdot\vec{a})\underbrace{(\vec{f}_k\cdot\hat{n})}_{=0}=\vec{a}\cdot\vec{f}_k$$

gilt, mit der Definition (2.75) schließlich:

$$
\begin{aligned}
c_n &= \langle -\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}, \vec{f}_n \rangle_{\text{Leitungsstreifen}}, && (2.82)\\
d_{n\nu} &= \langle -j\omega \acute{\boldsymbol{A}}_J^2\{\vec{f}_\nu\}, \vec{f}_n \rangle_{\text{Leitungsstreifen}}, && (2.83)\\
e_{n\nu} &= \langle -\operatorname{grad} \acute{\phi}_J^2\{\vec{f}_\nu\}, \vec{f}_n \rangle_{\text{Leitungsstreifen}}, && (2.84)\\
f_{n\mu} &= \left\langle -\frac{1}{\varepsilon_2} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_M^2\{\vec{f}_{N+\mu}\}, \vec{f}_n \right\rangle_{\text{Leitungsstreifen}}, && (2.85)\\
g_{m\nu} &= \left\langle \frac{1}{\mu_2} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_J^2\{\vec{f}_\nu\}, \vec{f}_{N+m} \right\rangle_{\text{Apertur}}, && (2.86)\\
h_{m\mu} &= \langle -j\omega \acute{\boldsymbol{A}}_M^2\{\vec{f}_{N+\mu}\}, \vec{f}_{N+m} \rangle_{\text{Apertur}}, && (2.87)\\
i_{m\mu} &= \langle -\operatorname{grad} \acute{\phi}_M^2\{\vec{f}_{N+\mu}\}, \vec{f}_{N+m} \rangle_{\text{Apertur}}, && (2.88)\\
j_{m\mu} &= \langle -j\omega \acute{\boldsymbol{A}}_M^3\{\vec{f}_{N+\mu}\}, \vec{f}_{N+m} \rangle_{\text{Apertur}}, && (2.89)\\
k_{m\mu} &= \langle -\operatorname{grad} \acute{\phi}_M^3\{\vec{f}_{N+\mu}\}, \vec{f}_{N+m} \rangle_{\text{Apertur}}. && (2.90)
\end{aligned}
$$

Die inneren Produkte, die einen Gradienten enthalten, lassen sich noch weiter umformen gemäß:

$$
\begin{aligned}
\langle \operatorname{grad} \phi, \vec{f}_k \rangle_S &= \iint_S \operatorname{grad}(\phi) \cdot \vec{f}_k \, \mathrm{d}S\\
&= \iint_S \operatorname{div}_S(\phi \vec{f}_k) \, \mathrm{d}S - \iint_S \phi \operatorname{div}_S \vec{f}_k \, \mathrm{d}S\\
&= \oint_{\partial S} \phi \vec{f}_k \cdot \hat{u} \, \mathrm{d}l - \iint_S \phi \operatorname{div}_S \vec{f}_k \, \mathrm{d}S\\
&= -\iint_S \phi \operatorname{div}_S \vec{f}_k \, \mathrm{d}S. && (2.91)
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde die Gleichung (2.55) sinngemäß verwendet, ferner der zweidimensionale Satz von Gauß angewandt sowie beachtet, daß $\vec{f}_k$ keine Komponente senkrecht zum Rand, parallel zu $\hat{u}$, besitzt. Die explizite Berechnung der Matrixelemente erfolgt später.

Aus der aufgestellten problemlösenden Matrizengleichung (2.78) können nun also die Koeffizienten für die Reihenentwicklungen der Flächenstromdichten mit Hilfe der linearen Algebra berechnet werden. Aus den berechneten Flächenstromdichten kann man dann alle weiteren interessierenden Eigenschaften der Anordnung ermitteln.

3 Einführung der äquivalenten Leitungsdarstellung

Nun sind die Greenschen Dyaden explizit zu ermitteln, um die Momentenmethode letztlich anwenden zu können. Hierbei soll die von Felsen in [24] erarbeitete Methode des analogen Leitungsersatzschaltbildes zur Anwendung kommen. Diese geht davon aus, daß man das elektromagnetische Feld in einem ebenen in z-Richtung geschichteten und transversal homogenen Medium als Überlagerung verschiedener Wellenmoden darstellen kann. In diesem Falle ist das elektromagnetische Feld durch die Angabe der skararen Amplituden der einzelnen Moden vollständig charakterisierbar. Für diese skalaren Amplituden kann man dann Leitungsdifferentialgleichungen ableiten, woraus folgt, daß sich die skalaren Amplituden der einzelnen Moden mittels der Leitungstheorie ermitteln lassen, wobei die Eigenschaften des geschichteten Mediums in die Parameter der Leitung eingehen. Letztlich ist es somit möglich, die Greenschen Dyaden des elektromagnetischen Feldes aus den Greenschen Funktionen einer Leitung abzuleiten, was schließlich zur gewünschten Lösung führt.

3.1 Herleitung der Leitungsdifferentialgleichungen für gleichförmige Wellenleiterabschnitte

Im hier ausschließlich betrachteten Fall besteht das Medium des Wellenleiters aus transversal homogenen Schichten, deren Parameter in z-Richtung abschnittsweise konstant sind. Der Wellenleiter ist transversal unbeschränkt und in z-Richtung gegebenenfalls durch elektrisch ideal leitende Schichten begrenzt, wobei eine Wellenausbreitung in z-Richtung angesetzt wird.

3.1.1 Die transversalen Feldgleichungen

Nun sollen zunächst die Beziehungen zwischen den transversalen und den longitudinalen Feldkomponenten ermittelt werden. Hierzu geht man von einem elektromagnetischen Feld aus, dessen Quellen die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{J}(\vec{r})$ und die magnetische Stromdichte $\boldsymbol{M}(\vec{r})$ sind. Die Maxwellschen Gleichungen ergeben sich dann in einer transversal homogenen Schicht zu:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{E}(\vec{r}) &= -j\omega\mu\boldsymbol{H}(\vec{r}) - \boldsymbol{M}(\vec{r}), && (3.1)\\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H}(\vec{r}) &= \quad j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}(\vec{r}) + \boldsymbol{J}(\vec{r}). && (3.2)\end{aligned}$$

Aus der Gleichung (3.1) ergeben sich dann durch die entsprechenden Produktbildungen mit $\hat{z}$:

$$\begin{aligned} j\omega\mu\boldsymbol{H}\times\hat{z} + \boldsymbol{M}\times\hat{z} = \hat{z}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= \operatorname{grad}E_z - \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{E}\\ &= -\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{E}_t + \operatorname{grad}_t E_z, && (3.3)\\ -j\omega\mu H_z - M_z = \hat{z}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\operatorname{div}_t(\hat{z}\times\boldsymbol{E}), && (3.4)\end{aligned}$$

wobei hier mit dem Index t jeweils ein transversaler Operator beziehungsweise Vektor bezeichnet wird. In gleicher Weise ergibt sich dann aus der Gleichung (3.2) ferner:

$$\begin{aligned} j\omega\varepsilon\hat{z}\times\boldsymbol{E} + \hat{z}\times\boldsymbol{J} &= \operatorname{grad}_t H_z - \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{H}_t, && (3.5)\\ j\omega\varepsilon E_z + J_z &= \operatorname{div}_t(\boldsymbol{H}\times\hat{z}). && (3.6)\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von E_z aus der Gleichung (3.6) in die Gleichung (3.3) ergibt sich

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{E}_t &= j\omega\mu\boldsymbol{H}_t \times \hat{z} - \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left[\nabla_t\nabla_t \cdot (\boldsymbol{H}_t \times \hat{z}) - \mathrm{grad}_t J_z\right] + \boldsymbol{M} \times \hat{z} \\ &= j\omega\mu\left(\underline{I} + \frac{\nabla_t\nabla_t}{k^2}\right) \cdot (\boldsymbol{H}_t \times \hat{z}) + \boldsymbol{M}_{te} \times \hat{z}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

sofern man über

$$\boldsymbol{M}_{te} = \boldsymbol{M}_t + \hat{z} \times \frac{\mathrm{grad}_t\, J_z}{j\omega\varepsilon} = \boldsymbol{M}_t - \frac{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{J}_z}{j\omega\varepsilon} \tag{3.8}$$

eine äquivalente transversale magnetische Stromdichte definiert. Mit $\underline{I}$ wird hierbei die Einheitsdyade bezeichnet und die Größe k stellt erneut die über die Gleichung (2.24) definierte Wellenzahl dar. Entsprechend erhält man durch Einsetzen von H_z aus der Gleichung (3.4) in die Gleichung (3.5)

$$-\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{H}_t = j\omega\varepsilon\left(\underline{I} + \frac{\nabla_t\nabla_t}{k^2}\right) \cdot (\hat{z} \times \boldsymbol{E}_t) + \hat{z} \times \boldsymbol{J}_{te} \tag{3.9}$$

mit

$$\boldsymbol{J}_{te} = \boldsymbol{J}_t - \hat{z} \times \frac{\mathrm{grad}_t\, M_z}{j\omega\mu} = \boldsymbol{J}_t + \frac{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M}_z}{j\omega\mu}, \tag{3.10}$$

wobei alle Herleitungen für beliebige z-Abhängigkeiten von ε und μ gelten.

Die transversalen Feldgleichungen (3.7) und (3.9) beschreiben die elektromagnetischen Felder vollständig, da sich die longitudinalen Feldkomponenten mit den Gleichungen (3.4) und (3.6) aus den transversalen Feldkomponenten zu

$$j\omega\varepsilon E_z = \mathrm{div}_t\,(\boldsymbol{H}_t \times \hat{z}) - J_z, \tag{3.11}$$

$$j\omega\mu H_z = \mathrm{div}_t\,(\hat{z} \times \boldsymbol{E}_t) - M_z \tag{3.12}$$

bestimmen lassen.

3.1.2 Modale Darstellung von Feldern und Quellen in homogenen Schichten

Im Sinne der Analogie zur Leitungstheorie werden die einzelnen Schichten des Mediums hier als Wellenleiter betrachtet. Die Lösung des Wellenleiterproblems ergibt sich aus den homogenen Maxwellschen Gleichungen, das heißt, wenn $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{J}$ in den Gleichungen (3.1) und (3.2) gleich null sind. Wenn die z-Komponenten von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ bekannt sind, so kann man aus den Maxwellschen Gleichungen im stromlosen Fall, bei einer angenommenen z-Abhängigkeit der Felder von $\mathrm{e}^{-jk_z z}$, die tangentialen Feldkomponenten eindeutig berechnen. Das gesamte elektromagnetische Feld ergibt sich also aus der linearen Überlagerung des Falles $E_z = 0$, $H_z \neq 0$, der sogenannten H-Welle, und des Falles $H_z = 0$, $E_z \neq 0$, der sogenannten E-Welle. Der gesamte Feldverlauf des E- und des H-Modus läßt sich jedoch auch durch die transversalen Feldkomponenten charakterisieren, da sich die longitudinalen Komponenten aus den Gleichungen (3.11) und (3.12) ergeben. Nach dem

Ansetzen der z-Abhängigkeit zu $\mathrm{e}^{-jk_z z}$, ergibt sich für die transversalen Felder jeweils eine homogene vektorielle Wellengleichung als Eigenwertproblem, wenn man beachtet, daß hierbei für die Größen mit z-Abhängigkeit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}a(z) = -jk_z a(z) \tag{3.13}$$

gilt. Das vektorielle Eigenwertproblem ist innerhalb der Querschnittsfläche S lösbar, sofern die Randwerte gegeben sind beziehungsweise die Ausstrahlungsbedingung gilt. Die resultierenden Eigenlösungen stellen dabei die Modusvektoren dar, in welche man jede beliebige transversale Lösung zerlegen kann. Bei einer endlichen tansversalen Begrenzung ergeben sich zu diskreten Eigenwerten k_{ti}^2 diskrete Eigenlösungen durch Anwendung der entsprechenden Randbedingung, zum Beispiel dem Verschwinden der elektrischen Tangentialfeldstärke. Dem i-ten Eigenwert k_{ti}^2 entspricht dann die longitudinale Wellenzahl k_{zi}, die über

$$k_{zi}^2 + k_{ti}^2 = k^2$$

mit der Wellenzahl k des Mediums zusammenhängt. Bei transversal unendlicher Ausdehnung ergeben sich die kontinuierlichen Eigenwerte k_t^2 und die zugehörigen Eigenlösungen durch Nutzung der Ausstrahlungsbedingung.

Bei der E-Welle sollen die Eigenvektoren des transversalen elektrischen Feldes mit $\boldsymbol{e}_i'(\vec{\varrho})$ und die des magnetischen transversalen Feldes mit $\boldsymbol{h}_i'(\vec{\varrho})$ bezeichnet werden; für die H-Welle gelten entsprechend die Bezeichnungen $\boldsymbol{e}_i''(\vec{\varrho})$ und $\boldsymbol{h}_i''(\vec{\varrho})$, wobei $\vec{\varrho}$ den transversalen Ortsvektor bezeichnet. Im folgenden sollen nun Beziehungen zwischen den $\boldsymbol{e}_i$ und den $\boldsymbol{h}_i$ abgeleitet werden. Hierzu beachtet man, daß sich aus den Gleichungen (3.7) und (3.9) unter Beachtung von Gleichung (3.13)

$$k_z \boldsymbol{E}_t = \omega\mu \left(\underline{I} + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k^2}\right) \cdot (\boldsymbol{H}_t \times \hat{z}), \tag{3.14}$$

$$k_z \boldsymbol{H}_t = \omega\varepsilon \left(\underline{I} + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k^2}\right) \cdot (\hat{z} \times \boldsymbol{E}_t) \tag{3.15}$$

ergeben. Für die E-Wellen gilt ferner per definitionem

$$j\omega\mu H_z = 0 = \mathrm{div}_t(\hat{z} \times \boldsymbol{E}_t), \tag{3.16}$$

womit sich aus der Gleichung (3.15) sofort

$$\boldsymbol{h}_i' = \hat{z} \times \boldsymbol{e}_i' \tag{3.17}$$

ergibt, sofern man hierbei

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_i' &\mathrel{\hat{=}} \boldsymbol{E}_t, \\ Y_i' \boldsymbol{h}_i' &\mathrel{\hat{=}} \boldsymbol{H}_t \end{aligned}$$

mit

$$Y_i' = \frac{\omega\varepsilon}{k_{zi}'} \tag{3.18}$$

setzt. Damit folgen aus den Gleichungen (3.14) und (3.16)

$$\nabla_t \nabla_t \cdot \boldsymbol{e}_i' = -k_{ti}'^2 \boldsymbol{e}_i', \tag{3.19}$$

$$\nabla_t \nabla_t \cdot \boldsymbol{h}_i' = \vec{0}, \tag{3.20}$$

woraus die Modusvektoren unter Beachtung der Randbedingung ermittelt werden können. Für die H-Wellen ergibt sich auf analogem Wege aus der Gleichung (3.11)

$$j\omega\varepsilon E_z = 0 = \mathrm{div}_t(\boldsymbol{H}_t \times \hat{z}) \tag{3.21}$$

und aus der Gleichung (3.14)

$$\boldsymbol{e}_i'' = \boldsymbol{h}_i'' \times \hat{z}. \tag{3.22}$$

Mit

$$Y_i'' = \frac{k_{zi}''}{\omega\mu} \tag{3.23}$$

und

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_i'' &\mathrel{\hat{=}} \boldsymbol{E}_t, \\ Y_i''\boldsymbol{h}_i'' &\mathrel{\hat{=}} \boldsymbol{H}_t \end{aligned}$$

ergeben sich dann aus den Gleichungen (3.15) und (3.21)

$$\nabla_t\nabla_t \cdot \boldsymbol{h}_i'' = -k_{ti}''^2\boldsymbol{h}_i'', \tag{3.24}$$

$$\nabla_t\nabla_t \cdot \boldsymbol{e}_i'' = \vec{0}, \tag{3.25}$$

woraus die Modusvektoren der H-Wellen unter Beachtung der Randbedingung ermittelt werden können.

Ein beliebiges transversales Feld läßt sich nun wie folgt als Linearkombination der einzelnen Modusvektoren darstellen:

$$\boldsymbol{E}_t(\vec{r}) = \sum_i V_i'(z)\boldsymbol{e}_i'(\vec{\varrho}) + \sum_i V_i''(z)\boldsymbol{e}_i''(\vec{\varrho}), \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{H}_t(\vec{r}) = \sum_i I_i'(z)\boldsymbol{h}_i'(\vec{\varrho}) + \sum_i I_i''(z)\boldsymbol{h}_i''(\vec{\varrho}), \tag{3.27}$$

$$\boldsymbol{J}_{te}(\vec{r}) = \sum_i i_i'(z)\boldsymbol{e}_i'(\vec{\varrho}) + \sum_i i_i''(z)\boldsymbol{e}_i''(\vec{\varrho}), \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{M}_{te}(\vec{r}) = \sum_i v_i'(z)\boldsymbol{h}_i'(\vec{\varrho}) + \sum_i v_i''(z)\boldsymbol{h}_i''(\vec{\varrho}). \tag{3.29}$$

Die entsprechenden Longitudinalkomponenten eines beliebigen elektromagnetischen Feldes ergeben sich dabei aus den Gleichungen (3.11) und (3.12) zu:

$$j\omega\varepsilon E_z(\vec{r}) + J_z(\vec{r}) = \sum_i I_i'(z)\mathrm{div}_t\boldsymbol{e}_i'(\vec{\varrho}), \tag{3.30}$$

$$j\omega\mu H_z(\vec{r}) + M_z(\vec{r}) = \sum_i V_i''(z)\mathrm{div}_t\boldsymbol{h}_i''(\vec{\varrho}). \tag{3.31}$$

Hierbei ist anzumerken, daß der Summenoperator $\sum_i$ nur bei endlichen transversalen Abmessungen gilt. Im hier betrachteten Fall einer unendlichen transversalen Ausdehnung geht der Summenoperator in einen Integraloperator über und die Modusvektoren werden zu einem Dichtemaß. Zunächst wird jedoch weiterhin der Einfachheit halber die Summendarstellung verwendet, eine genauere Erörterung dieser Problematik erfolgt später.

Für zwei beliebige transversale Vektorfunktionen $\vec{A}$ und $\vec{B}$ ergibt sich durch Anwendung des zweidimensionalen Gaußschen Satzes

$$\begin{aligned}\iint\limits_S (\vec{A}\cdot\nabla_t\nabla_t\cdot\vec{B}-\vec{B}\cdot\nabla_t\nabla_t\cdot\vec{A})\mathrm{d}S &= \iint\limits_S \nabla_t\cdot(\vec{A}\nabla_t\cdot\vec{B}-\vec{B}\nabla_t\cdot\vec{A})\mathrm{d}S\\ &= \oint\limits_{\partial S}\Big[(\vec{A}\cdot\hat{u})(\nabla_t\cdot\vec{B})-(\vec{B}\cdot\hat{u})(\nabla_t\cdot\vec{A})\Big]\,\mathrm{d}s, \end{aligned}\tag{3.32}$$

was als transversales Greensches Theorem bezeichnet wird. Die Fläche S stellt hierbei den Querschnitt des betrachteten Wellenleiters dar und der nach außen zeigende Einheitsvektor $\hat{u}$ steht senkrecht auf dessen Randkurve. Jenes Theorem kann nun dazu benutzt werden, die Orthogonalität der Modusvektoren zu beweisen.[3] Setzt man ferner die Modusvektoren als geeignet normiert an, so ergeben sich die Orthonormalitätsbeziehungen

$$\iint\limits_S \boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}'^*_j\,\mathrm{d}S=\iint\limits_S \boldsymbol{e}''_i\cdot\boldsymbol{e}''^*_j\,\mathrm{d}S = \delta_{ij},\tag{3.33}$$

$$\iint\limits_S \boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}''^*_j\,\mathrm{d}S = 0,\tag{3.34}$$

$$\iint\limits_S \boldsymbol{h}'_i\cdot\boldsymbol{h}'^*_j\,\mathrm{d}S=\iint\limits_S \boldsymbol{h}''_i\cdot\boldsymbol{h}''^*_j\,\mathrm{d}S = \delta_{ij},\tag{3.35}$$

$$\iint\limits_S \boldsymbol{h}'_i\cdot\boldsymbol{h}''^*_j\,\mathrm{d}S = 0,\tag{3.36}$$

wobei das Kronecker-Delta δ_{ij} durch

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{für}\quad i=j\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\tag{3.37}$$

definiert ist und der Stern das konjugiert Komplexe bezeichnet. Man beachte, daß diese Relation auch die Maßeinheiten der Modusvektoren definiert! Wegen dieser Orthonormalität kann man nun die Koeffizienten der Zerlegungen (3.26) bis (3.29) wie folgt darstellen:

$$V_i(z) = \iint\limits_S \boldsymbol{E}_t(\vec{r})\cdot\boldsymbol{e}^*_i(\vec{\varrho})\,\mathrm{d}S,\tag{3.38}$$

$$v_i(z) = \iint\limits_S \boldsymbol{M}_{te}(\vec{r})\cdot\boldsymbol{h}^*_i(\vec{\varrho})\,\mathrm{d}S,\tag{3.39}$$

$$I_i(z) = \iint\limits_S \boldsymbol{H}_t(\vec{r})\cdot\boldsymbol{h}^*_i(\vec{\varrho})\,\mathrm{d}S,\tag{3.40}$$

$$i_i(z) = \iint\limits_S \boldsymbol{J}_{te}(\vec{r})\cdot\boldsymbol{e}^*_i(\vec{\varrho})\,\mathrm{d}S,\tag{3.41}$$

wobei diese Ausdrücke jeweils für die E- und H-Moden gelten. Dies gilt auch weiterhin, wenn der E- oder H-Modus nicht explizit gekennzeichnet wird. Setzt man nun die

[3] siehe [24]

Gleichungen (3.8) und (3.10) in die Gleichungen (3.39) und (3.41) ein, so erhält man:

$$v_i(z) = \iint_S \boldsymbol{M}(\vec{r}) \cdot \boldsymbol{h}_i^*(\vec{\varrho})\,\mathrm{d}S + \iint_S \left[\hat{z} \times \frac{\mathrm{grad}_t J_z(\vec{r})}{j\omega\varepsilon}\right] \cdot \boldsymbol{h}_i^*(\vec{\varrho})\,\mathrm{d}S, \qquad (3.42)$$

$$i_i(z) = \iint_S \boldsymbol{J}(\vec{r}) \cdot \boldsymbol{e}_i^*(\vec{\varrho})\,\mathrm{d}S + \iint_S \left[-\hat{z} \times \frac{\mathrm{grad}_t M_z(\vec{r})}{j\omega\mu}\right] \cdot \boldsymbol{e}_i^*(\vec{\varrho})\,\mathrm{d}S. \qquad (3.43)$$

Die Integranden der jeweils zweiten Integrale lassen sich nach zyklischer Vertauschung gemäß den Gleichungen (3.17) beziehungsweise (3.22) zu

$$\boldsymbol{e}_i^* \cdot \left(-\hat{z} \times \frac{\mathrm{grad}_t M_z}{j\omega\mu}\right) = \frac{\mathrm{grad}_t M_z}{j\omega\mu} \cdot \boldsymbol{h}_i^* \qquad (3.44)$$

beziehungsweise

$$\boldsymbol{h}_i^* \cdot \left(\hat{z} \times \frac{\mathrm{grad}_t J_z}{j\omega\varepsilon}\right) = \frac{\mathrm{grad}_t J_z}{j\omega\varepsilon} \cdot \boldsymbol{e}_i^* \qquad (3.45)$$

umformen. Wendet man nun auf die modifizierten Integrale die Integrationsregel

$$\iint_S (\nabla_t f) \cdot \vec{A}\,\mathrm{d}S = -\iint_S f\left(\nabla_t \cdot \vec{A}\right)\mathrm{d}S + \oint_{\partial S} f\vec{A} \cdot \hat{u}\,\mathrm{d}s \qquad (3.46)$$

an, welche sich aus der Produktregel und dem zweidimensionalen Gaußschen Satz ergibt, so erhält man

$$v_i(z) = \iint_S \boldsymbol{M}(\vec{r}) \cdot \boldsymbol{h}_i^*(\vec{\varrho})\,\mathrm{d}S + Z_i^* \iint_S \boldsymbol{J}(\vec{r}) \cdot \boldsymbol{e}_{zi}^*(\vec{\varrho})\,\mathrm{d}S, \qquad (3.47)$$

$$i_i(z) = \iint_S \boldsymbol{J}(\vec{r}) \cdot \boldsymbol{e}_i^*(\vec{\varrho})\,\mathrm{d}S + Y_i^* \iint_S \boldsymbol{M}(\vec{r}) \cdot \boldsymbol{h}_{zi}^*(\vec{\varrho})\,\mathrm{d}S, \qquad (3.48)$$

weil die Umlaufintegrale wegen der Randbedingung beziehungsweise der Ausstrahlungsbedingung entfallen, mit

$$Y_i''\boldsymbol{h}_{zi}''(\vec{\varrho}) = \hat{z}\frac{\mathrm{div}_t \boldsymbol{h}_i''(\vec{\varrho})}{j\omega\mu}, \qquad (3.49)$$

$$\boldsymbol{h}_{zi}' = \vec{0}, \qquad (3.50)$$

$$Z_i'\boldsymbol{e}_{zi}'(\vec{\varrho}) = \hat{z}\frac{\mathrm{div}_t \boldsymbol{e}_i'(\vec{\varrho})}{j\omega\varepsilon^*}, \qquad (3.51)$$

$$\boldsymbol{e}_{zi}'' = \vec{0}, \qquad (3.52)$$

wobei $Z_i' = 1/Y_i'$ sei. Man beachte hierbei die Konjugierung der mitunter komplexen elektrischen Feldkonstanten. Die den Modusvektoren zugeordneten z-Komponenten ergeben sich direkt aus den Gleichungen (3.11) und (3.12), wenn man die Beziehungen der Modusvektoren untereinander und zu den Feldstärken beachtet. Bemerkenswert ist, daß in dieser Formulierung keine Ableitungen der Stromdichten auftreten.

Durch Einsetzen der modalen Darstellungen (3.26) bis (3.29) in die transversalen Feldgleichungen (3.7) und (3.9), Vertauschung von Summation und Differentiation, Nutzung der

Gleichungen (3.19), (3.20), (3.24) und (3.25) und Gleichsetzen der jeweiligen Koeffizienten der Modusvektoren $\boldsymbol{e}_i$ und $\boldsymbol{h}_i$, erhält man die folgenden Leitungsdifferentialgleichungen für die Amplituden der einzelnen Moden:

$$-\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}z} = jk_{zi}Z_iI_i + v_i, \tag{3.53}$$

$$-\frac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}z} = jk_{zi}Y_iV_i + i_i, \tag{3.54}$$

wobei

$$k_{zi}^2 = k^2 - k_{ti}^2 \tag{3.55}$$

ist.

3.2 Skalarisierung und modale Darstellung der Vektorgrößen

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnung sollen nun die vektoriellen Größen nach Möglichkeit durch skalare Funktionen dargestellt werden. Dies führt zur Einführung skalarer Modusfunktionen und Hertzscher Potentiale.

3.2.1 Die skalaren Modusfunktionen

Da die E-Modusvektoren der transversalen elektrischen Feldstärke wirbelfrei sind, also

$$\mathrm{rot}_t\, \boldsymbol{e}_i' = \vec{0}$$

gilt, kann man diese wegen $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\varphi = \vec{0}$ auf eine skalare Funktion Φ_i zurückführen:

$$\boldsymbol{e}_i'(\vec{\varrho}) = -\frac{\mathrm{grad}_t\Phi_i(\vec{\varrho})}{k_{ti}'}. \tag{3.56}$$

Aus der Gleichung (3.17) folgt dann direkt:

$$\boldsymbol{h}_i'(\vec{\varrho}) = -\hat{z} \times \frac{\mathrm{grad}_t\Phi_i(\vec{\varrho})}{k_{ti}'}. \tag{3.57}$$

Wegen der Quellenfreiheit der H-Modusvektoren der transversalen elektrischen Feldstärke, daß heißt also weil

$$\mathrm{div}_t\boldsymbol{e}_i'' = 0$$

ist, kann man diese gemäß $\mathrm{div}_t(\mathrm{grad}_t\psi \times \hat{z}) = 0$ auf eine skalare Funktion Ψ_i zurückführen:

$$\boldsymbol{e}_i''(\vec{\varrho}) = -\frac{\mathrm{grad}_t\Psi_i(\vec{\varrho})}{k_{ti}''} \times \hat{z}. \tag{3.58}$$

Aus der mit $\hat{z}$ vektormultiplizierten Gleichung (3.22) folgt dann unmittelbar:

$$\boldsymbol{h}_i''(\vec{\varrho}) = -\frac{\mathrm{grad}_t\Psi_i(\vec{\varrho})}{k_{ti}''}. \tag{3.59}$$

Aus den Gleichungen (3.19) und (3.24) folgt unmittelbar

$$\nabla_t^2 \Phi_i + k_{ti}'^2 \Phi_i = 0, \tag{3.60}$$
$$\nabla_t^2 \Psi_i + k_{ti}''^2 \Psi_i = 0, \tag{3.61}$$

also erfüllen die skalaren Funktionen Φ_i und Ψ_i die homogene skalare Wellengleichung. Die skalaren Modusfunktionen selbst werden später noch explizit bestimmt.

3.2.2 Das elektromagnetische Feld in quellenfreien und transversal homogenen Bereichen

Durch Einsetzen der Gleichungen (3.56), (3.57), (3.58) und (3.59) in die Gleichungen (3.26) und (3.27) erhält man nach dem Vertauschen von Summation und Differentiation

$$\boldsymbol{E}_t(\vec{r}) = -\mathrm{grad}_t V'(\vec{r}) - \mathrm{grad}_t V''(\vec{r}) \times \hat{z}, \tag{3.62}$$
$$\boldsymbol{H}_t(\vec{r}) \times \hat{z} = -\mathrm{grad}_t I'(\vec{r}) - \mathrm{grad}_t I''(\vec{r}) \times \hat{z} \tag{3.63}$$

beziehungsweise durch Umrechnung der Operatoren

$$\boldsymbol{E}_t(\vec{r}) = -\mathrm{grad}_t V'(\vec{r}) - \mathrm{rot}_t\left(\hat{z} V''(\vec{r})\right), \tag{3.64}$$
$$\boldsymbol{H}_t(\vec{r}) = \mathrm{rot}_t\left(\hat{z} I'(\vec{r})\right) - \mathrm{grad}_t I''(\vec{r}) \tag{3.65}$$

mit

$$V'(\vec{r}) = \sum_i V_i'(z) \frac{\Phi_i(\vec{\varrho})}{k_{ti}'}, \tag{3.66}$$
$$I'(\vec{r}) = \sum_i I_i'(z) \frac{\Phi_i(\vec{\varrho})}{k_{ti}'}, \tag{3.67}$$
$$V''(\vec{r}) = \sum_i V_i''(z) \frac{\Psi_i(\vec{\varrho})}{k_{ti}''}, \tag{3.68}$$
$$I''(\vec{r}) = \sum_i I_i''(z) \frac{\Psi_i(\vec{\varrho})}{k_{ti}''}. \tag{3.69}$$

Eine E-Welle kann in quellenfreien Gebieten auch über das Hertzsche Vektorpotential $\hat{z}\Pi'$ eindeutig beschrieben werden; für eine H-Welle gilt dies ebenso in Bezug auf das Hertzsche Vektorpotential $\hat{z}\Pi''$. Führt man nun die Hertzschen Vektorpotentiale durch

$$\phi_J = -\mathrm{div}(\hat{z}\Pi'), \qquad \boldsymbol{A}_J = -\frac{k^2}{j\omega}\hat{z}\Pi', \tag{3.70}$$
$$\phi_M = -\mathrm{div}(\hat{z}\Pi''), \qquad \boldsymbol{A}_M = -\frac{k^2}{j\omega}\hat{z}\Pi'' \tag{3.71}$$

in die Gleichungen (2.14) und (2.15) ein, so erhält man

$$\boldsymbol{E}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(\hat{z}\Pi'(\vec{r})\right) - j\omega\mu\,\mathrm{rot}\left(\hat{z}\Pi''(\vec{r})\right), \tag{3.72}$$
$$\boldsymbol{H}(\vec{r}) = j\omega\varepsilon\,\mathrm{rot}\left(\hat{z}\Pi'(\vec{r})\right) + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(\hat{z}\Pi''(\vec{r})\right). \tag{3.73}$$

Wenn man nun die letzten Gleichungen in die Formen

$$\boldsymbol{E}_t(\vec{r}) = \mathrm{grad}_t\left(\frac{\partial}{\partial z}\Pi'(\vec{r})\right) - j\omega\mu\mathrm{rot}_t\left(\hat{z}\Pi''(\vec{r})\right), \tag{3.74}$$

$$\boldsymbol{H}_t(\vec{r}) = j\omega\varepsilon\mathrm{rot}_t\left(\hat{z}\Pi'(\vec{r})\right) + \mathrm{grad}_t\left(\frac{\partial}{\partial z}\Pi''(\vec{r})\right) \tag{3.75}$$

bringt, erkennt man, daß diese die Gleichungen (3.64) und (3.65) darstellen, wenn man

$$\Pi'(\vec{r}) = \frac{I'(\vec{r})}{j\omega\varepsilon}, \tag{3.76}$$

$$\Pi''(\vec{r}) = \frac{V''(\vec{r})}{j\omega\mu} \tag{3.77}$$

setzt und beachtet, daß aus den Leitungsdifferentialgleichungen (3.53) und (3.54)

$$V'(\vec{r}) = -\frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial I'(\vec{r})}{\partial z}, \tag{3.78}$$

$$I''(\vec{r}) = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial V''(\vec{r})}{\partial z} \tag{3.79}$$

folgen.

Durch die zweimalige Anwendung des Nablaoperators ∇ auf die Gleichungen (3.76) beziehungsweise (3.77) erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.60) und (3.61) für die Hertzschen Potentiale die skalare, homogene Wellengleichung:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\Pi = 0. \tag{3.80}$$

3.2.3 Die Greenschen Funktionen der Leitungsdifferentialgleichungen

Um im Falle einer Anregung eine Lösung für die elektromagnetischen Feldgrößen zu erhalten, ist es notwendig, die modalen Koeffizienten in den Gleichungen (3.66) bis (3.69) zu der Anregung in Beziehung zu setzen. Hierbei soll das Prinzip der Greenschen Funktion zur Anwendung kommen: Eine kontinuierliche Quellverteilung wird in Punktquellen zerlegt; wenn die Antwort auf eine Punktquelle bekannt ist, ergibt sich dann die Antwort auf die erregende Quellverteilung durch eine lineare Überlagerung der Einzelantworten der Punktquellen der Zerlegung. Diese Überlagerung führt dann im allgemeinen auf Faltungsintegrale. Für die Leitungsdifferentialgleichungen (3.53) und (3.54) ergibt sich somit die Lösung im allgemeinen Fall zu:

$$V(z) = -\int T^V(z;z')v(z')\,\mathrm{d}z' - \int Z(z;z')i(z')\,\mathrm{d}z', \tag{3.81}$$

$$I(z) = -\int Y(z;z')v(z')\,\mathrm{d}z' - \int T^I(z;z')i(z')\,\mathrm{d}z', \tag{3.82}$$

wobei der Index i zur Unterscheidung der Moden fortgelassen wurde und die Integration sich über den gesamten Definitionsbereich erstreckt. Die neu eingeführten Funktionen lassen sich sofort als normierte Antworten auf die entsprechenden Punktquellen identifizieren, wenn man diese einsetzt. Bei einer Anregung mit $v(z) = -\delta(z - z')$ und $i(z) = 0$ ergeben sich zum Beispiel $V(z) = T^V(z; z')$ und $I(z) = Y(z; z')$. In diesem Falle ergeben sich aus den Leitungsdifferentialgleichungen (3.53) und (3.54):

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} T^V(z; z') = jk_z Z Y(z; z') - \delta(z - z'), \tag{3.83}$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} Y(z; z') = jk_z Y T^V(z; z'). \tag{3.84}$$

Entsprechend ergeben sich bei $v(z) = 0$ und $i(z) = -\delta(z - z')$:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} Z(z; z') = jk_z Z T^I(z; z'), \tag{3.85}$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} T^I(z; z') = jk_z Y Z(z; z') - \delta(z - z'). \tag{3.86}$$

Nun soll gezeigt werden, daß die zuvor definierten Greenschen Funktionen reziprok sind. Hierzu geht man zunächst von zwei verschiedenen Quellverteilungen $v(z)$, $i(z)$ und $\breve{v}(z)$, $\breve{\imath}(z)$ aus. Die Leitungsdifferentialgleichungen lauten dann

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = jk_z Z I + v, \tag{3.87}$$

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = jk_z Y V + i \tag{3.88}$$

und

$$-\frac{\mathrm{d}\breve{V}}{\mathrm{d}z} = jk_z Z \breve{I} + \breve{v}, \tag{3.89}$$

$$-\frac{\mathrm{d}\breve{I}}{\mathrm{d}z} = jk_z Y \breve{V} + \breve{\imath}. \tag{3.90}$$

Multipliziert man nun die Gleichungen (3.87) bis (3.90) mit $\breve{I}$, $\breve{V}$, I, V und subtrahiert man dann die Summe der Gleichungen (3.87') und (3.90') von der Summe der Gleichungen (3.88') und (3.89'), so erhält man nach anschließender Integration über z von z_1 nach z_2:

$$\left[\breve{V} I - \breve{I} V\right]_{z_1}^{z_2} = \int_{z_1}^{z_2} \left(v\breve{I} + \breve{\imath} V - i\breve{V} - \breve{v} I\right) \mathrm{d}z. \tag{3.91}$$

Da die Randbedingungen an z_1 und z_2 für beide Quellverteilungen gleich und von diesen unabhängig sein sollen, definiert man

$$V(z_{1;2}) = \mp Z(z_{1;2}) I(z_{1;2}), \tag{3.92}$$

$$\breve{V}(z_{1;2}) = \mp Z(z_{1;2}) \breve{I}(z_{1;2}), \tag{3.93}$$

wobei $Z(z_{1;2})$ die „Abschlußwiderstände“ seien. Damit verschwindet die linke Seite der Gleichung (3.91) und es ergibt sich die Reziprozitätsrelation

$$0 = \int_{z_1}^{z_2} \left(v\breve{I} + \breve{\imath} V - i\breve{V} - \breve{v} I\right) \mathrm{d}z. \tag{3.94}$$

Nun wählt man spezielle Quellverteilungen für die Leitungsdifferentialgleichungen:

$$\begin{array}{llll}
\text{(I)} & v = \breve{v} = 0, & i = -\delta(z - z'), & \breve{\imath} = -\delta(z - z'') \\
 & \Rightarrow & V = Z(z; z'), & \breve{V} = Z(z; z'')\ ; \\
\text{(II)} & i = \breve{\imath} = 0, & v = -\delta(z - z'), & \breve{v} = -\delta(z - z'') \\
 & \Rightarrow & I = Y(z; z'), & \breve{I} = Y(z; z'')\ ; \\
\text{(III)} & v = \breve{\imath} = 0, & i = -\delta(z - z'), & \breve{v} = -\delta(z - z'') \\
 & \Rightarrow & I = T^I(z; z'), & \breve{V} = T^V(z; z'')\ .
\end{array}$$

Durch Einsetzen der Quellverteilung (I) in die Reziprozitätsrelation (3.94) ergibt sich

$$Z(z''; z') = Z(z'; z'') \tag{3.95}$$

nach der Auswertung des sich ergebenden Integrals über die Diracschen Distributionen. Entsprechend ergibt sich durch Einsetzen der Quellverteilung (II) in die Reziprozitätsrelation

$$Y(z''; z') = Y(z'; z'') \tag{3.96}$$

und durch Einsetzen der Quellverteilung (III) schließlich

$$T^I(z''; z') = -T^V(z'; z''). \tag{3.97}$$

Es ist interessant anzumerken, daß entweder $Z(z; z')$ oder $Y(z; z')$ jeweils zur Bestimmung aller Greenschen Funktionen ausreichen. Zum Beispiel folgt aus $Y(z; z')$ über die Gleichung (3.84) unmittelbar T^V. Wegen der Reziprozität ergibt sich daraus sofort über die Gleichung (3.97) die Funktion T^I, und aus dieser ergibt sich mittels der Gleichung (3.86) unmittelbar die Funktion $Z(z; z')$.

3.2.4 Die modalen Darstellungen der Greenschen Funktionen in stückweise homogenen Bereichen

Es wurde gezeigt, daß sich die elektromagnetischen Felder $\boldsymbol{E}(\vec{r})$ und $\boldsymbol{H}(\vec{r})$ außerhalb der Quellgebiete über die skalaren Potentialfunktionen $I'(\vec{r})$ und $V''(\vec{r})$, definiert in den Gleichungen (3.67) und (3.68), darstellen lassen. Befindet sich eine Punktquelle im Punkte $\vec{r}'$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}(\vec{r}) &= \boldsymbol{J}^0 \delta(\vec{r} - \vec{r}'), & (3.98)\\
\boldsymbol{M}(\vec{r}) &= \boldsymbol{M}^0 \delta(\vec{r} - \vec{r}'). & (3.99)
\end{aligned}$$

Dabei stellen $\boldsymbol{J}^0$ und $\boldsymbol{M}^0$ beliebige, konstante Vektoren dar. Nun lassen sich die modalen Darstellungen von $I'(\vec{r})$ und $V''(\vec{r})$ vereinfachen. Betrachtet man nun die modalen Amplituden $I_i'(z)$ und $V_i''(z)$ von $I'(\vec{r})$ und $V''(\vec{r})$ bei einer Anregung mit einer elektromagnetischen Punktquelle in $\vec{r}'$, so ergeben sich zunächst aus den Gleichungen (3.47) und (3.48) durch Einsetzen der Punktquellen (3.98) und (3.99) die Beziehungen

$$\begin{aligned}
v_i(z) &= v_i(z')\delta(z - z'), & (3.100)\\
i_i(z) &= i_i(z')\delta(z - z') & (3.101)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} v_i(z') &= \boldsymbol{h}_i^*(\vec{\varrho}') \cdot \boldsymbol{M}^0 + Z_i^* \boldsymbol{e}_{zi}^*(\vec{\varrho}') \cdot \boldsymbol{J}^0, & (3.102) \\ i_i(z') &= \boldsymbol{e}_i^*(\vec{\varrho}') \cdot \boldsymbol{J}^0 + Y_i^* \boldsymbol{h}_{zi}^*(\vec{\varrho}') \cdot \boldsymbol{M}^0, & (3.103) \end{aligned}$$

aus denen dann durch Einsetzen in die Gleichungen (3.81) und (3.82) direkt die Beziehungen

$$\begin{aligned} I_i'(z;z') &= -Y_i'(z;z')v_i'(z') - T_i^{I'}(z;z')i_i'(z'), & (3.104) \\ V_i''(z;z') &= -T_i^{V''}(z;z')v_i''(z') - Z_i''(z;z')i_i''(z') & (3.105) \end{aligned}$$

folgen.

Zur weiteren Vereinfachung der Gleichung (3.104) ist es sinnvoll, $T_i^{I'}(z;z')$ durch $Y_i'(z;z')$ auszudrücken. Dies ergibt

$$\begin{aligned} T_i^I(z;z') &= -T_i^V(z';z) \\ &= \frac{1}{jk_{zi}(z')Y_i(z')} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z'} Y_i(z';z) \\ &= \frac{1}{jk_{zi}(z')Y_i(z')} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z'} Y_i(z;z'), & (3.106) \end{aligned}$$

wobei die Gleichungen (3.97), (3.84) und (3.96) verwendet wurden. Für die E-Moden erhält man damit zusammen mit der Gleichung (3.18):

$$I_i'(z;z') = -\left[v_i'(z') + \frac{1}{j\omega\varepsilon(z')} i_i'(z') \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z'}\right] Y_i'(z;z'). \tag{3.107}$$

In ähnlicher Weise ergibt sich aus den Gleichungen (3.97), (3.85) und (3.95)

$$\begin{aligned} T_i^V(z;z') &= -T_i^I(z';z) \\ &= \frac{1}{jk_{zi}(z')Z_i(z')} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z'} Z_i(z';z) \\ &= \frac{1}{jk_{zi}(z')Z_i(z')} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z'} Z_i(z;z'), & (3.108) \end{aligned}$$

woraus dann in Verbindung mit der Gleichung (3.23) für die H-Moden

$$V_i''(z;z') = -\left[i_i''(z') + \frac{1}{j\omega\mu(z')} v_i''(z') \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z'}\right] Z_i''(z;z') \tag{3.109}$$

folgt.

Die eckige Klammer in der Gleichung (3.107) läßt sich durch Einsetzen der skalaren Modusfunktionen umformen. In diesem Sinne ergibt sich durch das Einsetzen der Gleichungen (3.56), (3.57) und (3.51) in die Gleichungen (3.102) und (3.103)

$$\begin{aligned} &-\left[v_i'(z') + \frac{1}{j\omega\varepsilon(z')} i_i'(z') \frac{\partial}{\partial z'}\right] = \\ &\left[(\hat{z} \times \nabla_t') \frac{\Phi_i^*(\vec{\varrho}')}{k_{ti}'}\right] \cdot \boldsymbol{M}^0 - \frac{1}{j\omega\varepsilon(z')} \left[\left(\hat{z}\nabla_t'^2 - \nabla_t' \frac{\partial}{\partial z'}\right) \frac{\Phi_i^*(\vec{\varrho}')}{k_{ti}'}\right] \cdot \boldsymbol{J}^0. \qquad (3.110) \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man für die eckige Klammer in der Gleichung (3.109)

$$-\left[i_i''(z')+\frac{1}{j\omega\mu(z')}v_i''(z')\frac{\partial}{\partial z'}\right]=$$
$$-\left[(\hat{z}\times\nabla_t')\frac{\Psi_i^*(\vec{\varrho}')}{k_{ti}''}\right]\cdot\boldsymbol{J}^0-\frac{1}{j\omega\mu(z')}\left[\left(\hat{z}\nabla_t'^2-\nabla_t'\frac{\partial}{\partial z'}\right)\frac{\Psi_i^*(\vec{\varrho}')}{k_{ti}''}\right]\cdot\boldsymbol{M}^0. \quad (3.111)$$

Für eine skalare Funktion φ gelten die Vektoridentitäten

$$(\hat{z}\times\nabla_t)\varphi=-(\nabla_t\times\hat{z})\varphi=-(\nabla\times\hat{z})\varphi \quad (3.112)$$

und

$$\begin{aligned}\left(\nabla_t\frac{\partial}{\partial z}-\hat{z}\nabla_t^2\right)\varphi &= \left(\nabla\frac{\partial}{\partial z}-\hat{z}\nabla^2\right)\varphi\\ &= \nabla(\nabla\cdot\hat{z}\varphi)-\nabla^2(\hat{z}\varphi)\\ &= (\nabla\times\nabla\times\hat{z})\varphi. \quad (3.113)\end{aligned}$$

Setzt man nun die Gleichung (3.107) mit der Modifikation (3.110) in die Gleichung (3.67) ein, so erhält man aufgrund dieser Vektoridentitäten

$$I'(\vec{r})=-\mathtt{L}_1{}'\mathcal{L}_d'\cdot\boldsymbol{M}^0+\frac{1}{j\omega\varepsilon(z')}\mathtt{L}_2{}'\mathcal{L}_d'\cdot\boldsymbol{J}^0 \quad (3.114)$$

mit

$$\mathcal{L}_d'(\vec{r};\vec{r}')=\sum_i\frac{\Phi(\vec{\varrho})\Phi_i^*(\vec{\varrho}')}{k_{ti}'^2}Y_i'(z;z') \quad (3.115)$$

und

$$\begin{aligned}\mathtt{L}_1 &= \nabla\times\hat{z}, \quad (3.116)\\ \mathtt{L}_2 &= \nabla\times\nabla\times\hat{z}. \quad (3.117)\end{aligned}$$

In analoger Weise ergibt sich aus der Gleichung (3.68) durch Einsetzen der Beziehung (3.109) inklusive der Modifikation (3.111)

$$V''(\vec{r})=\mathtt{L}_1{}'\mathcal{L}_d''\cdot\boldsymbol{J}^0+\frac{1}{j\omega\mu(z')}\mathtt{L}_2{}'\mathcal{L}_d''\cdot\boldsymbol{M}^0 \quad (3.118)$$

mit

$$\mathcal{L}_d''(\vec{r};\vec{r}')=\sum_i\frac{\Psi_i(\vec{\varrho})\Psi_i^*(\vec{\varrho}')}{k_{ti}''^2}Z_i''(z;z'). \quad (3.119)$$

Wenn man die erhaltenen Ausdrücke für $I'(\vec{r})$ und $V''(\vec{r})$ über die Beziehungen (3.76) und (3.77) in die Gleichungen (3.72) und (3.73) einsetzt, erhält man für das elektromagnetische Feld in $\vec{r}$, erzeugt von einer Punktquelle in $\vec{r}'$, die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\vec{r};\vec{r}') &= -\underline{Z}(\vec{r};\vec{r}')\cdot\boldsymbol{J}^0-\underline{T_e}(\vec{r};\vec{r}')\cdot\boldsymbol{M}^0, \quad (3.120)\\ \boldsymbol{H}(\vec{r};\vec{r}') &= -\underline{T_m}(\vec{r};\vec{r}')\cdot\boldsymbol{J}^0-\underline{Y}(\vec{r};\vec{r}')\cdot\boldsymbol{M}^0 \quad (3.121)\end{aligned}$$

mit den Greenschen Dyaden

$$
\begin{aligned}
-\underline{Z}(\vec{r};\vec{r}') &= \frac{1}{j\omega\varepsilon(z)j\omega\varepsilon(z')}\mathtt{L}_2\mathtt{L}_2{}'\mathcal{L}_d' - \mathtt{L}_1\mathtt{L}_1{}'\mathcal{L}_d'', &(3.122)\\
-\underline{Y}(\vec{r};\vec{r}') &= \frac{1}{j\omega\mu(z)j\omega\mu(z')}\mathtt{L}_2\mathtt{L}_2{}'\mathcal{L}_d'' - \mathtt{L}_1\mathtt{L}_1{}'\mathcal{L}_d', &(3.123)\\
-\underline{T_e}(\vec{r};\vec{r}') &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon(z)}\mathtt{L}_2\mathtt{L}_1{}'\mathcal{L}_d' - \frac{1}{j\omega\mu(z')}\mathtt{L}_1\mathtt{L}_2{}'\mathcal{L}_d'', &(3.124)\\
-\underline{T_m}(\vec{r};\vec{r}') &= \frac{1}{j\omega\mu(z)}\mathtt{L}_2\mathtt{L}_1{}'\mathcal{L}_d'' + \frac{1}{j\omega\varepsilon(z')}\mathtt{L}_1\mathtt{L}_2{}'\mathcal{L}_d'. &(3.125)
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Reziprozitätsbeziehungen (3.95) und (3.96) ergibt sich für *reelle* Φ_i und Ψ_i

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_d'(\vec{r};\vec{r}') &= \mathcal{L}_d'(\vec{r}';\vec{r}), &(3.126)\\
\mathcal{L}_d''(\vec{r};\vec{r}') &= \mathcal{L}_d''(\vec{r}';\vec{r}), &(3.127)
\end{aligned}
$$

womit sich dann aus den Gleichungen (3.122) bis (3.125)

$$
\begin{aligned}
\underline{Z}(\vec{r};\vec{r}') &= \underline{Z}^{\mathrm{T}}(\vec{r}';\vec{r}), &(3.128)\\
\underline{Y}(\vec{r};\vec{r}') &= \underline{Y}^{\mathrm{T}}(\vec{r}';\vec{r}), &(3.129)\\
\underline{T_e}(\vec{r};\vec{r}') &= -\underline{T_m}^{\mathrm{T}}(\vec{r}';\vec{r}) &(3.130)
\end{aligned}
$$

ergibt. Der Index T bezeichnet hierbei die transponierte Dyade.

Im Falle ausschließlich longitudinaler Quellen, daß heißt für

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J}^0 &= \hat{z}J_z^0, &(3.131)\\
\boldsymbol{M}^0 &= \hat{z}M_z^0, &(3.132)
\end{aligned}
$$

kommt es zu deutlichen Vereinfachungen in den Gleichungen (3.114) und (3.118). Unter Beachtung der Vektoridentitäten

$$
\begin{aligned}
\mathtt{L}_1\varphi\cdot\hat{z} &= (\nabla\times\hat{z})\varphi\cdot\hat{z} = 0, &(3.133)\\
\mathtt{L}_2\varphi\cdot\hat{z} &= (\nabla\times\nabla\times\hat{z})\varphi\cdot\hat{z} = -\nabla_t^2\varphi &(3.134)
\end{aligned}
$$

für eine skalare Funktion φ und unter Beachtung der Gleichung (3.60), wird die Gleichung (3.114) durch Einsetzen der longitudinalen Quellen zu

$$
I'(\vec{r}) = J_z^0 G'(\vec{r};\vec{r}') \qquad (3.135)
$$

mit

$$
\begin{aligned}
G'(\vec{r};\vec{r}') &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon(z')}\nabla_t'^2\mathcal{L}_d'(\vec{r};\vec{r}')\\
&= \frac{1}{j\omega\varepsilon(z')}\sum_i \Phi_i(\vec{\varrho})\Phi_i^*(\vec{\varrho}')Y_i'(z;z'), &(3.136)
\end{aligned}
$$

wobei die Quadrate der transversalen Wellenzahlen $k_{ti}'^2$ reellwertig sein müssen, um die letzte Gleichheit zu erfüllen.

In gleicher Art und Weise wird die Gleichung (3.118) durch Einsetzen der longitudinalen Quellen und unter Beachtung der Gleichung (3.61) zu

$$V''(\vec{r}) = M_z^0 G''(\vec{r};\vec{r}') \tag{3.137}$$

mit

$$\begin{aligned} G''(\vec{r};\vec{r}') &= -\frac{1}{j\omega\mu(z')}\nabla_t'^2 \mathcal{L}_d''(\vec{r};\vec{r}') \\ &= \frac{1}{j\omega\mu(z')}\sum_i \Psi_i(\vec{\varrho})\Psi_i^*(\vec{\varrho}')Z_i''(z;z'), \end{aligned} \tag{3.138}$$

wobei die Quadrate der transversalen Wellenzahlen $k_{ti}''^2$ für den letzten Schritt ebenfalls reellwertig sein müssen.

Das gesamte elektromagnetische Feld in den quellenfreien Gebieten, das durch longitudinale Quellen angeregt wird, ergibt sich durch Einsetzen der Gleichungen (3.135) und (3.137) in die Gleichungen (3.72) und (3.73) zu:

$$\boldsymbol{E}(\vec{r};\vec{r}') = \frac{J_z^0}{j\omega\varepsilon(z)}\mathtt{L}_2 G'(\vec{r};\vec{r}') - M_z^0 \mathtt{L}_1 G''(\vec{r};\vec{r}'), \tag{3.139}$$

$$\boldsymbol{H}(\vec{r};\vec{r}') = J_z^0 \mathtt{L}_1 G'(\vec{r};\vec{r}') + \frac{M_z^0}{j\omega\mu(z)}\mathtt{L}_2 G''(\vec{r};\vec{r}'). \tag{3.140}$$

Hierbei erkennt man, daß longitudinale elektrische Stromdichten nur E-Wellen anregen, während longitudinale magnetische Stromdichten ausschließlich H-Wellen erzeugen.

Nun soll gezeigt werden, daß die eingeführten Greenschen Funktionen G' und G'' die skalare Wellengleichung erfüllen, wenn der Anregungsterm eine Diracsche Distribution darstellt. Hierzu wird zunächst die Funktion T^V aus den Gleichungen (3.83) und (3.84) und die Funktion T^I aus den Gleichungen (3.85) und (3.86) eliminiert, wodurch man

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}Y_i'(z;z') + k_{zi}'^2 Y_i'(z;z') = -j\omega\varepsilon(z')\delta(z-z'), \tag{3.141}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}Z_i''(z;z') + k_{zi}''^2 Z_i''(z;z') = -j\omega\mu(z')\delta(z-z') \tag{3.142}$$

erhält. Die Feldkonstanten können ausschließlich an der Stelle z' genommen werden, da sie nur dort von der Diracschen Distribution abgetastet werden. Zusammen mit $k_{zi}'^2(z) = k^2(z) - k_{ti}'^2$ und der Gleichung (3.60) ergibt sich nun für die Greensche Funktion G':

$$\begin{aligned} &\left(\nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(z)\right) G'(\vec{r};\vec{r}') \\ &= \frac{1}{j\omega\varepsilon(z')}\sum_i \Phi_i(\vec{\varrho})\Phi_i^*(\vec{\varrho}')\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + k_{zi}'^2(z)\right) Y_i'(z;z') \\ &= -\delta(z-z')\sum_i \Phi_i(\vec{\varrho})\Phi_i^*(\vec{\varrho}'). \end{aligned} \tag{3.143}$$

Der letzte Summenausdruck über das Produkt zweier Eigenfunktionen wird sich später als Diracsche Distribution $\delta(\vec{\varrho}-\vec{\varrho}')$ darstellen lassen, so daß sich für die Greensche Funktion des E-Modus schließlich die skalare inhomogene Wellengleichung

$$(\nabla^2+k^2)G'(\vec{r};\vec{r}')=-\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{3.144}$$

ergibt. In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß für die Greensche Funktion des H-Modus ebenfalls eine skalare inhomogene Wellengleichung in der Form

$$(\nabla^2+k^2)G''(\vec{r};\vec{r}')=-\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{3.145}$$

erfüllt ist.

Die Randbedingungen in der transversalen Richtung werden für G' und G'' durch die Wellenleiterberandung vorgegeben, im unbegrenzten Fall gilt die Ausstrahlungsbedingung. Die Randbedingung in z-Richtung hängt von der speziellen Schichtung ab. Beispielsweise müssen die transversalen elektrischen und magnetischen Feldstärken an einer dielektrischen Grenzschicht $z=z_1$ stetig übergehen; damit müssen dann auch die modalen Amplituden stetig übergehen. Da $Y_i'(z;z')$ eine modale Amplitude für eine Punktanregung darstellt, muß $Y_i'(z;z')$ stetig in z_1 sein; für $Z_i''(z;z')$ ergibt sich eine analoge Argumentation. Aus den Gleichungen (3.136), (3.138), (3.139) und (3.140) ergeben sich dann die Randbedingungen an einer dielektrischen Grenzschicht z_1 zu:

$$G' \quad : \quad \text{stetig an der Stelle } z_1, \tag{3.146}$$

$$\frac{1}{\varepsilon(z)}\frac{\partial}{\partial z}G' \quad : \quad \text{stetig an der Stelle } z_1, \tag{3.147}$$

$$G'' \quad : \quad \text{stetig an der Stelle } z_1, \tag{3.148}$$

$$\frac{1}{\mu(z)}\frac{\partial}{\partial z}G'' \quad : \quad \text{stetig an der Stelle } z_1. \tag{3.149}$$

An einer ideal elektrisch leitenden Ebene an der Stelle z_1 muß die transversale elektrische Feldstärke verschwinden. In diesem Falle ergeben sich damit die Randbedingungen:

$$\frac{1}{\varepsilon(z)}\frac{\partial}{\partial z}G' = 0 \quad \text{an der Stelle } z_1, \tag{3.150}$$

$$G'' = 0 \quad \text{an der Stelle } z_1. \tag{3.151}$$

(3.152)

3.3 Lösung der Leitungsdifferentialgleichungen

Das elektromagnetische Feld in einem gleichförmigen Wellenleiterabschnitt läßt sich aus der Kenntnis der transversalen Eigenfunktionen und der modalen Amplituden entlang der z-Richtung vollständig berechnen. In diesem Abschnitt sollen die Leitungsdifferentialgleichungen für die modalen Amplituden gelöst werden. Hierzu werden die Leitungsdifferentialgleichungen durch ein analoges Leitungsersatzschaltbild modelliert, welches dann mittels der Leitungstheorie ausgewertet werden kann.

3.3.1 Der quellenfreie Fall

Zunächst soll ein Bereich ohne Quellen, das heißt mit $i = 0$ und $v = 0$, betrachtet werden. In diesem gelten für jeden Modus die Leitungsdifferentialgleichungen

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}V(z) = jk_z Z I(z), \tag{3.153}$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}I(z) = jk_z Y V(z). \tag{3.154}$$

Da k_z und Z als konstant angenommen werden, lassen sich die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung in jeweils eine Differentialgleichung zweiter Ordnung überführen:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + k_z^2\right) \begin{matrix} V(z) \\ I(z) \end{matrix} = 0. \tag{3.155}$$

Die Lösung der Gleichung (3.155) kann auf verschiedene Weisen dargestellt werden. Die sogenannte Wanderwellendarstellung ergibt

$$V(z) = V_{\text{inc}}(z')\mathrm{e}^{-jk_z(z-z')} + V_{\text{refl}}(z')\mathrm{e}^{jk_z(z-z')}, \tag{3.156}$$

$$ZI(z) = V_{\text{inc}}(z')\mathrm{e}^{-jk_z(z-z')} - V_{\text{refl}}(z')\mathrm{e}^{jk_z(z-z')}, \tag{3.157}$$

wobei sich die Gleichung (3.157) durch Einsetzen der Beziehung (3.156) in die Gleichung (3.153) ergibt. Über die Definition des Spannungsreflexionsfaktors zu

$$\Gamma(z') = \frac{V_{\text{refl}}(z')}{V_{\text{inc}}(z')} \tag{3.158}$$

ergibt sich auch die folgende Darstellung:

$$V(z) = V_{\text{inc}}(z')\left[\mathrm{e}^{-jk_z(z-z')} + \Gamma(z')\mathrm{e}^{jk_z(z-z')}\right], \tag{3.159}$$

$$I(z) = YV_{\text{inc}}(z')\left[\mathrm{e}^{-jk_z(z-z')} - \Gamma(z')\mathrm{e}^{jk_z(z-z')}\right]. \tag{3.160}$$

Der Spannungsreflexionsfaktor an einer beliebigen Stelle z ergibt sich aus jenem an der Stelle z' durch

$$\Gamma(z) = \Gamma(z')\mathrm{e}^{j2k_z(z-z')}. \tag{3.161}$$

Die Lösung der Gleichung (3.155) kann desweiteren auch in der sogenannten Stehwellendarstellung angegeben werden. Diese lautet:

$$V(z) = V(z')\cos\left(k_z(z-z')\right) - jZI(z')\sin\left(k_z(z-z')\right), \tag{3.162}$$

$$I(z) = I(z')\cos\left(k_z(z-z')\right) - jYV(z')\sin\left(k_z(z-z')\right). \tag{3.163}$$

In dieser Darstellung ist deutlich die Dualität zwischen $V(z)$ und $I(z)$ erkennbar. Aus der Einführung der absoluten Impedanz $Z(z)$ und der normierten Impedanz $Z'(z)$ durch

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{1}{Y(z)}, \tag{3.164}$$

$$Z'(z) = \frac{V(z)}{ZI(z)} = \frac{1}{Y'(z)} \tag{3.165}$$

ergibt sich die Darstellung

$$V(z) = V(z')\left[\cos\left(k_z(z-z')\right) - jY'(z')\sin\left(k_z(z-z')\right)\right], \tag{3.166}$$

$$I(z) = I(z')\left[\cos\left(k_z(z-z')\right) - jZ'(z')\sin\left(k_z(z-z')\right)\right]. \tag{3.167}$$

Aus dem Verhältnis dieser beiden Gleichungen ergibt sich der Zusammenhang zwischen den normierten Impedanzen an den Stellen z und z':

$$Z'(z) = \frac{1 + jZ'(z')\cot\left(k_z(z-z')\right)}{Z'(z') + j\cot\left(k_z(z-z')\right)}. \tag{3.168}$$

Die Beziehungen zwischen den Größen der Wanderwellendarstellung und der Stehwellendarstellung ergeben sich zum einen durch Betrachtung des Punktes $z = z'$ in den Gleichungen (3.156) und (3.157) zu

$$V(z) = V_{\text{inc}}(z) + V_{\text{refl}}(z), \tag{3.169}$$

$$ZI(z) = V_{\text{inc}}(z) - V_{\text{refl}}(z) \tag{3.170}$$

und zum anderen durch Umstellen der letzten Gleichungen zu

$$V_{\text{inc}}(z) = \frac{1}{2}\left[V(z) + ZI(z)\right], \tag{3.171}$$

$$V_{\text{refl}}(z) = \frac{1}{2}\left[V(z) - ZI(z)\right]. \tag{3.172}$$

Aus diesen Gleichungen folgen dann direkt durch entsprechende Quotientenbildungen die Zusammenhänge zwischen Reflexionsfaktor und normierter Impedanz:

$$Z'(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}, \tag{3.173}$$

$$\Gamma(z) = \frac{Z'(z) - 1}{Z'(z) + 1}. \tag{3.174}$$

3.3.2 Punktquelle in einer unendlich langen Leitung

Wie bereits geschildert, kann man aus der bekannten Antwort eines Systems auf eine Punktquelle mittels linearer Überlagerung durch Bildung eines Faltungsintegrals die Systemantwort auf eine beliebige Quellverteilung berechnen. Die Darstellung der verteilten Quellen durch die Punktquellen $v(z')\delta(z-z')$ und $i(z')\delta(z-z')$ in den Punkten z' erfolgt durch:

$$v(z) = \int v(z')\delta(z-z')\mathrm{d}z', \tag{3.175}$$

$$i(z) = \int i(z')\delta(z-z')\mathrm{d}z', \tag{3.176}$$

wobei sich die Integration erneut über die gesamte Quellregion erstreckt. Wenn die Antworten der modalen Amplituden auf die Punktquellen $v(z')\delta(z-z')$ und $i(z')\delta(z-z')$ für jeden Punkt z' bekannt sind und mit $V(z;z')$ und $I(z;z')$ bezeichnet werden, so ergeben sich dann die Antworten auf die verteilten Quellen $v(z)$ und $i(z)$ daraus zu:

$$V(z) = \int V(z;z')\mathrm{d}z', \tag{3.177}$$

$$I(z) = \int I(z;z')\mathrm{d}z'. \tag{3.178}$$

Um eine Lösung bei beliebiger Anregung berechnen zu können, müssen also $V(z;z')$ und $I(z;z')$ bekannt sein. Hierbei handelt es sich um Lösungen der Leitungsdifferentialgleichungen bei Punktanregung, da sich nach dem Einsetzen der Integralzerlegungen von $I(z)$, $V(z)$, $i(z)$ und $v(z)$ in die Leitungsdifferentialgleichungen der modalen Amplituden unmittelbar

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}V(z;z') = jk_zZI(z;z') + v(z')\delta(z-z'), \tag{3.179}$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}I(z;z') = jk_zYV(z;z') + i(z')\delta(z-z') \tag{3.180}$$

ergeben. Durch Integration der letzten Gleichungen über z von $(z'-\alpha)$ nach $(z'+\alpha)$ bei positivem α erhält man nach dem Grenzübergang $\alpha \to 0$ die Unstetigkeitsrelationen für $V(z;z')$ und $I(z;z')$ an der Stelle $z = z'$ zu

$$\left[V(z;z')\right]_{z'_-}^{z'_+} = -v, \tag{3.181}$$

$$\left[I(z;z')\right]_{z'_-}^{z'_+} = -i, \tag{3.182}$$

sofern man $v(z') = v$ und $i(z') = i$ setzt. Betrachtet man einen homogenen z-gerichteten unendlich langen Wellenleiter, so kann man die Unstetigkeitsrelationen als ideale Strom- und Spannungsquelle interpretieren, die eine beidseitig unendlich lange Leitung speisen, welche ein Modell für die entsprechenden Leitungsdifferentialgleichungen der modalen Amplituden darstellt. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 3 gezeigt. Die Wahl der Zählpfeile von $V(z;z')$ und $I(z;z')$ bezüglich der z-Richtung ist dabei beliebig. Streng genommen müßte die Spannungsquelle eigentlich in zwei Quellen der Größe $v/2$ aufgespalten werden, in deren gemeinsamen Knoten die Stromquelle einspeist. Der Einfachheit halber wird dies jedoch nicht weiter beachtet. Im folgenden werden $I(z;z')$ und $V(z;z')$ weiterhin der Einfachheit halber als Strom und Spannung bezeichnet, obwohl es sich bei einer mit Maßeinheiten behafteten Anregung bei diesen eigentlich um Strom- und Spannungsdichten handelt, wie aus den Gleichungen (3.177) und (3.178) ersichtlich ist.

Da die Quellen in eine unendliche homogene Leitung einspeisen, kommen nur von den Quellen fortlaufende Wellen vor. Der Ansatz für die Spannungsantwort lautet also

$$V(z;z') = \begin{cases} V(z'_+;z')\mathrm{e}^{-jk_z(z-z')} & \text{für} \quad z > z' \\ V(z'_-;z')\mathrm{e}^{+jk_z(z-z')} & \text{für} \quad z < z' \end{cases} \tag{3.183}$$

und der für die Stromantwort

$$I(z;z') = \begin{cases} I(z'_+;z')\mathrm{e}^{-jk_z(z-z')} & \text{für} \quad z > z' \\ I(z'_-;z')\mathrm{e}^{+jk_z(z-z')} & \text{für} \quad z < z' \end{cases} . \tag{3.184}$$

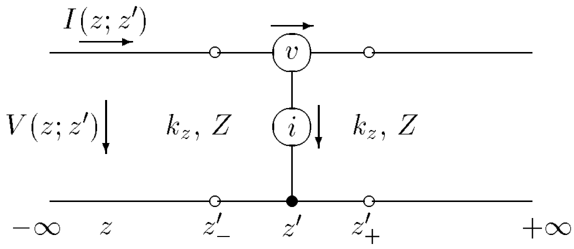


Abbildung 3: Punktquelle in einer unendlichen Leitung

Bei der Bestimmung der Strom- und Spannungsamplituden beachtet man, daß die linksseitige und rechtsseitige Impedanz gleich Z ist. Die Spannungsquelle sieht also eine Gesamtimpedanz von $2Z$ und die Stromquelle eine Gesamtadmittanz von $2Y$. Da alle Impedanzen und Admittanzen hier wie rechtsseitige Abschlüsse behandelt werden, muß man beim linksseitigen Abschluß die entsprechende Vorzeichenumkehr beachten. Durch eine lineare Überlagerung der Wirkungen von Strom- und Spannungsquelle ergeben sich die links- und rechtsseitigen Amplituden zu

$$
\begin{aligned}
V\left(z'_{\pm};z'\right) &= -\frac{1}{2}(\pm v + Zi), && (3.185)\\
I\left(z'_{\pm};z'\right) &= -\frac{1}{2}(\pm i + Yv). && (3.186)
\end{aligned}
$$

Damit ergeben sich dann überall auf der Leitung

$$
\begin{aligned}
V(z;z') &= -\frac{1}{2}\left[u(z;z')v + Zi\right] \mathrm{e}^{-jk_z|z-z'|}, && (3.187)\\
I(z;z') &= -\frac{1}{2}\left[u(z;z')i + Yv\right] \mathrm{e}^{-jk_z|z-z'|} && (3.188)
\end{aligned}
$$

mit

$$
u(z;z') = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad z > z' \\ -1 & \text{für} \quad z < z' \end{cases} . \qquad (3.189)
$$

3.3.3 Punktquelle in einer abgeschlossenen Leitung

Nun sei der Fall einer Punktquelle in einer beliebig abgeschlossenen Leitung betrachtet. Dies ist das analoge Leitungsmodell für einen beidseitig beliebig begrenzten Wellenleiter. Die Randbedingungen des elektromagnetischen Feldes an den Grenzflächen bei $z = z_1$ und $z = z_2$ ergeben im analogen Modell den linksseitigen Abschlußwiderstand $\overleftarrow{Z}_T$ bei $z = z_1$ und den rechtsseitigen Abschlußwiderstand $\overrightarrow{Z}_T$ bei $z = z_2$. Das Wellenleiterstück selbst sei homogen, so daß die Parameter der analogen Leitung Z und k_z selbst konstant bezüglich z sind. Diese Anordnung der analogen Leitung ist in der Abbildung 4 dargestellt.

Um nun Strom und Spannung auf dem gesamten Leitungsstück zu berechnen, ermittelt man diese zunächst linksseitig und rechtsseitig von der Quelle. Hierfür faßt man jeweils

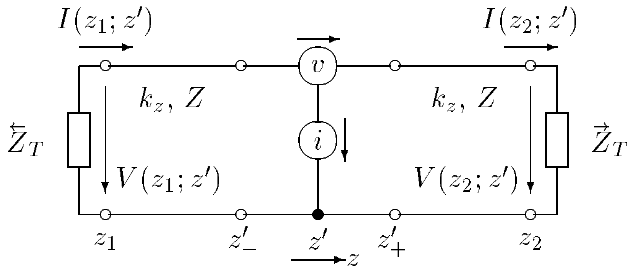


Abbildung 4: Punktquelle in einer abgeschlossenen Leitung

die angeschlossenen Leitungsstücke mit ihren Abschlußwiderständen zu einer Gesamtimpedanz $\overleftarrow{Z}(z')$ an der Stelle z'_- beziehungsweise $\overrightarrow{Z}(z')$ an der Stelle z'_+ zusammen. Durch eine lineare Überlagerung der Wirkungen der Strom- und Spannungsquelle erhält man dann den Strom und die Spannung beidseitig vom Quellpunkt:

$$V(z'_+; z') = \frac{-v\overrightarrow{Z}(z')}{\overleftrightarrow{Z}(z')} - \frac{i}{\overleftrightarrow{Y}(z')}, \tag{3.190}$$

$$V(z'_-; z') = \frac{v\overleftarrow{Z}(z')}{\overleftrightarrow{Z}(z')} - \frac{i}{\overleftrightarrow{Y}(z')}, \tag{3.191}$$

$$I(z'_+; z') = \frac{-v}{\overleftrightarrow{Z}(z')} - \frac{i\overrightarrow{Y}(z')}{\overleftrightarrow{Y}(z')}, \tag{3.192}$$

$$I(z'_-; z') = \frac{-v}{\overleftrightarrow{Z}(z')} + \frac{i\overleftarrow{Y}(z')}{\overleftrightarrow{Y}(z')} \tag{3.193}$$

mit

$$\overleftrightarrow{Z}(z') = \overrightarrow{Z}(z') + \overleftarrow{Z}(z'), \tag{3.194}$$

$$\overleftrightarrow{Y}(z') = \overrightarrow{Y}(z') + \overleftarrow{Y}(z'). \tag{3.195}$$

Hierbei ist zu beachten, daß für den rechtsseitigen Abschluß das Verbraucher-Zählpfeilsystem und für den linksseitigen Abschluß das Erzeuger-Zählpfeilsystem gilt, wie es in der Abbildung 4 dargestellt wird. Alle Impedanzen werden jedoch wie rechtsseitige Abschlüsse behandelt, so daß eine entsprechende Vorzeichenumkehr zu berücksichtigen ist.

Die Bestimmung von Strom und Spannung an einer beliebigen Stelle z der Leitung kann nun durch Anwendung der Gleichungen (3.171), (3.172) und (3.159), (3.160) erfolgen. Für den Fall $z > z'$ ergeben sich

$$V(z; z') = -\frac{1}{2}\left[v\frac{\overrightarrow{Z}(z') + Z}{\overleftrightarrow{Z}(z')} + Zi\frac{\overrightarrow{Y}(z') + Y}{\overleftrightarrow{Y}(z')}\right]\left[\mathrm{e}^{-jk_z(z-z')} + \overrightarrow{\Gamma}(z')\mathrm{e}^{jk_z(z-z')}\right], \tag{3.196}$$

$$I(z; z') = -\frac{1}{2}\left[i\frac{\overrightarrow{Y}(z') + Y}{\overleftrightarrow{Y}(z')} + Yv\frac{\overrightarrow{Z}(z') + Z}{\overleftrightarrow{Z}(z')}\right]\left[\mathrm{e}^{-jk_z(z-z')} - \overrightarrow{\Gamma}(z')\mathrm{e}^{jk_z(z-z')}\right]. \tag{3.197}$$

Beim Fall $z < z'$ sind die einfallende und die reflektierte Welle miteinander zu vertauschen, es ist zu beachten, daß die Stromzählpfeile unsymmetrisch zur Quelle sind, und das sich die einfallende Welle jetzt in $-z$-Richtung bewegt. Damit ergeben sich dann für den Fall $z < z'$:

$$\begin{aligned} V(z;z') &= \\ &-\frac{1}{2}\left[-v\frac{\overleftarrow{Z}(z')+Z}{\overleftrightarrow{Z}(z')} + Zi\frac{\overleftarrow{Y}(z')+Y}{\overleftrightarrow{Y}(z')}\right]\left[\mathrm{e}^{jk_z(z-z')} + \overleftarrow{\Gamma}(z')\mathrm{e}^{-jk_z(z-z')}\right], \qquad (3.198) \\ I(z;z') &= \\ &-\frac{1}{2}\left[-i\frac{\overleftarrow{Y}(z')+Y}{\overleftrightarrow{Y}(z')} + Yv\frac{\overleftarrow{Z}(z')+Z}{\overleftrightarrow{Z}(z')}\right]\left[\mathrm{e}^{jk_z(z-z')} - \overleftarrow{\Gamma}(z')\mathrm{e}^{-jk_z(z-z')}\right]. \qquad (3.199) \end{aligned}$$

Bei der Verwendung der Stehwellendarstellung folgen aus den Gleichungen (3.166) und (3.167) für $z > z'$:

$$\begin{aligned} V(z;z') &= \\ &-\left[\frac{v\overrightarrow{Z}(z')}{\overleftrightarrow{Z}(z')} + \frac{i}{\overleftrightarrow{Y}(z')}\right]\left[\cos\left(k_z(z-z')\right) - j\overrightarrow{Y}'(z')\sin\left(k_z(z-z')\right)\right], \qquad (3.200) \\ I(z;z') &= \\ &-\left[\frac{i\overrightarrow{Y}(z')}{\overleftrightarrow{Y}(z')} + \frac{v}{\overleftrightarrow{Z}(z')}\right]\left[\cos\left(k_z(z-z')\right) - j\overrightarrow{Z}'(z')\sin\left(k_z(z-z')\right)\right]. \qquad (3.201) \end{aligned}$$

Für $z < z'$ ergeben sich dann:

$$\begin{aligned} V(z;z') &= \\ &-\left[-\frac{v\overleftarrow{Z}(z')}{\overleftrightarrow{Z}(z')} + \frac{i}{\overleftrightarrow{Y}(z')}\right]\left[\cos\left(k_z(z-z')\right) + j\overleftarrow{Y}'(z')\sin\left(k_z(z-z')\right)\right], \qquad (3.202) \\ I(z;z') &= \\ &-\left[-\frac{i\overleftarrow{Y}(z')}{\overleftrightarrow{Y}(z')} + \frac{v}{\overleftrightarrow{Z}(z')}\right]\left[\cos\left(k_z(z-z')\right) + j\overleftarrow{Z}'(z')\sin\left(k_z(z-z')\right)\right]. \qquad (3.203) \end{aligned}$$

Bei der Betrachtung von Spezialfällen kommt es zu weitreichenden Vereinfachungen in den obigen Gleichungen. Der einfache Spezialfall einer beidseitig unendlich langen Leitung wurde bereits im vorherigen Abschnitt behandelt. Wenn nun die rechte Seite mit $\overrightarrow{Z}$ abgeschlossen wird und sich auf der linken Seite der Quelle eine unendlich lange Leitung befindet, so ergeben sich der Strom und die Spannung entlang der Leitung für $z > z'$ zu

$$V(z;z') = -\frac{1}{2}(v+Zi)\left[\mathrm{e}^{-jk_z(z-z')} + \overrightarrow{\Gamma}(z')\mathrm{e}^{jk_z(z-z')}\right], \qquad (3.204)$$

$$I(z;z') = -\frac{1}{2}(i+Yv)\left[\mathrm{e}^{-jk_z(z-z')} - \overrightarrow{\Gamma}(z')\mathrm{e}^{jk_z(z-z')}\right] \qquad (3.205)$$

und für $z < z'$ zu

$$V(z;z') = -\left[-v\frac{Z}{\overleftrightarrow{Z}(z')} + i\frac{1}{\overleftrightarrow{Y}(z')}\right]\mathrm{e}^{jk_z(z-z')}, \qquad (3.206)$$

$$I(z;z') = -\left[-i\frac{Y}{\overleftrightarrow{Y}(z')} + v\frac{1}{\overleftrightarrow{Z}(z')}\right]\mathrm{e}^{jk_z(z-z')}. \qquad (3.207)$$

Weitere Vereinfachungen sind zum Beispiel eine auf der rechten Seite an der Stelle $z = z_2$ kurzgeschlossene Leitung, für welche dann

$$\vec{Z}'(z') = j \tan\left(k_z(z_2 - z')\right) \tag{3.208}$$

gilt, oder eine auf der rechten Seite an der Stelle $z = z_2$ offene Leitung, für welche dann

$$\vec{Z}'(z') = -j \cot\left(k_z(z_2 - z')\right) \tag{3.209}$$

gilt.

3.3.4 Die Greenschen Funktionen der modalen Amplituden

Da die modalen Greenschen Funktionen die normierten Antworten auf eine Einheitsanregung darstellen, kann man diese aus den Beziehungen des vorherigen Abschnittes herleiten, wenn man für die Strom- beziehungsweise Spannungsquelle jeweils eine Amplitude von eins ansetzt.

Nachfolgend soll nun die modale Greensche Funktion $Y(z; z')$ bestimmt werden. Hierbei handelt es sich um die normierte Stromantwort auf eine Spannungsquelle mit der Amplitude $v = -1$ an der Stelle $z = z'$, wobei keine Stromanregung vorhanden ist, das heißt es gilt $i = 0$. Die allgemeine Lösung für eine beidseitig beliebig abgeschlossene Leitung ergibt sich dann durch Einsetzen in die Gleichung (3.201) für $z > z'$ zu

$$Y(z; z') = Y(z'; z') \left[\cos\left(k_z(z - z')\right) - j\vec{Z}'(z') \sin\left(k_z(z - z')\right)\right] \tag{3.210}$$

und durch Einsetzen in die Gleichung (3.203) für $z < z'$ zu

$$Y(z; z') = Y(z'; z') \left[\cos\left(k_z(z - z')\right) + j\overleftarrow{Z}'(z') \sin\left(k_z(z - z')\right)\right] \tag{3.211}$$

mit

$$Y(z'; z') = \frac{1}{\overleftrightarrow{Z}(z')} = \frac{1}{\overleftarrow{Z}(z') + \vec{Z}(z')}. \tag{3.212}$$

Es ist anzumerken, daß $Y(z'; z')$ nicht von den Quellen abhängt, sondern nur von den links- und rechtsseitigen Impedanzen.

Um $Y(z'; z')$ nicht am Ort der Quelle bestimmen zu müssen, leitet man aus den Gleichungen (3.166) und (3.167) die Beziehungen

$$\vec{Z}(z') = \vec{Z}(z_0) \frac{\cos\left(k_z(z' - z_0)\right) - j\vec{Y}'(z_0) \sin\left(k_z(z' - z_0)\right)}{\cos\left(k_z(z' - z_0)\right) - j\vec{Z}'(z_0) \sin\left(k_z(z' - z_0)\right)}, \tag{3.213}$$

$$\overleftarrow{Z}(z') = \overleftarrow{Z}(z_0) \frac{\cos\left(k_z(z' - z_0)\right) + j\overleftarrow{Y}'(z_0) \sin\left(k_z(z' - z_0)\right)}{\cos\left(k_z(z' - z_0)\right) + j\overleftarrow{Z}'(z_0) \sin\left(k_z(z' - z_0)\right)} \tag{3.214}$$

ab, aus denen dann letztlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overleftrightarrow{Z}(z')} = & \frac{\left[\cos\left(k_z(z' - z_0)\right) + j\overleftarrow{Z}'(z_0) \sin\left(k_z(z' - z_0)\right)\right]}{\overleftrightarrow{Z}(z_0)} \\ & \cdot \left[\cos\left(k_z(z' - z_0)\right) - j\vec{Z}'(z_0) \sin\left(k_z(z' - z_0)\right)\right] \end{aligned} \tag{3.215}$$

folgt. Der Ausdruck in den eckigen Klammern in der Gleichung (3.210) läßt sich als $I(z)/I(z')$ darstellen. Die zweite eckige Klammer in der Gleichung (3.215) kann aufgrund ihrer Ähnlichkeit als $I(z')/I(z_0)$ dargestellt werden. Wenn man jetzt die Gleichung (3.215) in die Gleichung (3.210) einsetzt und den resultierenden Ausdruck $I(z)/I(z_0)$ ähnlich den eckigen Klammern interpretiert, so erhält man für $z > z'$:

$$\begin{aligned} Y(z;z') &= \frac{\left[\cos\left(k_z(z'-z_0)\right) + j\overleftarrow{Z}'(z_0)\sin\left(k_z(z'-z_0)\right)\right]}{\overleftrightarrow{Z}(z_0)} \\ &\quad \cdot \left[\cos\left(k_z(z-z_0)\right) - j\overrightarrow{Z}'(z_0)\sin\left(k_z(z-z_0)\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.216}$$

Aus der Reziprozität von $Y(z;z')$ folgt dann direkt für $z < z'$:

$$\begin{aligned} Y(z;z') &= \frac{\left[\cos\left(k_z(z-z_0)\right) + j\overleftarrow{Z}'(z_0)\sin\left(k_z(z-z_0)\right)\right]}{\overleftrightarrow{Z}(z_0)} \\ &\quad \cdot \left[\cos\left(k_z(z'-z_0)\right) - j\overrightarrow{Z}'(z_0)\sin\left(k_z(z'-z_0)\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.217}$$

Mit Hilfe der Definitionen

$$z_< = \begin{cases} z & \text{für} \quad z < z' \\ z' & \text{für} \quad z > z' \end{cases}, \qquad z_> = \begin{cases} z & \text{für} \quad z > z' \\ z' & \text{für} \quad z < z' \end{cases} \tag{3.218}$$

kann man die beiden Gleichungen (3.216) und (3.217) zur Gleichung

$$\begin{aligned} Y(z;z') &= \frac{\left[\cos\left(k_z(z_<-z_0)\right) + j\overleftarrow{Z}'(z_0)\sin\left(k_z(z_<-z_0)\right)\right]}{\overleftrightarrow{Z}(z_0)} \\ &\quad \cdot \left[\cos\left(k_z(z_>-z_0)\right) - j\overrightarrow{Z}'(z_0)\sin\left(k_z(z_>-z_0)\right)\right] \end{aligned} \tag{3.219}$$

zusammenfassen.

Aufgrund der Dualität erhält man für die modale Greensche Funktion $Z(z;z')$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} Z(z;z') &= \frac{\left[\cos\left(k_z(z_<-z_0)\right) + j\overleftarrow{Y}'(z_0)\sin\left(k_z(z_<-z_0)\right)\right]}{\overleftrightarrow{Y}(z_0)} \\ &\quad \cdot \left[\cos\left(k_z(z_>-z_0)\right) - j\overrightarrow{Y}'(z_0)\sin\left(k_z(z_>-z_0)\right)\right], \end{aligned} \tag{3.220}$$

der entsprechend den normierten Spannungsverlauf bei einer Anregung mit einer Punktstromquelle der Amplitude $i = -1$ darstellt.

Von dieser Stehwellendarstellung der modalen Greenschen Funktionen gelangt man durch Nutzung der Beziehung

$$\begin{aligned} &\cos\left(k_z(z-z_0)\right) \mp j\overleftrightarrow{Z}'(z_0)\sin\left(k_z(z-z_0)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \overleftrightarrow{Z}'(z_0)\right]\left[\mathrm{e}^{\mp jk_z(z-z_0)} - \overleftrightarrow{\Gamma}(z_0)\mathrm{e}^{\pm jk_z(z-z_0)}\right] \end{aligned} \tag{3.221}$$

mit

$$\overset{\rightleftarrows}{\Gamma}(z_0) = \frac{\overset{\rightleftarrows}{Z}{}'(z_0) - 1}{\overset{\rightleftarrows}{Z}{}'(z_0) + 1} = \frac{1 - \overset{\rightleftarrows}{Y}{}'(z_0)}{1 + \overset{\rightleftarrows}{Y}{}'(z_0)} \tag{3.222}$$

zur Wanderwellendarstellung

$$\begin{aligned} Y(z;z') \;=\;& \frac{1}{\overset{\rightleftarrows}{Z}(z_0)} \frac{\mathrm{e}^{jk_z(z_< - z_0)} - \overleftarrow{\Gamma}(z_0)\mathrm{e}^{-jk_z(z_< - z_0)}}{1 - \overleftarrow{\Gamma}(z_0)} \\ & \cdot \frac{\mathrm{e}^{-jk_z(z_> - z_0)} - \overrightarrow{\Gamma}(z_0)\mathrm{e}^{jk_z(z_> - z_0)}}{1 - \overrightarrow{\Gamma}(z_0)} \end{aligned} \tag{3.223}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} Z(z;z') \;=\;& \frac{1}{\overset{\rightleftarrows}{Y}(z_0)} \frac{\mathrm{e}^{jk_z(z_< - z_0)} + \overleftarrow{\Gamma}(z_0)\mathrm{e}^{-jk_z(z_< - z_0)}}{1 + \overleftarrow{\Gamma}(z_0)} \\ & \cdot \frac{\mathrm{e}^{-jk_z(z_> - z_0)} + \overrightarrow{\Gamma}(z_0)\mathrm{e}^{jk_z(z_> - z_0)}}{1 + \overrightarrow{\Gamma}(z_0)}. \end{aligned} \tag{3.224}$$

Letztendlich soll ein geschichtetes Medium über eine Kettenschaltung einzelner Leitungsstücke modelliert werden. Um bei dieser Kettenschaltung nur die Abschlüsse der Leitungen beachten zu müssen, wird die Gleichung (3.224) zur numerischen Auswertung etwas modifiziert. Für die normierte Spannungsantwort auf dem n-ten Leitungsabschnitt ergibt sich durch die Nutzung der Beziehung

$$Y_n = \frac{1 + \overset{\rightleftarrows}{\Gamma}_n(z)}{1 - \overset{\rightleftarrows}{\Gamma}_n(z)} \overset{\rightleftarrows}{Y}_n(z) \tag{3.225}$$

zunächst

$$Z(z;z') = \frac{\mathrm{e}^{-jk_{zn}|z-z'|}}{2Y_n} \frac{\left[1 + \overleftarrow{\Gamma}_n(z_0)\mathrm{e}^{-j2k_{zn}(z_< - z_0)}\right]\left[1 + \overrightarrow{\Gamma}_n(z_0)\mathrm{e}^{j2k_{zn}(z_> - z_0)}\right]}{1 - \overleftarrow{\Gamma}_n(z_0)\overrightarrow{\Gamma}_n(z_0)}, \tag{3.226}$$

sofern sich die Punktstromquelle ebenfalls in dem n-ten Leitungsstück befindet. Man beachte, daß der Index n bei k_{zn} jetzt auf den n-ten Leitungsabschnitt und nicht Modus hinweist. Durch Umschreiben des Reflexionsfaktors zu

$$\overset{\rightleftarrows}{\Gamma}_n(z) = \overset{\rightleftarrows}{\Gamma}_n(z_0)\mathrm{e}^{\pm j2k_{zn}(z-z_0)} \tag{3.227}$$

ergibt sich schließlich

$$Z(z;z') = \frac{\mathrm{e}^{-jk_{zn}|z-z'|}}{2Y_n} \frac{\left[1 + \overleftarrow{\Gamma}_n\mathrm{e}^{-j2k_{zn}(z_< - z_n)}\right]\left[1 + \overrightarrow{\Gamma}_n\mathrm{e}^{-j2k_{zn}(z_{n+1} - z_>)}\right]}{1 - \overleftarrow{\Gamma}_n\overrightarrow{\Gamma}_n\mathrm{e}^{-j2k_{zn}h_n}}, \tag{3.228}$$

sofern die n-te Leitung von z_n bis z_{n+1} reicht, sowie

$$h_n = z_{n+1} - z_n, \tag{3.229}$$

$$\overleftarrow{\Gamma}_n = \overleftarrow{\Gamma}_n(z_n) \tag{3.230}$$

und

$$\overrightarrow{\Gamma}_n = \overrightarrow{\Gamma}(z_{n+1}) \tag{3.231}$$

gelten.

Auf jedem anderen quellenfreien Leitungsstück $m \neq n$ ergibt sich für die normierte Spannung unter Verwendung der Gleichung (3.156) und Beachtung der unterschiedlichen Bezugsrichtungen der einfallenden Welle im allgemeinen

$$Z(z;z') = Z(z_0;z') \frac{\mathrm{e}^{\mp jk_{zm}(z-z_0)}}{1 + \overleftrightarrow{\Gamma}_m(z_0)} \left[1 + \overleftrightarrow{\Gamma}_m(z_0)\mathrm{e}^{\pm j2k_{zm}(z-z_0)}\right], \tag{3.232}$$

wobei die obere Möglichkeit für $z \geq z_0$ und die untere für $z < z_0$ gilt. Für z_0 wählt man z_m für links liegende Quellen und z_{m+1} für rechts liegende Quellen. Damit ergibt sich unter Beachtung der Gleichungen (3.227), (3.229), (3.230) und (3.231) für links liegende Quellen

$$Z(z;z') = Z(z_m;z') \frac{\mathrm{e}^{-jk_{zm}(z-z_m)}}{1 + \overrightarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}h_m}} \left[1 + \overrightarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}(z_{m+1}-z)}\right] \tag{3.233}$$

und für rechts liegende Quellen

$$Z(z;z') = Z(z_{m+1};z') \frac{\mathrm{e}^{-jk_{zm}(z_{m+1}-z)}}{1 + \overleftarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}h_m}} \left[1 + \overleftarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}(z-z_m)}\right]. \tag{3.234}$$

Durch Berücksichtigung der Dualität erhält man schließlich für die Greensche Funktion $Y(z;z')$ die allgemeine Darstellung

$$Y(z;z') = \frac{\mathrm{e}^{-jk_{zn}|z-z'|}}{2Z_n} \frac{\left[1 - \overleftarrow{\Gamma}_n \mathrm{e}^{-j2k_{zn}(z_<-z_n)}\right]\left[1 - \overrightarrow{\Gamma}_n \mathrm{e}^{-j2k_{zn}(z_{n+1}-z_>)}\right]}{1 - \overleftarrow{\Gamma}_n \overrightarrow{\Gamma}_n \mathrm{e}^{-j2k_{zn}h_n}}, \tag{3.235}$$

sowie für die quellenfreien Leitungsabschnitte mit linksseitiger Quelle die Darstellung

$$Y(z;z') = Y(z_m;z') \frac{\mathrm{e}^{-jk_{zm}(z-z_m)}}{1 - \overrightarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}h_m}} \left[1 - \overrightarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}(z_{m+1}-z)}\right] \tag{3.236}$$

und schließlich für die quellenfreien Leitungsabschnitte mit rechtsseitiger Quelle die Darstellung

$$Y(z;z') = Y(z_{m+1};z') \frac{\mathrm{e}^{-jk_{zm}(z_{m+1}-z)}}{1 - \overleftarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}h_m}} \left[1 - \overleftarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}(z-z_m)}\right]. \tag{3.237}$$

Die Greensche Funktion $T^I(z;z')$, welche die normierte Stromantwort auf eine Punktstromquelle der Amplitude $i = -1$ an der Stelle $z = z'$ darstellt, wird jetzt aus der Gleichung (3.85) zu

$$\begin{aligned} T^I(z;z') = {} & u(z;z') \frac{\mathrm{e}^{-jk_{zn}|z-z'|}}{2} \\ & \cdot \frac{\left[1 + u(z;z')\overleftarrow{\Gamma}_n \mathrm{e}^{-j2k_{zn}(z_<-z_n)}\right]\left[1 - u(z;z')\overrightarrow{\Gamma}_n \mathrm{e}^{-j2k_{zn}(z_{n+1}-z_>)}\right]}{1 - \overleftarrow{\Gamma}_n \overrightarrow{\Gamma}_n \mathrm{e}^{-j2k_{zn}h_n}} \end{aligned} \tag{3.238}$$

ermittelt, wobei man die Vorzeichenfunktion $u(z;z')$ aus der Gleichung (3.189) beachte. Aus der Reziprozitätsrelation (3.97) ergibt sich dann die Greensche Funktion $T^V(z;z')$, welche die Spannungsantwort auf eine Punktspannungsquelle der Amplitude $v=-1$ an der Stelle $z=z'$ darstellt, zu

$$T^V(z;z') = u(z;z')\frac{\mathrm{e}^{-jk_{zn}|z-z'|}}{2} \cdot \frac{\left[1-u(z;z')\overleftarrow{\Gamma}_n \mathrm{e}^{-j2k_{zn}(z_<-z_n)}\right]\left[1+u(z;z')\overrightarrow{\Gamma}_n \mathrm{e}^{-j2k_{zn}(z_{n+1}-z_>)}\right]}{1-\overleftarrow{\Gamma}_n\overrightarrow{\Gamma}_n \mathrm{e}^{-j2k_{zn}h_n}}, \qquad (3.239)$$

wobei $u(z;z') = -u(z';z)$ beachtet wurde.

Auf jedem anderen quellenfreien Leitungsstück $m \neq n$ gilt für $T^I(z;z')$ durch Nutzung der Gleichung (3.85) für linksseitige Quellen

$$T^I(z;z') = \frac{Z(z_m;z')}{Z_m}\frac{\mathrm{e}^{-jk_{zm}(z-z_m)}}{1+\overrightarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}h_m}}\left[1-\overrightarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}(z_{m+1}-z)}\right] \qquad (3.240)$$

und für rechtsseitige Quellen

$$T^I(z;z') = -\frac{Z(z_{m+1};z')}{Z_m}\frac{\mathrm{e}^{-jk_{zm}(z_{m+1}-z)}}{1+\overleftarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}h_m}}\left[1-\overleftarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}(z-z_m)}\right]. \qquad (3.241)$$

Entsprechend ergibt sich auf jedem quellenfreien Leitungsstück $m \neq n$ für $T^V(z;z')$ durch Nutzung der Gleichung (3.84) bei linksseitigen Quellen

$$T^V(z;z') = \frac{Y(z_m;z')}{Y_m}\frac{\mathrm{e}^{-jk_{zm}(z-z_m)}}{1-\overrightarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}h_m}}\left[1+\overrightarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}(z_{m+1}-z)}\right] \qquad (3.242)$$

und dementsprechend bei rechtsseitigen Quellen

$$T^V(z;z') = -\frac{Y(z_{m+1};z')}{Y_m}\frac{\mathrm{e}^{-jk_{zm}(z_{m+1}-z)}}{1-\overleftarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}h_m}}\left[1+\overleftarrow{\Gamma}_m \mathrm{e}^{-j2k_{zm}(z-z_m)}\right]. \qquad (3.243)$$

3.4 Bestimmung der skalaren Modusfunktionen

Nachdem zuvor die Greenschen Funktionen für die modalen Amplituden berechnet wurden, sollen nun die skalaren Modusfunktionen abgeleitet werden. Hierzu geht man zunächst von einer rechteckigen, ideal elektrisch leitenden Begrenzung des Raumgebietes in transversaler Richtung aus. In einem Grenzübergang geht man dann von diesem Rechteckhohlleiter auf ein transversal unbeschränktes Raumgebiet über.

3.4.1 Endlicher rechteckiger Querschnitt

Wie oben gezeigt, erfüllen die skalaren Modusfunktionen Φ_i und Ψ_i die skalare homogene Wellengleichung. Im Falle einer endlichen ideal leitenden Begrenzung in transversaler

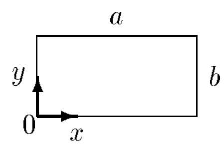


Abbildung 5: Rechteckiger Wellenleiterquerschnitt

Richtung ergeben sich aus dem Verschwinden der tangentialen elektrischen Feldstärke auf der Grenzfläche die Randbedingungen

$$\Phi_i(\vec{\varrho}_{\mathrm{Rand}}) = 0 \tag{3.244}$$

beziehungsweise

$$\frac{\partial}{\partial \hat{u}} \Psi_i(\vec{\varrho}_{\mathrm{Rand}}) = 0, \tag{3.245}$$

wobei $\hat{u}$ senkrecht zum Rand verlaufe. Hierbei wird für den Wellenleiter zunächst ein endlicher Querschnitt gemäß der Abbildung 5 angenommen. Die Wahl des Nullpunktes erfolgt ebenfalls laut dieser Abbildung.

Nun werden zunächst die Φ_i betrachtet. Wählt man für diese den Separationsansatz nach Bernoulli

$$\Phi_i(\vec{\varrho}) = \Phi_p(x)\Phi_q(y) \tag{3.246}$$

so ergeben sich durch Einsetzen in die Wellengleichung (3.60) nach entsprechender Separation die eindimensionalen Differentialgleichungen

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + p^2\right)\Phi_p(x) = 0, \qquad \Phi_p(0) = \Phi_p(a) = 0, \tag{3.247}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + q^2\right)\Phi_q(y) = 0, \qquad \Phi_q(0) = \Phi_q(b) = 0, \tag{3.248}$$

wobei die Separationskonstanten über

$$k_{ti}'^2 = p^2 + q^2 \tag{3.249}$$

miteinander verknüpft sind. Diese Differentialgleichungen stellen jeweils ein Eigenwertproblem dar, welches über die Ansätze

$$\Phi_p(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(px), \qquad p = \frac{m\pi}{a}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{3.250}$$

$$\Phi_q(y) = \sqrt{\frac{2}{b}}\sin(qy), \qquad q = \frac{n\pi}{b}, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{3.251}$$

jeweils gelöst werden kann, wie man durch Einsetzen unmittelbar sieht. Die Faktoren wurden dabei so gewählt, daß die Eigenfunktionen orthonormiert sind. Durch Integration des Produktes der Eigenfunktionen über den entsprechenden Wellenleiterbereich kann dies sofort gezeigt werden.

Bei den Differentialgleichungen (3.247) und (3.248) handelt es sich um Spezialfälle des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems.[4] Da es sich dabei ferner jeweils um ein homogenes Eigenwertproblem handelt, stellen die Eigenfunktionen einen vollständigen Satz orthonormaler Basisfunktionen dar, sofern geeignet normiert wurde. Somit kann zum Beispiel jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $z(x)$, die die gleichen Randbedingungen erfüllt wie die Eigenfunktionen, als eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe der Eigenfunktionen dargestellt werden:

$$z(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \Phi_{p(m)}(x). \tag{3.252}$$

Die Entwicklungskoeffizienten c_m ergeben sich dabei wegen der Orthonormalität der Eigenfunktionen aus

$$c_m = \int_0^a z(x)\Phi^*_{p(m)}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.253}$$

Die komplexe Konjugierung hat hier noch keine Auswirkung, da die betrachteten Eigenfunktionen reell sind, sie sei der Vollständigkeit halber jedoch angegeben. Durch Einsetzen der Koeffizienten in die Reihendarstellung erhält man dann

$$z(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^a z(x')\Phi^*_{p(m)}(x')\,\mathrm{d}x'\Phi_{p(m)}(x) = \int_0^a z(x') \left(\sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{p(m)}(x)\Phi^*_{p(m)}(x') \right) \mathrm{d}x';$$

die runde Klammer stellt also offenbar die Diracsche Distribution $\delta(x - x')$ dar.

Angewendet auf die ursprünglich betrachteten Eigenfunktionen ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \delta(x-x') &= \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{p(m)}(x)\Phi^*_{p(m)}(x') \\ &= \frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right), \qquad x, x' \in (0;a) \end{aligned} \tag{3.254}$$

und

$$\begin{aligned} \delta(y-y') &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{q(n)}(y)\Phi^*_{q(n)}(y') \\ &= \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right), \qquad y, y' \in (0;b). \end{aligned} \tag{3.255}$$

Wegen der Separabilität der Diracschen Distribution erhält man für den zweidimensionalen Fall

$$\begin{aligned} \delta(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}') &= \delta(x-x')\delta(y-y') \\ &= \sum_i \Phi_i(\vec{\varrho})\Phi^*_i(\vec{\varrho}'), \qquad x, x' \in (0;a), \qquad y, y' \in (0;b) \\ &= \frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) \end{aligned} \tag{3.256}$$

[4] vergl. [30]

mit den zweidimensionalen E-Modusfunktionen

$$\Phi_i(\vec{\varrho}) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \qquad m, n \in \mathbb{N}, \tag{3.257}$$

und der transversalen Wellenzahl

$$k_{ti}'^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \tag{3.258}$$

Die Summe $\sum_i$ stellt hierbei symbolisch die Doppelsumme $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}$ dar.

Für die normierten Eigenfunktionen der H-Moden ergibt sich die Lösung der Differentialgleichung (3.61) unter Beachtung der Randbedingung (3.245) in ähnlicher Weise wie zuvor. Der entsprechende Separationsansatz führt dabei zu den Separatlösungen

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}, \tag{3.259}$$

$$\Psi_p(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos(px), \qquad p = \frac{m\pi}{a}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{3.260}$$

$$\Psi_0(y) = \frac{1}{\sqrt{b}}, \tag{3.261}$$

$$\Psi_q(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \cos(qy), \qquad q = \frac{n\pi}{b}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.262}$$

Diese sind erneut orthonormal aufgrund einer entsprechenden Wahl der Vorfaktoren. Die Vollständigkeit dieser Separatlösungen läßt sich erneut für die Darstellungen

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{p(m)}(x)\Psi_{p(m)}^*(x') \\ &= \frac{1}{a}\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{a}\right), \qquad x, x' \in (0; a), \end{aligned} \tag{3.263}$$

$$\begin{aligned} \delta(y - y') &= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{q(n)}(y)\Psi_{q(n)}^*(y') \\ &= \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right), \qquad y, y' \in (0; b) \end{aligned} \tag{3.264}$$

nutzen, wobei

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad m = 0 \\ 2 & \text{für} \quad m \geq 1 \end{cases} \tag{3.265}$$

gesetzt wurde. Für die zweidimensionale Diracsche Distribution kann man damit

$$\begin{aligned} \delta(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}') &= \delta(x - x')\delta(y - y') \\ &= \sum_i \Psi_i(\vec{\varrho})\Psi_i^*(\vec{\varrho}'), \qquad x, x' \in (x; a), \qquad y, y' \in (0; b) \\ &= \frac{1}{ab}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_m \epsilon_n \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ &\quad \cdot \cos\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) \end{aligned} \tag{3.266}$$

schreiben, wobei sich die zweidimensionalen H-Modusfunktionen also letztlich zu

$$\Psi_i(\vec{\varrho}) = \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \qquad m, n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.267}$$

ergeben und für die transversale Wellenzahl

$$k_{ti}''^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{3.268}$$

gilt. Die Summe $\sum_i$ stellt also hierbei symbolisch die Doppelsumme $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}$ dar.

3.4.2 Transversal allseitig unbeschränkter Querschnitt

Um vom endlichen rechteckigen Querschnitt zum transversal unbegrenzten Raum zu gelangen, wird in zwei Stufen vorgegangen. Zunächst werden zwei gegenüber liegende Grenzflächen ins Unendliche verschoben, so daß man eine Plattenleitung erhält. Im zweiten Schritt werden dann diese Platten ebenfalls per Grenzwertbildung ins Unendliche verlagert.

Es wird nun also zunächst einmal der Übergang zum Platten-Wellenleiter betrachtet, wobei man vom rechteckigen Querschnitt in Abbildung 5 ausgeht. Der Ursprung des Koordinatensystems sei dabei derart in y-Richtung verschoben, daß der Rand des noch endlichen rechtreckigen Querschnittes bei $y = -b/2$ und $y = +b/2$ liegt. Da vor Bildung des Grenzüberganges noch die gleichen Differentialgleichungen und Randbedingungen gelten wie zuvor, ist das Lösungsverfahren ähnlich. Die Separatlösungen $\Phi_p(x)$ und $\Psi_p(x)$ bleiben unverändert, da sich die für sie gültigen Randbedingungen nicht verändern. Die Lösung für $\Phi_q(y)$ soll nun über die entsprechende Darstellung der Diracschen Distribution gewonnen werden. Durch Beachtung der Ursprungverlagerung ergibt sich zunächst einmal für endliche Grenzen

$$\begin{aligned}
\delta(y-y') &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{q(n)}(y)\Phi_{q(n)}^*(y') \\
&= \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi\left(y+\frac{b}{2}\right)}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi\left(y'+\frac{b}{2}\right)}{b}\right), \qquad y, y' \in \left(-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right) \\
&= \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi y'}{b}\right) + \\
&\quad \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{2n\pi y'}{b}\right),
\end{aligned}$$

wobei das trigonometrische Additionstheorem angewendet und die speziellen Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen beachtet wurden. Hierbei erkennt man, daß sich bei einer symmetrischen Plazierung des Nullpunktes sowohl Sinus- als auch Kosinus-Eigenfunktionen ergeben.

Um nun den Grenzwert bilden zu können, führt man in den Kosinustermen der vorhergehenden Gleichung die Substitutionen

$$\eta_n = \frac{(2n-1)\pi}{b}, \qquad \Delta\eta_n = \eta_{n+1} - \eta_n = \frac{2\pi}{b} \tag{3.269}$$

und in deren Sinustermen die Substitutionen

$$\eta_n = \frac{2n\pi}{b}, \qquad \Delta\eta_n = \eta_{n+1} - \eta_n = \frac{2\pi}{b} \tag{3.270}$$

durch. Die Grenzwertbildung ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned}
\delta(y-y') &= \lim_{b\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\eta_n y)\cos(\eta_n y') \frac{\Delta\eta_n}{\pi} + \lim_{b\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\eta_n y)\sin(\eta_n y') \frac{\Delta\eta_n}{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(\eta y)\cos(\eta y')\,\mathrm{d}\eta + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin(\eta y)\sin(\eta y')\,\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(\eta(y-y'))\,\mathrm{d}\eta.
\end{aligned} \tag{3.271}$$

Man erkennt also, daß durch den Grenzübergang an die Stelle der diskreten Eigenwerte $q^2(n)$ die kontinuierlichen Eigenwerte η^2 getreten sind. Die letzte Gleichung kann nun über die Eulersche Formel zu

$$\begin{aligned}
\delta(y-y') &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(\eta(y-y'))\,\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{j\eta(y-y')}\mathrm{d}\eta + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-j\eta(y-y')}\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{j\eta(y-y')}\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-j\eta(y-y')}\mathrm{d}\eta \\
&= \sum_\eta \Phi_\eta(y)\Phi_\eta^*(y')
\end{aligned}$$

umgeformt werden. Hierbei zeigt es sich, daß sowohl Eigenfunktionen mit positivem als auch negativem Vorzeichen im Exponenten existieren. Da die Anwendung der Ausstrahlungsbedingung jedoch nur transversal herauslaufende Wellen zuläßt, kommt bei einer Zeitabhängigkeit von $\mathrm{e}^{j\omega t}$ nur das negative Vorzeichen in Frage. Die letzte Summe ist dabei symbolisch zu sehen; die skalaren Modusfunktionen werden im unbegrenzten Falle zu einem Dichtemaß bezüglich der Eigenwerte, dessen Interpretation nur im integralen Sinne möglich ist. Aus der letzten Gleichung lassen sich damit die eindimensionalen skalaren Modusfunktionen für eine E-Welle zu

$$\Phi_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-j\eta y}, \qquad -\infty < y < \infty, \qquad -\infty < \eta < \infty \tag{3.272}$$

herleiten, womit diese Funktionen also offenbar *komplex* sind. Diese Eigenfunktionen sind wieder orthonormal, sofern man die an den kontinuierlichen Fall angepaßte Orthonormalitätsbeziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\eta(y)\Phi^*_{\eta'}(y)\mathrm{d}y = \delta(\eta - \eta') \tag{3.273}$$

verwendet. Man beachte hierbei den Austausch des Kronecker-Delta durch das Dirac-Delta. Da die Grenzen im Unendlichen „verschwinden", besitzen die Randwerte keine Auswirkung mehr auf die Lösung, das heißt die Separatlösungen mit y-Abhängigkeit für den E- und H-Modus sind identisch. Dies ergibt sich auch formal, indem man eine zu der obigen Herleitung analoge Rechnung, ausgehend von den $\Psi_{q(n)}(y)$, durchführt. Damit ergibt sich dann also

$$\Psi_\eta(y) = \Phi_\eta(y). \tag{3.274}$$

Hiermit besitzt man nun die Eigenfunktionen eines Platten-Wellenleiters. Bezüglich der unendlich ausgedehnten Richtung handelt es sich dabei um überabzählbar viele Eigenfunktionen zu kontinuierlichen Eigenwerten, die ein Dichtemaß darstellen, bezüglich der begrenzten Raumrichtung existieren abzählbar viele Eigenfunktionen zu diskreten Eigenwerten. Auf diese Anordnung soll jedoch nicht weiter eingegangen werden.

Um zum allseitig transversal unendlichen Wellenleiter zu gelangen, kann man nun entsprechende Überlegungen für die x-Richtung anstellen. Betrachtet man jedoch die obige Rechnung genauer, so kann man feststellen, daß die Abmessung b beim Grenzprozeß eliminiert wird, woraus unmittelbar folgt, daß sich für die Separatlösung mit x-Abhängigkeit das gleiche Ergebnis ergibt. Dementsprechend ergeben sich

$$\Phi_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-j\xi x}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad -\infty < \xi < \infty \tag{3.275}$$

und

$$\Psi_\xi(x) = \Phi_\xi(x), \tag{3.276}$$

wobei ξ die kontinuierlichen, der x-Richtung entsprechenden Eigenwerte darstellt.

Für die zweidimensionalen Modusfunktionen ergibt sich damit

$$\Phi_i(\vec{\varrho}) = \Psi_i(\vec{\varrho}) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-j(\xi x + \eta y)}, \qquad -\infty < \xi < \infty, \qquad -\infty < \eta < \infty \tag{3.277}$$

mit der transversalen Wellenzahl

$$k_{ti}^2 = \xi^2 + \eta^2. \tag{3.278}$$

Die zweidimensionale Diracsche Distribution läßt sich damit aufgrund der weiterhin gültigen Vollständigkeit des Satzes aller Eigenfunktionen als

$$\begin{aligned}
\delta(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}') &= \sum_i \Phi_i(\vec{\varrho})\Phi_i^*(\vec{\varrho}'), \qquad x, x' \in (-\infty;\infty), \qquad y, y' \in (-\infty;\infty) \\
&= \sum_i \Psi_i(\vec{\varrho})\Psi_i^*(\vec{\varrho}') \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j(\xi x + \eta y)}\mathrm{e}^{j(\xi x' + \eta y')}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi
\end{aligned} \tag{3.279}$$

darstellen. Die Summe $\sum_i$ steht hier also symbolisch für den doppelten Integraloperator $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\eta\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi$.

4 Die Greenschen Dyaden

Auf der Grundlage der bisher hergeleiteten Beziehungen sollen nun die gesuchten Greenschen Dyaden berechnet werden. Die Rechnungen erfolgen dabei im Fourierbereich, wobei die zweidimensionale Fouriertransformation und deren Inverse weiterhin über die Gleichungen (2.30) und (2.31) definiert sei. Führt man die Bezeichnung

$$\vec{k}_t = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} \tag{4.1}$$

ein, so ergeben sich für die Fouriertransformierten der transversalen Nablaoperatoren

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_t &= -j\vec{k}_t, && (4.2) \\ \tilde{\nabla}'_t &= j\vec{k}_t, && (4.3) \end{aligned}$$

sofern man annimmt, daß der transversal ortsabhängige Operand nicht explizit bezüglich Aufpunkt $\vec{\varrho}$ und Quellpunkt $\vec{\varrho}'$ sondern eigentlich nur von $(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}')$ abhängig ist. Dies ist hier gegeben, da die hier betrachteten Strukturen transversal homogen sind. Desweiteren wird das Koordinatensystem ohne Beschränkung der Allgemeinheit so gelegt, daß stets $\vec{\varrho}' = \vec{0}$ ist. Der transversale Positionsvektor $\vec{\varrho}$ stellt dann direkt den Abstandsvektor von Auf- und Quellpunkt dar.

4.1 Die Greensche Dyade des magnetischen Feldes für eine elektrische Anregung

An dieser Stelle soll nun diejenige Greensche Dyade ermittelt werden, welche den Beitrag der elektrischen Stromdichte zur magnetischen Feldstärke beschreibt. Zur Berechnung der magnetischen Feldstärke geht man von der Gleichung (3.73) aus, welche für diejenigen Bereiche gilt, die frei von magnetischen Quellen sind. Somit ergibt sich dann

$$\boldsymbol{H}(\vec{r}) = j\omega\varepsilon(z)\mathrm{rot}\left(\hat{z}\Pi'(\vec{r})\right) + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(\hat{z}\Pi''(\vec{r})\right), \tag{4.4}$$

sofern man weiterhin ein stückweise homogenes Medium annimmt. Transformiert man diese Gleichung in den Fourierbereich, so erhält man unter Beachtung der Beziehung (4.2) schließlich

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}(z;z') = \left(-j\vec{k}_t\frac{\partial}{\partial z} + \hat{z}k_t^2\right)\tilde{\Pi}''(z;z') - j\omega\varepsilon(z)j\vec{k}_t \times \hat{z}\tilde{\Pi}'(z;z'), \tag{4.5}$$

sofern man für die elektrische Stromdichte eine Punktquelle gemäß der Definition (3.98) ansetzt und berücksichtigt, daß die Beziehung

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(\hat{z}\Pi''(\vec{r})\right) = \left[\nabla_t\frac{\partial}{\partial z} - \hat{z}\left(\nabla_t\cdot\nabla_t\right)\right]\Pi''(\vec{r}) \tag{4.6}$$

gilt.

Zunächst soll der Term mit dem fouriertransformierten Hertzschen Potential $\tilde{\Pi}'$ ermittelt werden. Bei einer elektrischen Anregung resultiert das Hertzsche Potential nur aus der elektrischen Stromdichte. Über die Gleichung (3.76) ergibt sich durch Einsetzen der Gleichung (3.135) für den Beitrag der z-Komponente der elektrischen Stromdichte zu diesem Hertzschen Potential:

$$\Pi^{z\prime}(\vec{r}) = \frac{J_z^0}{j\omega\varepsilon(z)} G'\left(\vec{r};\vec{0}\right).$$

Beachtet man, daß die Funktion $G'\left(\vec{r};\vec{0}\right)$ im Falle einer transversal unendlichen Ausdehnung des Mediums die Form einer zweidimensionalen inversen Fouriertransformation annimmt, sofern man die entsprechenden oben berechneten Modusfunktionen einsetzt, so kann man aus der Gleichung (3.136) unmittelbar deren Fouriertransformierte ablesen, womit sich dann

$$\tilde{\Pi}^{z\prime}(z;z') = \frac{J_z^0}{j\omega\varepsilon(z)} \frac{Y'(z;z')}{j\omega\varepsilon(z')} \tag{4.7}$$

ergibt. Der Beitrag der transversalen elektrischen Punktstromdichte zum Hertzschen Potential Π' ergibt sich durch Einsetzen der Gleichung (3.114) in die Gleichung (3.76) zu

$$\Pi^{t\prime}(\vec{r}) = \frac{\boldsymbol{J}_t^0}{j\omega\varepsilon(z) j\omega\varepsilon(z')} \cdot \frac{\partial}{\partial z'} \nabla_t' \mathcal{L}_d'\left(\vec{r};\vec{0}\right),$$

wobei erneut die Beziehung (4.6) im übertragenen Sinne angewandt wurde. Hierbei stellt der Ausdruck $\mathcal{L}_d'\left(\vec{r};\vec{0}\right)$ wieder ein zweidimensionales inverses Fourierintegral dar, sofern ein transversal unbeschränktes Medium betrachtet wird, so daß sich die Fouriertransformierte der letzten Gleichung schließlich zu

$$\tilde{\Pi}^{t\prime}(z;z') = \frac{j\vec{k}_t \cdot \boldsymbol{J}_t^0}{j\omega\varepsilon(z) j\omega\varepsilon(z')} \frac{\partial}{\partial z'} \frac{Y'(z;z')}{k_t^2} \tag{4.8}$$

ergibt. Das Hertzsche Gesamtpotential im Fourierbereich ergibt sich damit aus der Summe der Gleichungen (4.7) und (4.8) zu

$$\tilde{\Pi}'(z;z') = \frac{j\vec{k}_t \cdot \boldsymbol{J}_t^0}{j\omega\varepsilon(z) j\omega\varepsilon(z')} \frac{\partial}{\partial z'} \frac{Y'(z;z')}{k_t^2} + \frac{J_z^0}{j\omega\varepsilon(z)} \frac{Y'(z;z')}{j\omega\varepsilon(z')}. \tag{4.9}$$

Durch Ersetzen der Ableitung nach z' mittels der Beziehung (3.106) und der Tatsache, daß $jk_z(z')Y'(z') = j\omega\varepsilon(z')$ ist, erhält man letztlich

$$\tilde{\Pi}'(z;z') = \frac{j\vec{k}_t \cdot \boldsymbol{J}_t^0}{j\omega\varepsilon(z) k_t^2} T^{I\prime}(z;z') + \frac{J_z^0}{j\omega\varepsilon(z)} \frac{Y'(z;z')}{j\omega\varepsilon(z')}, \tag{4.10}$$

woraus sich sofort

$$-j\omega\varepsilon(z) j\vec{k}_t \times \hat{z}\tilde{\Pi}'(z;z') = \left(\vec{k}_t \times \hat{z}\right) \left(\frac{\vec{k}_t \cdot \boldsymbol{J}_t^0}{k_t^2} T^{I\prime}(z;z') - \frac{Y'(z;z')}{\omega\varepsilon(z')} J_z^0\right) \tag{4.11}$$

ergibt.

Für das Hertzsche Potential Π'' ergibt sich aus der Gleichung (3.77) durch Einsetzen der Beziehung (3.118)

$$\Pi''(\vec{r}) = \frac{\mathtt{L}_1{}' \mathcal{L}_d''\left(\vec{r};\vec{0}\right) \cdot \boldsymbol{J}^0}{j\omega\mu(z)}.$$

Die Fouriertransformation dieses Ausdrucks ergibt sich dann unter Beachtung der Tatsache, daß der Ausdruck $\mathcal{L}_d''\left(\vec{r};\vec{0}\right)$ in diesem Falle erneut ein inverses Fourierintegral darstellt, zu

$$\tilde{\Pi}''(z;z') = \frac{\hat{z}\times \boldsymbol{J}_t^0}{j\omega\mu(z)}\cdot j\vec{k}_t\frac{Z''(z;z')}{k_t^2}, \tag{4.12}$$

wobei die Transformationsbeziehung (4.3) beachtet und eine zyklische Vertauschung durchgeführt wurde. Die z-Ableitung dessen ergibt sich dann mit der Gleichung (3.85) zu

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\Pi}''(z;z') = -\frac{\left(\hat{z}\times \boldsymbol{J}_t^0\right)\cdot j\vec{k}_t}{k_t^2}T^{I''}(z;z'). \tag{4.13}$$

Die magnetische Feldstärke einer elektrischen Punktquelle ergibt sich dann im Fourierbereich durch Einsetzen der Beziehungen (4.11), (4.12) und (4.13) in die Gleichung (4.5) zu

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{H}}(z;z') \quad = \quad & \left(\vec{k}_t\times\hat{z}\right)\frac{\vec{k}_t\cdot \boldsymbol{J}^0}{k_t^2}T^{I'}(z;z') - \left(\vec{k}_t\times\hat{z}\right)\frac{Y'(z;z')}{\omega\varepsilon(z')}\hat{z}\cdot \boldsymbol{J}^0\\ & -\vec{k}_t\left[\left(\hat{z}\times \boldsymbol{J}^0\right)\cdot\frac{\vec{k}_t}{k_t^2}T^{I''}(z;z')\right] + \hat{z}\left(\frac{\hat{z}\times \boldsymbol{J}^0}{\omega\mu(z)}\cdot\vec{k}_t Z''(z;z')\right).\end{aligned} \tag{4.14}$$

Durch die Einführung der abkürzenden Schreibweise

$$\hat{u} = \frac{\vec{k}_t}{k_t}, \qquad \hat{v} = \hat{z}\times\hat{u} \tag{4.15}$$

läßt sich hieraus die fouriertransformierte Greensche Dyade $\underline{\tilde{G}}_{HJ}$ über die Definition

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}(z;z') = \underline{\tilde{G}}_{HJ}(z;z')\cdot \boldsymbol{J}^0 \tag{4.16}$$

gewinnen:

$$\underline{\tilde{G}}_{HJ}(z;z') = \hat{u}\hat{v}T^{I''}(z;z') - \hat{v}\hat{u}T^{I'}(z;z') + \hat{v}\hat{z}\frac{k_t}{\omega\varepsilon(z')}Y'(z;z') - \hat{z}\hat{v}\frac{k_t}{\omega\mu(z)}Z''(z;z'). \tag{4.17}$$

4.2 Die Greensche Dyade des elektrischen Feldes für eine magnetische Anregung

Die Greensche Dyade für den ausschließlich durch die magnetische Stromdichte erzeugten Anteil der elektrischen Feldstärke erhält man in ähnlicher Weise wie im vorherigen Falle. Zur Berechnung der elektrischen Feldstärke geht man von der Gleichung (3.72) aus, die für diejenigen Bereiche gilt, die keine elektrischen Quellen enthalten. Somit ergibt sich dann

$$\boldsymbol{E}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\hat{z}\Pi'(\vec{r})\right) - j\omega\mu(z)\operatorname{rot}\left(\hat{z}\Pi''(\vec{r})\right), \tag{4.18}$$

sofern man weiterhin ein stückweise homogenes Medium annimmt. Transformiert man diese Gleichung in den Fourierbereich, so erhält man unter Beachtung der Beziehung (4.2) schließlich

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(z;z') = \left(-j\vec{k}_t\frac{\partial}{\partial z} + \hat{z}k_t^2\right)\tilde{\Pi}'(z;z') + j\omega\mu(z)j\vec{k}_t\times\hat{z}\tilde{\Pi}''(z;z'), \tag{4.19}$$

sofern man für die magnetische Stromdichte eine Punktquelle gemäß der Definition (3.99) ansetzt und berücksichtigt, daß die Gleichung (4.6) auch entsprechend für Π' gültig ist.

Das Hertzsche Potential für die E-Wellen eines magnetischen Hertzschen Dipols im Fourierbereich ergibt sich entsprechend aus den Gleichungen (3.76) und (3.114) zu

$$\tilde{\Pi}'(z;z') = \frac{\boldsymbol{M}_t^0 \times \hat{z}}{j\omega\varepsilon(z)} \cdot j\vec{k}_t \frac{Y'(z;z')}{k_t^2}, \tag{4.20}$$

wobei für die Fouriertransformation wieder das auftretende inverse Fourierintegral genutzt und ferner beachtet wurde, daß nun $\boldsymbol{J} = \vec{0}$ ist. Das Hertzsche Potential für die H-Wellen eines magnetischen Hertzschen Dipols im Fourierbereich ergibt sich aus den Gleichungen (3.77) und (3.118), wobei es wieder sinnvoll ist, die transversalen und longitudinalen Quellkomponenten getrennt zu betrachten, zu

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}''(z;z') &= \frac{\boldsymbol{M}_t^0}{j\omega\mu(z) j\omega\mu(z')} \cdot \frac{\partial}{\partial z'} j\vec{k}_t \frac{Z''(z;z')}{k_t^2} + \frac{M_z^0}{j\omega\mu(z)} \frac{Z''(z;z')}{j\omega\mu(z')} \\ &= \frac{\boldsymbol{M}_t^0 \cdot \vec{k}_t}{\omega\mu(z) k_t^2} T^{V''}(z;z') + \frac{M_z^0}{j\omega\mu(z)} \frac{Z''(z;z')}{j\omega\mu(z')},\end{aligned} \tag{4.21}$$

wobei die letzte Umformung mit der Beziehung (3.108) erfolgte. Setzt man nun die Gleichungen (4.20) und (4.21) in die Gleichung der fouriertransformierten elektrischen Feldstärke (4.19) ein, so kann man aus dieser unter Beachtung der Beziehung (3.84) und bei Verwendung der Definitionen (4.15) die fouriertransformierte Greensche Dyade $\underline{\tilde{G}}_{EM}$ ablesen:

$$\begin{aligned}&\underline{\tilde{G}}_{EM}(z;z') = \\ &\quad -\hat{u}\hat{v}T^{V'}(z;z') + \hat{v}\hat{u}T^{V''}(z;z') - \hat{v}\hat{z}\frac{k_t}{\omega\mu(z')} Z''(z;z') + \hat{z}\hat{v}\frac{k_t}{\omega\varepsilon(z)} Y'(z;z').\end{aligned} \tag{4.22}$$

4.3 Die Greensche Dyade des elektrischen Feldes für eine elektrische Anregung

Zur Berechnung der Greenschen Dyade für denjenigen Anteil der elektrischen Feldstärke, der durch die elektrische Stromdichte verursacht wird, kann die Formulierung (3.72) auf der Basis von Hertzschen Potentialen nicht mehr verwendet werden, da diese nur für Raumgebiete gilt, die frei von elektrischen Quellen sind.[5] Deshalb geht man zur Berechnung der transversalen elektrischen Feldstärke von der Gleichung (3.64) aus, deren zweidimensionale Fouriertransformation

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_t = j\vec{k}_t\tilde{V}' + j\vec{k}_t \times \left(\hat{z}\tilde{V}''\right) \tag{4.23}$$

ergibt.

Die fouriertransformierte Potentialfunktion $\tilde{V}''$ ergibt sich bei Annahme einer elektrischen Punktquelle laut (3.98) unter der Beachtung, daß $\boldsymbol{M} = \vec{0}$ ist, aus der Gleichung (3.118) zu

$$\tilde{V}''(z;z') = \left(j\vec{k}_t \times \hat{z}\right) \cdot \boldsymbol{J}^0 \frac{Z''(z;z')}{k_t^2}, \tag{4.24}$$

[5] siehe auch [20]

wobei wieder beachtet wurde, daß der Integralausdruck $\mathcal{L}_d''$ eine zweidimensionale inverse Fouriertransformation darstellt.

Für die Potentialfunktion $V'(\vec{r})$ ergibt sich aus der Gleichung (3.66) durch Anwendung der Gleichung (3.54) zunächst

$$\begin{aligned} V'(\vec{r}) &= \sum_i \left[-\frac{1}{j\omega\varepsilon(z)} \left(\frac{\mathrm{d}I'(z)}{\mathrm{d}z} + i_i' \right) \right] \frac{\Phi_i(\vec{\varrho})}{k_t} \\ &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon(z)} \frac{\partial}{\partial z} I'(\vec{r}) - \frac{1}{j\omega\varepsilon(z)} \sum_i i_i' \frac{\Phi_i(\vec{\varrho})}{k_t}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Der Anregungsterm i_i' ergibt sich aus der Gleichung (3.48) durch Einsetzen der elektrischen Punktquelle laut (3.98), der Beachtung, daß $\boldsymbol{M} = \vec{0}$ ist, und der Verwendung der vektoriellen Modusfunktion gemäß (3.56) zu

$$i_i' = (-j)\vec{k}_t \cdot \boldsymbol{J}^0 \delta(z - z') \frac{\Phi_i^*\left(\vec{0}\right)}{k_t}, \tag{4.26}$$

wobei weiterhin $\vec{\varrho}' = \vec{0}$ gesetzt wird. Setzt man nun diesen Quellterm in die Gleichung (4.25) ein, so ergibt sich wieder ein zweidimensionales inverses Fourierintegral, womit sich diese Gleichung dann insgesamt leicht fouriertransformieren läßt:

$$\tilde{V}'(z; z') = -\frac{1}{j\omega\varepsilon(z)} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{I}'(z; z') + \frac{1}{\omega\varepsilon(z)} \frac{\boldsymbol{J}^0 \cdot \vec{k}_t \delta(z - z')}{k_t^2}. \tag{4.27}$$

Der Ausdruck $\tilde{I}'(z; z')$ ergibt sich dabei aus der fouriertransformierten Gleichung (3.114) durch Einsetzen der entsprechenden Quellgrößen und unter Verwendung der Beziehung (3.106) zu

$$\tilde{I}'(z; z') = \hat{z} \cdot \boldsymbol{J}^0 \frac{Y'(z; z')}{j\omega\varepsilon(z')} + \vec{k}_t \cdot \boldsymbol{J}^0 \frac{jT^{I'}(z; z')}{k_t^2}. \tag{4.28}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke für $\tilde{V}'$ und $\tilde{V}''$ in die Gleichung (4.23) erhält man unter Nutzung der Gleichungen (3.84) und (3.86) für die fouriertransformierte, transversale elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{E}}_t(z; z') &= \hat{u}\hat{z} \cdot \boldsymbol{J}^0 \frac{k_t}{\omega\varepsilon(z')} T^{V'}(z; z') - \hat{u}\hat{u} \cdot \boldsymbol{J}^0 Z'(z; z') + \hat{u}\hat{u} \cdot \boldsymbol{J}^0 \frac{\delta(z - z')}{j\omega\varepsilon(z)} \\ &\quad - \hat{u}\hat{u} \cdot \boldsymbol{J}^0 \frac{\delta(z - z')}{j\omega\varepsilon(z)} - \hat{v}\hat{v} \cdot \boldsymbol{J}^0 Z''(z; z'), \end{aligned} \tag{4.29}$$

wobei erneut die Definitionen (4.15) verwendet wurden. Man beachte, daß sich die auftauchenden Diracschen Distributionen hierbei gegenseitig kompensieren.

Nun soll die noch ausstehende z-Komponente der fouriertransformierten elektrischen Feldstärke ermittelt werden. Hierzu werden zunächst die angenommenen Quellen in die Gleichung (3.11) eingesetzt, und anschließend wird diese Gleichung der Fouriertransformation unterzogen, so daß sich

$$j\omega\varepsilon(z)\tilde{E}_z = -j\vec{k}_t \cdot \left(\widetilde{\boldsymbol{H}}_t \times \hat{z} \right) - \hat{z} \cdot \boldsymbol{J}^0 \delta(z - z') \tag{4.30}$$

ergibt. Durch Einsetzen der fouriertransformierten, transversalen magnetischen Feldstärke aus der Gleichung (4.14) in die vorherige Gleichung erhält man

$$\tilde{E}_z = \hat{u} \cdot \boldsymbol{J}^0 \frac{k_t}{\omega\varepsilon(z)} T^{I'}(z;z') - \hat{z} \cdot \boldsymbol{J}^0 \frac{k_t^2}{\omega\varepsilon(z)\omega\varepsilon(z')} Y'(z;z') - \hat{z} \cdot \boldsymbol{J}^0 \frac{\delta(z-z')}{j\omega\varepsilon(z)}, \tag{4.31}$$

wobei die Definitionen (4.15) verwendet wurden und beachtet wurde, daß $\hat{v} \times \hat{z} = \hat{u}$ ist.

Die gesamte fouriertransformierte elektrische Feldstärke eines elektrischen Hertzschen Dipols läßt sich letztlich also mit den Gleichungen (4.29) und (4.31) darstellen. In diesem Sinne kann man dann auch aus diesen beiden Gleichungen die gesuchte fouriertransformierte Greensche Dyade $\underline{\tilde{G}}_{EJ}$ gewinnen:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{G}}_{EJ}(z;z') &= -\hat{u}\hat{u}Z'(z;z') - \hat{v}\hat{v}Z''(z;z') + \hat{u}\hat{z}\frac{k_t}{\omega\varepsilon(z')}T^{V'}(z;z') \\ &\quad + \hat{z}\hat{u}\frac{k_t}{\omega\varepsilon(z)}T^{I'}(z;z') \\ &\quad - \hat{z}\hat{z}\left(\frac{k_t^2}{\omega^2\varepsilon(z)\varepsilon(z')}Y'(z;z') + \frac{1}{j\omega\varepsilon(z)}\delta(z-z')\right). \end{aligned} \tag{4.32}$$

4.4 Die Greensche Dyade des magnetischen Feldes für eine magnetische Anregung

Zur Berechnung der Greenschen Dyade für denjenigen Anteil der magnetischen Feldstärke, der durch die magnetische Stromdichte verursacht wird, kann die Formulierung (3.73) auf der Basis von Hertzschen Potentialen erneut nicht verwendet werden, da diese nur für Raumgebiete gilt, die frei von magnetischen Quellen sind. Deshalb geht man für die Ermittlung der transversalen magnetischen Feldstärke von der Gleichung (3.65) aus, deren zweidimensionale Fouriertransformation

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_t = -j\vec{k}_t \times \left(\hat{z}\tilde{I}'\right) + j\vec{k}_t\tilde{I}'' \tag{4.33}$$

ergibt. Das weitere Vorgehen ist ähnlich zum vorherigen Fall.

Die fouriertransformierte Potentialfunktion $\tilde{I}'$ ergibt sich bei Annahme einer magnetischen Punktquelle laut (3.99) unter der Beachtung, daß $\boldsymbol{J} = \vec{0}$ ist, aus der Gleichung (3.114) zu

$$\tilde{I}'(z;z') = \left(\hat{z} \times j\vec{k}_t\right) \cdot \boldsymbol{M}^0 \frac{Y'(z;z')}{k_t^2}, \tag{4.34}$$

wobei hier beachtet wurde, daß der Integralausdruck $\mathcal{L}'_d$ eine zweidimensionale inverse Fouriertransformation darstellt.

Für die Potentialfunktion $I''(\vec{r})$ ergibt sich aus der Gleichung (3.69) durch Anwendung der Gleichung (3.53) zunächst

$$\begin{aligned} I''(\vec{r}) &= \sum_i \left[-\frac{1}{j\omega\mu(z)}\left(\frac{\mathrm{d}V''(z)}{\mathrm{d}z} + v_i''\right)\right]\frac{\Psi_i(\vec{\varrho})}{k_t} \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu(z)}\frac{\partial}{\partial z}V''(\vec{r}) - \frac{1}{j\omega\mu(z)}\sum_i v_i''\frac{\Psi_i(\vec{\varrho})}{k_t}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Der Anregungsterm v_i'' ergibt sich aus der Gleichung (3.47) durch Einsetzen der magnetischen Punktquelle gemäß (3.99), der Beachtung, daß $\boldsymbol{J} = \vec{0}$ ist, und der Verwendung der vektoriellen Modusfunktion gemäß (3.59) zu

$$v_i'' = (-j)\vec{k}_t \cdot \boldsymbol{M}^0 \delta(z - z') \frac{\Psi_i^*\left(\vec{0}\right)}{k_t}, \tag{4.36}$$

wobei weiterhin $\vec{\varrho}' = \vec{0}$ gesetzt wird. Setzt man nun diesen Quellterm in die Gleichung (4.35) ein, so ergibt sich wieder ein zweidimensionales inverses Fourierintegral, womit sich diese Gleichung dann insgesamt leicht fouriertransformieren läßt:

$$\tilde{I}''(z;z') = -\frac{1}{j\omega\mu(z)} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{V}''(z;z') + \frac{1}{\omega\mu(z)} \frac{\boldsymbol{M}^0 \cdot \vec{k}_t \delta(z - z')}{k_t^2}. \tag{4.37}$$

Der Ausdruck $\tilde{V}''(z;z')$ ergibt sich dabei aus der fouriertransformierten Gleichung (3.118) durch Einsetzen der entsprechenden Quellgrößen und unter Verwendung der Beziehung (3.108) zu

$$\tilde{V}''(z;z') = \hat{z} \cdot \boldsymbol{M}^0 \frac{Z''(z;z')}{j\omega\mu(z')} + \vec{k}_t \cdot \boldsymbol{M}^0 \frac{jT^{V''}(z;z')}{k_t^2}. \tag{4.38}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke für $\tilde{I}''$ und $\tilde{I}'$ in die Gleichung (4.33) erhält man unter Nutzung der Gleichungen (3.83) und (3.85) für die fouriertransformierte, transversale magnetische Feldstärke

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{H}}_t(z;z') \quad = \quad & \hat{u}\hat{z} \cdot \boldsymbol{M}^0 \frac{k_t}{\omega\mu(z')} T^{I''}(z;z') - \hat{u}\hat{u} \cdot \boldsymbol{M}^0 Y''(z;z') + \hat{u}\hat{u} \cdot \boldsymbol{M}^0 \frac{\delta(z - z')}{j\omega\mu(z)} \\ & - \hat{u}\hat{u} \cdot \boldsymbol{M}^0 \frac{\delta(z - z')}{j\omega\mu(z)} - \hat{v}\hat{v} \cdot \boldsymbol{M}^0 Y'(z;z'), \end{aligned} \tag{4.39}$$

wobei erneut die Definitionen (4.15) verwendet wurden. Man beachte, daß sich die auftauchenden Diracschen Distributionen hierbei wieder gegenseitig kompensieren.

Nun soll die noch ausstehende z-Komponente der fouriertransformierten magnetischen Feldstärke ermittelt werden. Hierzu wird zunächst die angenommene magnetische Punktquelle in die Gleichung (3.12) eingesetzt, und anschließend wird diese Gleichung der Fouriertransformation unterzogen, so daß man

$$j\omega\mu(z)\tilde{H}_z = -j\vec{k}_t \cdot \left(\hat{z} \times \widetilde{\boldsymbol{E}}_t\right) - \hat{z} \cdot \boldsymbol{M}^0 \delta(z - z') \tag{4.40}$$

erhält. Durch Einsetzen der fouriertransformierten, transversalen elektrischen Feldstärke eines magnetischen Hertzschen Dipols, die sich aus der Dyade (4.22) herleiten läßt, in die vorherige Gleichung erhält man

$$\tilde{H}_z = \hat{u} \cdot \boldsymbol{M}^0 \frac{k_t}{\omega\mu(z)} T^{V''}(z;z') - \hat{z} \cdot \boldsymbol{M}^0 \frac{k_t^2}{\omega\mu(z)\omega\mu(z')} Z''(z;z') - \hat{z} \cdot \boldsymbol{M}^0 \frac{\delta(z - z')}{j\omega\mu(z)}, \tag{4.41}$$

wobei die Definitionen (4.15) verwendet wurden und beachtet wurde, daß $\hat{z} \times \hat{v} = -\hat{u}$ ist.

Die gesamte fouriertransformierte magnetische Feldstärke eines magnetischen Hertzschen Dipols läßt sich letztlich also mit den Gleichungen (4.39) und (4.41) darstellen. In diesem Sinne kann man dann auch aus diesen beiden Gleichungen die gesuchte fouriertransformierte Greensche Dyade $\underline{\tilde{G}}_{HM}$ gewinnen:

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{G}}_{HM}(z;z') &= -\hat{u}\hat{u}Y''(z;z') - \hat{v}\hat{v}Y'(z;z') + \hat{u}\hat{z}\frac{k_t}{\omega\mu(z')}T^{I''}(z;z') \\ &\quad + \hat{z}\hat{u}\frac{k_t}{\omega\mu(z)}T^{V''}(z;z') \\ &\quad - \hat{z}\hat{z}\left(\frac{k_t^2}{\omega^2\mu(z)\mu(z')}Z''(z;z') + \frac{1}{j\omega\mu(z)}\delta(z-z')\right). \end{aligned} \tag{4.42}$$

4.5 Die Greenschen Funktionen für elektrische Mischpotentiale

Bei der Nutzung der Momentenmethode soll jedoch mit den Mischpotentialformen der Greenschen Dyaden gearbeitet werden, weil diese schwächere Singularitäten im jeweiligen Quellpunkt aufweisen und somit deutlich besser zu handhaben sind. Nun soll dieser Übergang auf die Mischpotentialformen der Greenschen Funktionen durchgeführt werden, zunächst für den Fall der elektrischen Mischpotentiale. Aus dem Vergleich der Gleichung (2.64) mit der Beziehung

$$\boldsymbol{E}_J\{\boldsymbol{J}_s\}(\vec{r}) = \iint_{\mathrm{Ls}} \underline{G}_{EJ}(\vec{r};\vec{r}') \cdot \boldsymbol{J}_s(\vec{r}')\,\mathrm{d}S' \tag{4.43}$$

folgt unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung (2.22) die Beziehung

$$\underline{\tilde{G}}_{EJ} = -j\omega\underline{\tilde{K}}_{AJ} - \frac{1}{j\omega}\tilde{\nabla}\tilde{\nabla}'\tilde{K}_{\phi J} \tag{4.44}$$

für die Greenschen Funktionen im Fourierbereich. Hierbei wurde die Beziehung (2.55) genutzt und bei der anschließenden Anwendung des Satzes von Gauß beachtet, daß kein Stromfluß durch die entsprechende Randkurve auftreten soll. Wenn man jetzt diese Dyadengleichung so weit wie möglich ausrechnet, erhält man aus einem Komponentenvergleich mit der Darstellung (4.32) die Beziehungen

$$\tilde{K}_{AJvu} = \tilde{K}_{AJuv} = \tilde{K}_{AJzv} = \tilde{K}_{AJvz} = 0 \tag{4.45}$$

und

$$\tilde{G}_{EJuu} = -j\omega\tilde{K}_{AJuu} - \frac{k_t^2}{j\omega}\tilde{K}_{\phi J}, \tag{4.46}$$

$$\tilde{G}_{EJvv} = -j\omega\tilde{K}_{AJvv}, \tag{4.47}$$

$$\tilde{G}_{EJuz} = -j\omega\tilde{K}_{AJuz} + \frac{jk_t}{j\omega}\frac{\partial\tilde{K}_{\phi J}}{\partial z'}, \tag{4.48}$$

$$\tilde{G}_{EJzu} = -j\omega\tilde{K}_{AJzu} - \frac{jk_t}{j\omega}\frac{\partial\tilde{K}_{\phi J}}{\partial z}, \tag{4.49}$$

$$\tilde{G}_{EJzz} = -j\omega\tilde{K}_{AJzz} - \frac{1}{j\omega}\frac{\partial^2\tilde{K}_{\phi J}}{\partial z\partial z'}. \tag{4.50}$$

Aus den Gleichungen (4.47) und (4.32) folgt direkt, daß

$$\tilde{K}_{AJvv}(z;z') = \frac{1}{j\omega} Z''(z;z') \tag{4.51}$$

ist. Ansonsten ist dieses Gleichungssystem mit fünf Gleichungen für sechs Unbekannte unterbestimmt. Um eine Lösung zu finden, kann man also eine weitere Bedingung einführen. Hierbei soll nun die bereits erwähnte Formulierung C von Michalski und Zheng verwendet werden, die sich im allgemeinen Fall als besonders geeignet erwiesen hat.[6] Um diese Formulierung zu bekommen, setzt man nun

$$\tilde{K}_{AJuu}(z;z') = \tilde{K}_{AJvv}(z;z') = \frac{1}{j\omega} Z''(z;z'). \tag{4.52}$$

Aus den Gleichungen (4.46) und (4.32) erhält man

$$\tilde{K}_{\phi J}(z;z') = \frac{j\omega}{k_t^2} \left(Z'(z;z') - Z''(z;z') \right). \tag{4.53}$$

An dieser Stelle erkennt man, daß das skalare Mischpotential $K_{\phi J}$ tatsächlich an den Grenzflächen stetig bezüglich z und z' ist, da selbiges auch für $Z'(z;z')$ und $Z''(z;z')$ gilt. Hiermit ist also klar, daß es sich um die Formulierung C handelt, die zuvor bereits dargestellt wurde. Aus der letzten Gleichung folgt unter Nutzung der Gleichungen (4.48) und (4.32)

$$j\omega \tilde{K}_{AJuz}(z;z') = -\frac{k_t}{\omega\varepsilon(z')} T^{V'}(z;z') + \frac{j}{k_t} \frac{\partial}{\partial z'} \left(Z'(z;z') - Z''(z;z') \right).$$

Aus den Gleichungen (3.85), (3.95) und (3.97) ergeben sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z'} Z''(z;z') &= j\omega\mu(z') T^{V''}(z;z'), \\ \frac{\partial}{\partial z'} Z'(z;z') &= j\frac{k^2(z') - k_t^2}{\omega\varepsilon(z')} T^{V'}(z;z'), \end{aligned}$$

woraus sich dann schließlich

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{AJuz}(z;z') &= \frac{\mu(z')}{jk_t} \left(T^{V''}(z;z') - T^{V'}(z;z') \right) \\ &= \frac{k_0 \eta_0 \mu_r(z')}{j\omega k_t} \left(T^{V''}(z;z') - T^{V'}(z;z') \right) \end{aligned} \tag{4.54}$$

ergibt. Hierbei wurden zur Verbesserung der numerischen Auswertung die Größen

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}, \tag{4.55}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \tag{4.56}$$

eingeführt. Entsprechend ergibt sich aus den Gleichungen (3.39) und (4.32) mit der Gleichung (4.53) auch

$$j\omega \tilde{K}_{AJzu} = -\frac{k_t}{\omega\varepsilon(z)} T^{I'}(z;z') - \frac{j}{k_t} \frac{\partial}{\partial z} \left(Z'(z;z') - Z''(z;z') \right),$$

[6] siehe [14] und [18]

woraus sich mit den Gleichungen (3.85) und (3.97) dann

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{AJzu}(z;z') &= -\frac{k_t}{j\omega^2\varepsilon(z)}T^{I'}(z;z') \\
&\quad -\frac{1}{\omega k_t}\left(-jk_z(z)Z'(z)T^{I'}(z;z') + jk_z(z)Z''(z)T^{I''}(z;z')\right) \\
&= \frac{\mu(z)}{jk_t}\left(T^{I''}(z;z') - T^{I'}(z;z')\right) \\
&= \frac{k_0\eta_0\mu_r(z)}{j\omega k_t}\left(T^{I''}(z;z') - T^{I'}(z;z')\right) \qquad (4.57)
\end{aligned}$$

ergibt. Desweiteren folgt aus den Gleichungen (4.50) und (4.32) mit der Gleichung (4.53) noch

$$\begin{aligned}
j\omega\tilde{K}_{AJzz}(z;z') &= \frac{k_t^2}{\omega^2\varepsilon(z)\varepsilon(z')}Y'(z;z') + \frac{1}{j\omega\varepsilon(z')}\delta(z-z') \\
&\quad +\frac{1}{k_t^2}\frac{\partial^2}{\partial z\partial z'}\left(Z''(z;z') - Z'(z;z')\right).
\end{aligned}$$

Diese Gleichung läßt sich schließlich mit Hilfe der Ausdrücke

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial z'}Z''(z;z') = \omega^2\mu(z)\mu(z')Y''(z;z') + j\omega\mu(z')\delta(z-z')$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial z'}Z'(z;z') = \frac{k_z^2(z)k_z^2(z')}{\omega^2\varepsilon(z)\varepsilon(z')}Y'(z;z') + j\frac{k_z^2(z')}{\omega\varepsilon(z')}\delta(z-z'),$$

die sich aus den Gleichungen (3.108) und (3.83) ergeben, zu

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{AJzz}(z;z') &= \frac{\omega^2\mu(z)\mu(z')}{j\omega k_t^2}Y''(z;z') \\
&\quad +\frac{1}{j\omega}\left(\frac{\mu(z)}{\varepsilon(z')} + \frac{\mu(z')}{\varepsilon(z)} - \frac{\omega^2\mu(z)\mu(z')}{k_t^2}\right)Y'(z;z') \\
&= \frac{\eta_0^2\mu_r(z)\mu_r(z')}{j\omega}\left\{\left(\frac{k_0}{k_t}\right)^2 Y''(z;z') + \left[\frac{1}{\mu_r(z)\varepsilon_r(z)}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. +\frac{1}{\mu_r(z')\varepsilon_r(z')} - \left(\frac{k_0}{k_t}\right)^2\right] Y'(z;z')\right\} \qquad (4.58)
\end{aligned}$$

umformen. Hiermit wären nun alle Komponenten der Greenschen Funktionen für die elektrischen Mischpotentiale im Fourierbereich bekannt.

4.6 Die Greenschen Funktionen für magnetische Mischpotentiale

Nun sollen die Greenschen Funktionen für die magnetischen Mischpotentiale ermittelt werden. Aus dem Vergleich der Gleichung (2.65) mit der Beziehung

$$\boldsymbol{H}_M\{\boldsymbol{M}_s\}(\vec{r}) = \iint\limits_{\mathrm{Ap}} \underline{G}_{HM}(\vec{r};\vec{r}')\cdot\boldsymbol{M}_s(\vec{r}')\,\mathrm{d}S' \qquad (4.59)$$

folgt unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung (2.23) die Beziehung

$$\underline{\tilde{G}}_{HM} = -j\omega\underline{\tilde{K}}_{AM} - \frac{1}{j\omega}\tilde{\nabla}\tilde{\nabla}'\tilde{K}_{\phi M} \tag{4.60}$$

für die Greenschen Funktionen im Fourierbereich, sofern man die obigen Überlegungen entsprechend überträgt. Wenn man jetzt diese Dyadengleichung so weit wie möglich ausrechnet, erhält man aus einem Komponentenvergleich mit der Darstellung (4.42) die Beziehungen

$$\tilde{K}_{AMvu} = \tilde{K}_{AMuv} = \tilde{K}_{AMzv} = \tilde{K}_{AMvz} = 0 \tag{4.61}$$

und

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{HMuu} &= -j\omega\tilde{K}_{AMuu} - \frac{k_t^2}{j\omega}\tilde{K}_{\phi M}, && (4.62)\\
\tilde{G}_{HMvv} &= -j\omega\tilde{K}_{AMvv}, && (4.63)\\
\tilde{G}_{HMuz} &= -j\omega\tilde{K}_{AMuz} + \frac{jk_t}{j\omega}\frac{\partial\tilde{K}_{\phi M}}{\partial z'}, && (4.64)\\
\tilde{G}_{HMzu} &= -j\omega\tilde{K}_{AMzu} - \frac{jk_t}{j\omega}\frac{\partial\tilde{K}_{\phi M}}{\partial z}, && (4.65)\\
\tilde{G}_{HMzz} &= -j\omega\tilde{K}_{AMzz} - \frac{1}{j\omega}\frac{\partial^2\tilde{K}_{\phi M}}{\partial z\partial z'}. && (4.66)
\end{aligned}$$

Ein Vergleich der letzten Gleichungen mit den Gleichungen (4.46) bis (4.50) zeigt die formale Ähnlichkeit. Die Gleichungen (4.32) und (4.42) unterscheiden sich ferner nur durch die Vertauschung von elektrischen und magnetischen Größen und dem Austausch von E-Wellen und H-Wellen. Die weitere Berechnung der Greenschen Funktionen kann also äquivalent zum Obigen erfolgen; die Ergebnisse ergeben sich dann letztlich einfach durch die Vertauschung der entsprechenden Größen:

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{\phi M}(z;z') &= \frac{j\omega}{k_t^2}\left(Y''(z;z') - Y'(z;z')\right), && (4.67)\\
\tilde{K}_{AMuu}(z;z') &= \frac{1}{j\omega}Y'(z;z'), && (4.68)\\
\tilde{K}_{AMvv}(z;z') &= \frac{1}{j\omega}Y'(z;z'), && (4.69)\\
\tilde{K}_{AMuz}(z;z') &= \frac{k_0\varepsilon_r(z')}{j\omega\eta_0 k_t}\left(T^{I'}(z;z') - T^{I''}(z;z')\right), && (4.70)\\
\tilde{K}_{AMzu}(z;z') &= \frac{k_0\varepsilon_r(z)}{j\omega\eta_0 k_t}\left(T^{V'}(z;z') - T^{V''}(z;z')\right), && (4.71)\\
\tilde{K}_{AMzz}(z;z') &= \frac{\varepsilon_r(z)\varepsilon_r(z')}{j\omega\eta_0^2}\left\{\left(\frac{k_0}{k_t}\right)^2 Z'(z;z') + \left[\frac{1}{\varepsilon_r(z)\mu_r(z)}\right.\right.\\
&\quad\left.\left. + \frac{1}{\varepsilon_r(z')\mu_r(z')} - \left(\frac{k_0}{k_t}\right)^2\right] Z''(z;z')\right\}, && (4.72)
\end{aligned}$$

wobei wieder die Definitionen (4.55) und (4.56) gelten. Hiermit wären jetzt also auch die Greenschen Funktionen für die magnetischen Mischpotentiale im Fourierbereich vollständig bekannt.

4.7 Rücktransformation der Greenschen Dyaden

An dieser Stelle soll nun die Rücktransformation in den Ortsbereich erfolgen. Hierzu seien zunächst einmal im Fouierbereich die Polarkoordinaten durch

$$k_x = k_t \cos\alpha, \qquad k_y = k_t \sin\alpha \tag{4.73}$$

und im Ortsbereich durch

$$x = \varrho \cos\varphi, \qquad y = \varrho \sin\varphi \tag{4.74}$$

eingeführt. Auf dieser Grundlage sollen nun die geeigneten Transformationsbeziehungen hergeleitet werden.

Die fouriertransformierte Funktion $\tilde{f}(k_t)$ sei zylindersymmetrisch. Dann ergibt sich die Rücktransformation von $\cos(n\alpha)\tilde{f}(k_t)$ zu

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\cos(n\alpha)\tilde{f}(k_t)\} &= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(n\alpha)\tilde{f}(k_t)\mathrm{e}^{-j(k_x x+k_y y)}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\tilde{f}(k_t)\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\cos(n\alpha)\mathrm{e}^{-jk_t\varrho\cos(\varphi-\alpha)}\mathrm{d}\alpha\, k_t\mathrm{d}k_t}_{=S}, \end{aligned} \tag{4.75}$$

wenn man auf Zylinderkoordinaten übergeht. Das innere Integral S läßt sich durch Anwendung der Eulerschen Formel, der Substitution $a = -(\varphi - \alpha + \pi/2)$ und der Beachtung der 2π-Periodizität des Integranden zu

$$S = \frac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{jn\varphi}j^n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{j(na+k_t\varrho\sin a)}\mathrm{d}a + \frac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{-jn\varphi}j^{-n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{j(-na+k_t\varrho\sin a)}\mathrm{d}a$$

umformen. Unter der Beachtung, daß

$$\mathrm{J}_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{j(na-x\sin a)}\mathrm{d}a \tag{4.76}$$

die Integraldarstellung der Besselfunktion n-ter Ordnung ist, ergibt sich ferner:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{jn\varphi}j^n\mathrm{J}_n(-k_t\varrho) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-jn\varphi}j^{-n}\mathrm{J}_{-n}(-k_t\varrho) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{jn\varphi}j^n(-1)^n\mathrm{J}_n(k_t\varrho) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-jn\varphi}(-j)^n(-1)^{-n}\mathrm{J}_{-n}(k_t\varrho) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{jn\varphi}(-j)^n\mathrm{J}_n(k_t\varrho) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-jn\varphi}(-j)^n(-1)^{-n}(-1)^n\mathrm{J}_n(k_t\varrho) \\ &= \cos(n\varphi)(-j)^n\mathrm{J}_n(k_t\varrho), \end{aligned}$$

wobei der Zusammenhang

$$\mathrm{J}_{-n}(x) = (-1)^n\mathrm{J}_n(x) \tag{4.77}$$

zur Anwendung kam. Durch Einsetzen von S in die Gleichung (4.75) erhält man dann

$$\mathcal{F}^{-1}\{\cos(n\alpha)\tilde{f}(k_t)\}(\varrho;\varphi) = (-j)^n \cos(n\varphi)\mathcal{S}_n\left\{\frac{\tilde{f}(k_t)}{k_t^n}\right\}(\varrho) \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.78}$$

wobei das über

$$\mathcal{S}_n\left\{f(x)\right\}(\varrho) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C(0;\infty)} f(x)\mathrm{J}_n(x\varrho)x^{n+1}\mathrm{d}x \tag{4.79}$$

definierte Sommerfeld-Integral verwendet wurde. Mit $C(0;\infty)$ wird hierbei ein Weg in der komplexen Zahlenebene bezeichnet, der in der Nähe der positiven reellen Achse von null nach unendlich läuft. Dieser Weg sei dabei so gewählt, daß Verzweigungsschnitte und Singularitäten des Integranden geeignet umgangen werden. Für einen Sinusfaktor ergibt sich eine entsprechende Rechnung, so daß auch

$$\mathcal{F}^{-1}\{\sin(n\alpha)\tilde{f}(k_t)\}(\varrho;\varphi) = (-j)^n \sin(n\varphi)\mathcal{S}_n\left\{\frac{\tilde{f}(k_t)}{k_t^n}\right\}(\varrho) \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.80}$$

gilt.

Setzt man nun $n = 0$, so erhält man aus der Gleichung (4.78) direkt die Beziehung

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(k_t)\}(\varrho) = \mathcal{S}_0\left\{\tilde{f}(k_t)\right\}(\varrho), \tag{4.81}$$

welche die inverse Fourier-Bessel-Transformation für zylindersymmetrische Funktionen darstellt.

4.7.1 Die Greenschen Funktionen der elektrischen Mischpotentiale im Ortsbereich

Zuerst soll nun die Greensche Funktion des skalaren elektrischen Mischpotentials in den Ortsbereich rücktransformiert werden. Hierzu ist einfach die Gleichung (4.53) der inversen zweidimensionalen Fouriertransformation gemäß der Gleichung (4.81) zu unterwerfen. Daraus ergibt sich direkt:

$$K_{\phi J}(\vec{\varrho};z;z') = -j\omega\mathcal{S}_0\left\{\frac{Z''(z;z') - Z'(z;z')}{k_t^2}\right\}(\varrho). \tag{4.82}$$

Die Greensche Dyade des vektoriellen elektrischen Mischpotentials ergibt sich aus einer komponentenweisen Betrachtung. Hierbei ist zu beachten, daß sich bei der Verwendung von Polarkoordinaten laut (4.73) und (4.74) die Beziehungen

$$\hat{u} = \hat{x}\cos\alpha + \hat{y}\sin\alpha, \qquad \hat{v} = -\hat{x}\sin\alpha + \hat{y}\cos\alpha \tag{4.83}$$

ergeben. Durch explizites Einsetzen und Bildung der dyadischen Produkte erhält man somit aus den Gleichungen (4.51) und (4.52) den Term

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}\hat{u}\tilde{K}_{AJuu} + \hat{v}\hat{v}\tilde{K}_{AJvv}\} &= (\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y})\,\mathcal{F}^{-1}\left\{\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\frac{1}{j\omega}Z''(z;z')\right\} \\
&= (\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y})\,\frac{1}{j\omega}\mathcal{S}_0\left\{Z''(z;z')\right\}(\varrho) \\
&= \underline{I}_t\frac{1}{j\omega}\mathcal{S}_0\left\{Z''(z;z')\right\}(\varrho).
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Entsprechend erhält man aus der Gleichung (4.58) den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{\hat{z}\hat{z}\tilde{K}_{AJzz}\} &= \hat{z}\hat{z}\frac{\eta_0^2\mu_r(z)\mu_r(z')}{j\omega}\mathcal{S}_0\left\{\left(\frac{k_0}{k_t}\right)^2 Y''(z;z') + \left[\frac{1}{\mu_r(z)\varepsilon_r(z)}\right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{1}{\mu_r(z')\varepsilon_r(z')} - \left(\frac{k_0}{k_t}\right)^2\right] Y'(z;z')\right\}(\varrho),
\end{aligned} \tag{4.85}$$

wobei erneut die Abkürzungen (4.55) und (4.56) zu beachten sind. Die restlichen Komponenten ergeben sich aus der Rücktransformation der Summe von (4.54) und (4.57) mittels der Formeln (4.78) und (4.80) zu

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}\hat{z}\tilde{K}_{AJuz} + \hat{z}\hat{u}\tilde{K}_{AJzu}\} = \\
&\quad -(\hat{x}\hat{z}\cos\varphi + \hat{y}\hat{z}\sin\varphi)\frac{jk_0\eta_0\mu_r(z')}{j\omega}\mathcal{S}_1\left\{\frac{T^{V''}(z;z') - T^{V'}(z;z')}{k_t^2}\right\}(\varrho) \\
&\quad -(\hat{z}\hat{x}\cos\varphi + \hat{z}\hat{y}\sin\varphi)\frac{jk_0\eta_0\mu_r(z)}{j\omega}\mathcal{S}_1\left\{\frac{T^{I''}(z;z') - T^{I'}(z;z')}{k_t^2}\right\}(\varrho).
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Die Greensche Dyade für das vektorielle elektrische Mischpotential ergibt sich dann im Ortsbereich aus der Summe der zuvor rücktransformierten Ausdrücke (4.84), (4.85) und (4.86) zu:

$$\begin{aligned}
\underline{K}_{AJ}(\vec{\varrho};z;z') &= \underline{I}_t\frac{1}{j\omega}\mathcal{S}_0\left\{Z''(z;z')\right\}(\varrho) \\
&\quad -(\hat{x}\hat{z}\cos\varphi + \hat{y}\hat{z}\sin\varphi)\frac{jk_0\eta_0\mu_r(z')}{j\omega}\mathcal{S}_1\left\{\frac{T^{V''}(z;z') - T^{V'}(z;z')}{k_t^2}\right\}(\varrho) \\
&\quad -(\hat{z}\hat{x}\cos\varphi + \hat{z}\hat{y}\sin\varphi)\frac{jk_0\eta_0\mu_r(z)}{j\omega}\mathcal{S}_1\left\{\frac{T^{I''}(z;z') - T^{I'}(z;z')}{k_t^2}\right\}(\varrho) \\
&\quad +\hat{z}\hat{z}\frac{\eta_0^2\mu_r(z)\mu_r(z')}{j\omega}\mathcal{S}_0\left\{\left(\frac{k_0}{k_t}\right)^2 Y''(z;z') + \left[\frac{1}{\mu_r(z)\varepsilon_r(z)}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{1}{\mu_r(z')\varepsilon_r(z')} - \left(\frac{k_0}{k_t}\right)^2\right] Y'(z;z')\right\}(\varrho).
\end{aligned} \tag{4.87}$$

4.7.2 Die Greenschen Funktionen der magnetischen Mischpotentiale im Ortsbereich

Nun soll zunächst die Greensche Funktion des skalaren magnetischen Mischpotentials in den Ortsbereich zurück transformiert werden. Hierzu ist einfach die Gleichung (4.67) gemäß (4.81) zu transformieren:

$$K_{\phi M}(\vec{\varrho}; z; z') = -j\omega \mathcal{S}_0 \left\{ \frac{Y'(z;z') - Y''(z;z')}{k_t^2} \right\} (\varrho). \tag{4.88}$$

Die Greensche Dyade des vektoriellen magnetischen Mischpotentials im Ortsbereich $\underline{K}_{AM}$ kann man, wegen der Ähnlichkeit der fouriertransformierten Greenschen Dyaden $\underline{\tilde{K}}_{AJ}$ und $\underline{\tilde{K}}_{AM}$, unmittelbar aus einer Umschreibung der Greenschen Dyade $\underline{K}_{AJ}$ gewinnen:

$$\begin{aligned} \underline{K}_{AM}(\vec{\varrho}; z; z') = \; & \underline{I}_t \frac{1}{j\omega} \mathcal{S}_0 \left\{ Y'(z;z') \right\} (\varrho) \\ & -(\hat{x}\hat{z}\cos\varphi + \hat{y}\hat{z}\sin\varphi) \frac{jk_0 \varepsilon_r(z')}{j\omega\eta_0} \mathcal{S}_1 \left\{ \frac{T^{I'}(z;z') - T^{I''}(z;z')}{k_t^2} \right\} (\varrho) \\ & -(\hat{z}\hat{x}\cos\varphi + \hat{z}\hat{y}\sin\varphi) \frac{jk_0 \varepsilon_r(z)}{j\omega\eta_0} \mathcal{S}_1 \left\{ \frac{T^{V'}(z;z') - T^{V''}(z;z')}{k_t^2} \right\} (\varrho) \\ & +\hat{z}\hat{z} \frac{\varepsilon_r(z)\varepsilon_r(z')}{j\omega\eta_0^2} \mathcal{S}_0 \left\{ \left(\frac{k_0}{k_t}\right)^2 Z'(z;z') + \left[\frac{1}{\varepsilon_r(z)\mu_r(z)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\varepsilon_r(z')\mu_r(z')} - \left(\frac{k_0}{k_t}\right)^2 \right] Z''(z;z') \right\} (\varrho). \end{aligned} \tag{4.89}$$

4.7.3 Die Greensche Dyade des magnetischen Feldes bei elektrischer Anregung im Ortsbereich

Um im Ortsbereich die Greensche Dyade für die magnetische Feldstärke bei einer elektrischen Anregung zu erhalten, geht man von der Gleichung (4.17) aus. In diese Gleichung werden dann die Beziehungen (4.15) und (4.73) eingesetzt. Die resultierende Gleichung kann dann mit Hilfe der Beziehungen (4.78) beziehungsweise (4.80), sofern man berücksichtigt, daß die Gleichungen

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin(2\alpha), \tag{4.90}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha), \tag{4.91}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\alpha) \tag{4.92}$$

gelten, und zusammen mit der Beziehung (4.81) in den Ortsbereich transformiert werden. Auf diese Weise ergibt sich dann schließlich

$$\underline{G}_{HJ}(\vec{\varrho}; z; z') = [(\hat{y}\hat{y} - \hat{x}\hat{x})\sin(2\varphi) + (\hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x})\cos(2\varphi)] \frac{1}{2} \mathcal{S}_2 \left\{ \frac{T^{I'}(z;z') - T^{I''}(z;z')}{k_t^2} \right\} (\varrho)$$

$$
\begin{aligned}
&+ (\hat{x}\hat{y} - \hat{y}\hat{x})\, \frac{1}{2}\mathcal{S}_0 \left\{ T^{I'}(z;z') + T^{I''}(z;z') \right\} (\varrho) \\
&+ (\hat{x}\hat{z}\sin\varphi - \hat{y}\hat{z}\cos\varphi)\, \frac{j\eta_0}{k_0\varepsilon_r(z')} \mathcal{S}_1 \left\{ Y'(z;z') \right\} (\varrho) \\
&+ (\hat{z}\hat{y}\cos\varphi - \hat{z}\hat{x}\sin\varphi)\, \frac{j}{k_0\eta_0\mu_r(z)} \mathcal{S}_1 \left\{ Z''(z;z') \right\} (\varrho),
\end{aligned}
\tag{4.93}
$$

wobei erneut die Definitionen (4.55) und (4.56) verwendet werden.

4.7.4 Die Greensche Dyade des elektrischen Feldes bei magnetischer Anregung im Ortsbereich

Die Greensche Dyade der elektrischen Feldstärke resultierend aus einer magnetischen Stromdichte ergibt sich im Ortsbereich aus der Rücktransformation der Gleichung (4.22). Die Rücktransformation ist dabei äquivalent zum vorherigen Falle durchzuführen. Als Ergebnis erhält man dann

$$
\begin{aligned}
\underline{G}_{EM}(\vec{\varrho};z;z') &= \left[(\hat{y}\hat{y} - \hat{x}\hat{x})\sin(2\varphi) + (\hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x})\cos(2\varphi) \right] \frac{1}{2}\mathcal{S}_2 \left\{ \frac{T^{V'}(z;z') - T^{V''}(z;z')}{k_t^2} \right\} (\varrho) \\
&+ (\hat{y}\hat{x} - \hat{x}\hat{y})\, \frac{1}{2}\mathcal{S}_0 \left\{ T^{V'}(z;z') + T^{V''}(z;z') \right\} (\varrho) \\
&+ (\hat{y}\hat{z}\cos\varphi - \hat{x}\hat{z}\sin\varphi)\, \frac{j}{k_0\eta_0\mu_r(z')} \mathcal{S}_1 \left\{ Z''(z;z') \right\} (\varrho) \\
&+ (\hat{z}\hat{x}\sin\varphi - \hat{z}\hat{y}\cos\varphi)\, \frac{j\eta_0}{k_0\varepsilon_r(z)} \mathcal{S}_1 \left\{ Y'(z;z') \right\} (\varrho),
\end{aligned}
\tag{4.94}
$$

wobei man wiederum die Definitionen (4.55) und (4.56) beachte.

5 Numerische Auswertung

Im folgenden werden nun berechenbare Ausdrücke für die Größen der Matrizengleichung (2.78) hergeleitet. Dabei wird immer eine dreieckige Netzstruktur der Diskretisierungen von Leitungsstreifen und Apertur angenommen. Ferner werden Ausdrücke angegeben, mit denen man aus den berechneten Flächenstromdichten die gewünschten charakteristischen Größen der betrachteten Anordnung berechnen kann.

5.1 Bestimmung des Anregungsvektors

Die Elemente des Anregungsvektors ergeben sich aus der Gleichung (2.82), unter der Verwendung der Definition (2.73) für die Basisfunktionen, zu:

$$
c_n = \langle -\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}, \vec{f}_n \rangle_{\mathrm{Leitungsstreifen}}. \tag{5.1}
$$

Die einfallende elektrische Feldstärke läßt sich durch eine „einfallende“ elektrische Flächenstromdichte darstellen. Hierzu zerlegt man die gesamte elektrische Flächenstromdichte ${\boldsymbol{J}_s}^{\text{ges}}$ in einen einfallenden Anteil ${\boldsymbol{J}_s}^{\text{inc}}$ und einen resultierenden Anteil $\boldsymbol{J}_s$:

$$
{\boldsymbol{J}_s}^{\text{ges}} = {\boldsymbol{J}_s}^{\text{inc}} + \boldsymbol{J}_s. \tag{5.2}
$$

Setzt man diesen Ansatz in die Integralgleichung (2.64) ein, so kann man die linearen Integraloperatoren aufspalten und den entsprechenden Anteil, der aus der einfallenden elektrischen Flächenstromdichte folgt, auf die Seite der einfallenden elektrischen Feldstärke schreiben. Wenn keine zusätzlich einfallende elektrische Feldstärke angenommen wird, kann man für diese über

$$
\boldsymbol{E}^{\text{inc}} = -j\omega \acute{\boldsymbol{A}}_J^2\{{\boldsymbol{J}_s}^{\text{inc}}\} - \operatorname{grad} \acute{\phi}_J^2\{{\boldsymbol{J}_s}^{\text{inc}}\} \tag{5.3}
$$

einen Ersatzausdruck aufgrund der einfallenden elektrischen Flächenstromdichte angeben.

Als Speisung wird eine Stromeinprägung in einen Knoten der Netzeinteilung des Leitungsstreifens angesetzt. Die daraus resultierende einfallende elektrische Flächenstromdichte soll nur in den Dreiecksflächen aufreten, die unmittelbar an den Speiseknoten grenzen. Wenn nun genau Q innere Kanten unmittelbar am Speiseknoten liegen, so ergibt sich für die einfallende Stromdichte die Näherung

$$
{\boldsymbol{J}_s}^{\text{inc}}(\vec{r}) \approx -\sum_{q=1}^{Q} \frac{I_J}{2\alpha_J} \vec{f}_q^{\text{inc}}(\vec{r}). \tag{5.4}
$$

Hierbei stellen I_J die maximale Flächenstromdichte und α_J die Summe aller Eckwinkel am Speiseknoten dar. Die q-te Basisfunktion für den Speisemodus wird dabei in Abwandlung zur Definition (2.73) als

$$
\vec{f}_q^{\text{inc}}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{l_q \alpha_q^+}{2F_q^+} \vec{\varrho}_q^{\,+} & \vec{r} \ \text{auf} \ T_q^+ \\ -\frac{l_q \alpha_q^-}{2F_q^-} \vec{\varrho}_q^{\,-} & \vec{r} \ \text{auf} \ T_q^- \\ \vec{0} & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.5}
$$

angesetzt.[7] Dabei steht $\alpha_q^\pm$ für den Eckwinkel am Speiseknoten im Dreieck $T_q^\pm$, das der q-ten Speisekante zugeordnet ist. Es findet hiernach also ein beidseitiger Stromzufluß zur speisenden Kante hin statt. Der Zufluß zu dieser Kante hin ist jedoch aufgrund der $\alpha_q^\pm$ im allgemeinen beidseitig verschieden. Die transversale Divergenz der Basisfunktionen der einfallenden elektrischen Flächenstromdichte ergibt sich damit in entsprechender Abwandlung der Gleichung (2.74) auf dem Dreieck $T_q^\pm$ zu

$$
\operatorname{div}_t \vec{f}_q^{\text{inc}}(\vec{r}_{T_q^\pm}) = \frac{l_q \alpha_q^\pm}{F_q^\pm}; \tag{5.6}
$$

die transversale Divergenz der gesamten einfallenden elektrischen Flächenstromdiche auf $T_q^\pm$ ergibt sich dann entsprechend der Gleichung (5.4) jeweils aus der Summe der Beiträge der $T_q^\pm$ begrenzenden Speisekanten.

[7] siehe [17]

Hiermit ergibt sich nun aus der Gleichung (5.1) über die Beziehung (5.3) der Zusammenhang

$$
\begin{aligned}
c_n \quad \approx \quad & \frac{l_n}{2}\left[j\omega \acute{\boldsymbol{A}}_J^2\{\boldsymbol{J}_s{}^{\mathrm{inc}}\}(\vec{r}_n^{\,\mathrm{c}+}) \cdot \vec{\varrho}_n^{\,\mathrm{c}+} + j\omega \acute{\boldsymbol{A}}_J^2\{\boldsymbol{J}_s{}^{\mathrm{inc}}\}(\vec{r}_n^{\,\mathrm{c}-}) \cdot \vec{\varrho}_n^{\,\mathrm{c}-}\right] \\
& - l_n\left[\acute{\phi}_J^2\{\boldsymbol{J}_s{}^{\mathrm{inc}}\}(\vec{r}_n^{\,\mathrm{c}+}) - \acute{\phi}_J^2\{\boldsymbol{J}_s{}^{\mathrm{inc}}\}(\vec{r}_n^{\,\mathrm{c}-})\right], \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

wenn man eine Ein-Punkt-Regel für das Integral des inneren Produktes anwendet und die Beziehung (2.91) beachtet. Die Verwendung der Ein-Punkt-Regel bedeutet hierbei, daß das Flächenintegral des inneren Produktes über ein Dreieck der Netzeinteilung durch das Produkt von Dreiecksfläche und Integranden im Dreiecksschwerpunkt approximiert wird. Diese Gleichung kann nun ausgewertet werden, wenn man die Definitionen (2.66), (2.67) und die Kontinuitätsgleichung (2.22) beachtet. Bei der Auswertung des Ausdruckes (5.7) beachte man ferner, daß sich die Gesamtwirkung der einfallenden elektrischen Flächenstromdichte aufgrund der Linearität der Integraloperatoren als Summe der Teilwirkungen der einzelnen gewichteten Basisfunktionen darstellen läßt.

5.2 Bestimmung der Elemente der Koeffizientenmatrix

Die Elemente der Koeffizientenmatrix $\underline{A}$ ergeben sich über die Definition (2.79) aus den Gleichungen (2.83) bis (2.90).

Für die Gleichung (2.83) erhält man über die Definition (2.66) durch Anwendung der Greenschen Dyade (4.87) für das Raumgebiet 2, der erneuten Nutzung der Ein-Punkt-Regel für das Integral des inneren Produktes und unter der Berücksichtigung, daß jeweils nur transversale Vektorkomponenten vorkommen:

$$
\begin{aligned}
d_{n\nu} \quad = \quad & \langle -j\omega \acute{\boldsymbol{A}}_J^2\{\vec{f}_\nu\}, \vec{f}_n\rangle_{\mathrm{Leitungsstreifen}} \\
\approx \quad & \frac{l_n}{2}\left[(-j\omega)\acute{\boldsymbol{A}}_J^2\{\vec{f}_\nu\}(\vec{r}_n^{\,\mathrm{c}+}) \cdot \vec{\varrho}_n^{\,\mathrm{c}+} + (-j\omega)\acute{\boldsymbol{A}}_J^2\{\vec{f}_\nu\}(\vec{r}_n^{\,\mathrm{c}-}) \cdot \vec{\varrho}_n^{\,\mathrm{c}-}\right] \\
= \quad & -\frac{l_n}{2}\left[\iint\limits_{\mathrm{Ls}} \mathcal{S}_0\left\{Z_2''(z_{\mathrm{Ls}}; z_{\mathrm{Ls}})\right\}\left(|(\vec{r}_n^{\,\mathrm{c}+} - \vec{r}\,')_t|\right)\vec{f}_\nu(\vec{r}\,')\mathrm{d}S' \cdot \vec{\varrho}_n^{\,\mathrm{c}+}\right. \\
& \left. + \iint\limits_{\mathrm{Ls}} \mathcal{S}_0\left\{Z_2''(z_{\mathrm{Ls}}; z_{\mathrm{Ls}})\right\}\left(|(\vec{r}_n^{\,\mathrm{c}-} - \vec{r}\,')_t|\right)\vec{f}_\nu(\vec{r}\,')\mathrm{d}S' \cdot \vec{\varrho}_n^{\,\mathrm{c}-}\right]. \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

Für die Gleichung (2.84) erhält man über die Definition (2.67) durch Anwendung der Greenschen Funktion (4.82) für das Raumgebiet 2, der erneuten Nutzung der Ein-Punkt-Regel für das Integral des inneren Produktes und unter der Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung (2.22):

$$
\begin{aligned}
e_{n\nu} \quad = \quad & \langle -\mathrm{grad}\, \acute{\phi}_J^2\{\vec{f}_\nu\}, \vec{f}_n\rangle_{\mathrm{Leitungsstreifen}} \\
= \quad & \iint\limits_{\mathrm{Ls}} \acute{\phi}_J^2\{\vec{f}_\nu\}\left(\mathrm{div}_t \vec{f}_n\right)\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\approx l_n\left[\acute{\phi}_J^2\{\vec{f}_\nu\}(\vec{r}_n^{c+}) - \acute{\phi}_J^2\{\vec{f}_\nu\}(\vec{r}_n^{c-})\right] \\
&= l_n l_\nu \left[\frac{1}{F_\nu^+}\iint\limits_{F_\nu^+}\left(\mathcal{S}_0\left\{\frac{Z_2''(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ls}}) - Z_2'(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ls}})}{k_t^2}\right\}(|(\vec{r}_n^{c+}-\vec{r}')_t|)\right.\right. \\
&\quad \left. -\mathcal{S}_0\left\{\frac{Z_2''(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ls}}) - Z_2'(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ls}})}{k_t^2}\right\}(|(\vec{r}_n^{c-}-\vec{r}')_t|)\right)\mathrm{d}S' \\
&\quad +\frac{1}{F_\nu^-}\iint\limits_{F_\nu^-}\left(\mathcal{S}_0\left\{\frac{Z_2''(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ls}}) - Z_2'(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ls}})}{k_t^2}\right\}(|(\vec{r}_n^{c-}-\vec{r}')_t|)\right. \\
&\quad \left.\left. -\mathcal{S}_0\left\{\frac{Z_2''(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ls}}) - Z_2'(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ls}})}{k_t^2}\right\}(|(\vec{r}_n^{c+}-\vec{r}')_t|)\right)\mathrm{d}S'\right],
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

wobei die Beziehung (2.91) verwendet wurde.

Die Gleichung (2.85) ergibt sich, mit Hilfe der Greenschen Dyade (4.94) und der abermaligen Anwendung der Ein-Punkt-Regel für das Integral des inneren Produktes, zu

$$
\begin{aligned}
f_{n\mu} &= \left\langle -\frac{1}{\varepsilon_2}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_M^2\{\vec{f}_{N+\mu}\}, \vec{f}_n\right\rangle_{\text{Leitungsstreifen}} \\
&= \left\langle \iint\limits_{\mathrm{Ap}} \underline{G}_{EM}^2((\vec{r}-\vec{r}')_t; z_{\mathrm{Ls}}; z_{\mathrm{Ap}})\cdot \vec{f}_{N+\mu}(\vec{r}')\mathrm{d}S', \vec{f}_n\right\rangle_{\text{Leitungsstreifen}} \\
&\approx \frac{l_n}{2}\left[\iint\limits_{\mathrm{Ap}} \underline{G}_{EM}^2((\vec{r}_n^{c-}-\vec{r}')_t; z_{\mathrm{Ls}}; z_{\mathrm{Ap}})\cdot \vec{f}_{N+\mu}(\vec{r}')\mathrm{d}S'\cdot\vec{\varrho}_n^{c-}\right. \\
&\quad \left. + \iint\limits_{\mathrm{Ap}} \underline{G}_{EM}^2((\vec{r}_n^{c+}-\vec{r}')_t; z_{\mathrm{Ls}}; z_{\mathrm{Ap}})\cdot \vec{f}_{N+\mu}(\vec{r}')\mathrm{d}S'\cdot\vec{\varrho}_n^{c+}\right] \\
&= \frac{l_n}{4}\left[\iint\limits_{\mathrm{Ap}}\left\{[(\hat{y}\hat{y}-\hat{x}\hat{x})\sin(2\varphi_-') + (\hat{x}\hat{y}+\hat{y}\hat{x})\cos(2\varphi_-')]\cdot\vec{f}_{N+\mu}(\vec{r}')\right.\right. \\
&\quad \cdot\mathcal{S}_2\left\{\frac{T_2^{V'}(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ap}}) - T_2^{V''}(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ap}})}{k_t^2}\right\}(|(\vec{r}_n^{c-}-\vec{r}')_t|) + (\hat{y}\hat{x}-\hat{x}\hat{y})\cdot\vec{f}_{N+\mu}(\vec{r}') \\
&\quad \left.\cdot\mathcal{S}_0\left\{T_2^{V'}(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ap}}) + T_2^{V''}(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ap}})\right\}(|(\vec{r}_n^{c-}-\vec{r}')_t|)\right\}\mathrm{d}S'\cdot\vec{\varrho}_n^{c-} \\
&\quad + \iint\limits_{\mathrm{Ap}}\left\{[(\hat{y}\hat{y}-\hat{x}\hat{x})\sin(2\varphi_+') + (\hat{x}\hat{y}+\hat{y}\hat{x})\cos(2\varphi_+')]\cdot\vec{f}_{N+\mu}(\vec{r}')\right. \\
&\quad \cdot\mathcal{S}_2\left\{\frac{T_2^{V'}(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ap}}) - T_2^{V''}(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ap}})}{k_t^2}\right\}(|(\vec{r}_n^{c+}-\vec{r}')_t|) + (\hat{y}\hat{x}-\hat{x}\hat{y})\cdot\vec{f}_{N+\mu}(\vec{r}') \\
&\quad \left.\left.\cdot\mathcal{S}_0\left\{T_2^{V'}(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ap}}) + T_2^{V''}(z_{\mathrm{Ls}};z_{\mathrm{Ap}})\right\}(|(\vec{r}_n^{c+}-\vec{r}')_t|)\right\}\mathrm{d}S'\cdot\vec{\varrho}_n^{c+}\right],
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

sofern man beachtet, daß nur transversale Vektorkomponenten vorkommen. Die Winkel $\varphi_\pm'$ liegen dabei zwischen den transversalen Vektoren $(\vec{r}_n^{c\pm}-\vec{r}')_t$ und dem Einheitsvektor $\hat{x}$.

Die Gleichung (2.86) ergibt sich, mit Hilfe der Greenschen Dyade (4.94) und der erneuten Anwendung der Ein-Punkt-Regel für das Integral des inneren Produktes, zu

$$
\begin{aligned}
g_{m\nu} &= \left\langle \frac{1}{\mu_2} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_J^2\{\vec{f}_\nu\}, \vec{f}_{N+m} \right\rangle_{\text{Apertur}} \\
&= \left\langle \iint\limits_{\text{Ls}} \underline{G}_{HJ}^2((\vec{r}-\vec{r}')_t; z_{\text{Ap}}; z_{\text{Ls}}) \cdot \vec{f}_\nu(\vec{r}')\mathrm{d}S', \vec{f}_{N+m} \right\rangle_{\text{Apertur}} \\
&\approx \frac{l_{N+m}}{2} \left[\iint\limits_{\text{Ls}} \underline{G}_{HJ}^2((\vec{r}^{\,\text{c}-}_{N+m} - \vec{r}')_t; z_{\text{Ap}}; z_{\text{Ls}}) \cdot \vec{f}_\nu(\vec{r}')\mathrm{d}S' \cdot \vec{\varrho}^{\,\text{c}-}_{N+m} \right. \\
&\quad \left. + \iint\limits_{\text{Ls}} \underline{G}_{HJ}^2((\vec{r}^{\,\text{c}+}_{N+m} - \vec{r}')_t; z_{\text{Ap}}; z_{\text{Ls}}) \cdot \vec{f}_\nu(\vec{r}')\mathrm{d}S' \cdot \vec{\varrho}^{\,\text{c}+}_{N+m} \right] \\
&= \frac{l_{N+m}}{4} \left[\iint\limits_{\text{Ls}} \Big\{ [(\hat{y}\hat{y} - \hat{x}\hat{x})\sin(2\varphi'_-) + (\hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x})\cos(2\varphi'_-)] \cdot \vec{f}_\nu(\vec{r}') \right. \\
&\quad \cdot \mathcal{S}_2 \left\{ \frac{T_2^{I'}(z_{\text{Ap}}; z_{\text{Ls}}) - T_2^{I''}(z_{\text{Ap}}; z_{\text{Ls}})}{k_t^2} \right\} (|(\vec{r}^{\,\text{c}-}_{N+m} - \vec{r}')_t|) + (\hat{x}\hat{y} - \hat{y}\hat{x}) \cdot \vec{f}_\nu(\vec{r}') \\
&\quad \cdot \mathcal{S}_0 \left\{ T_2^{I'}(z_{\text{Ap}}; z_{\text{Ls}}) + T_2^{I''}(z_{\text{Ap}}; z_{\text{Ls}}) \right\} (|(\vec{r}^{\,\text{c}-}_{N+m} - \vec{r}')_t|) \Big\} \mathrm{d}S' \cdot \vec{\varrho}^{\,\text{c}-}_{N+m} \\
&\quad + \iint\limits_{\text{Ls}} \Big\{ [(\hat{y}\hat{y} - \hat{x}\hat{x})\sin(2\varphi'_+) + (\hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x})\cos(2\varphi'_+)] \cdot \vec{f}_\nu(\vec{r}') \\
&\quad \cdot \mathcal{S}_2 \left\{ \frac{T_2^{I'}(z_{\text{Ap}}; z_{\text{Ls}}) - T_2^{I''}(z_{\text{Ap}}; z_{\text{Ls}})}{k_t^2} \right\} (|(\vec{r}^{\,\text{c}+}_{N+m} - \vec{r}')_t|) + (\hat{x}\hat{y} - \hat{y}\hat{x}) \cdot \vec{f}_\nu(\vec{r}') \\
&\quad \left. \cdot \mathcal{S}_0 \left\{ T_2^{I'}(z_{\text{Ap}}; z_{\text{Ls}}) + T_2^{I''}(z_{\text{Ap}}; z_{\text{Ls}}) \right\} (|(\vec{r}^{\,\text{c}+}_{N+m} - \vec{r}')_t|) \Big\} \mathrm{d}S' \cdot \vec{\varrho}^{\,\text{c}+}_{N+m} \right], \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

sofern man beachtet, daß nur transversale Vektorkomponenten vorkommen. Für die Winkel $\varphi'_\pm$ gilt das gleiche wie zuvor.

Für die Gleichung (2.87) erhält man über die Definition (2.68) durch Anwendung der Greenschen Dyade (4.89) für das Raumgebiet 2, der erneuten Nutzung der Ein-Punkt-Regel für das Integral des inneren Produktes und unter der Berücksichtigung, daß jeweils nur transversale Vektorkomponenten vorkommen:

$$
\begin{aligned}
h_{m\mu} &= \langle -j\omega \acute{\boldsymbol{A}}_M^2\{\vec{f}_{N+\mu}\}, \vec{f}_{N+m} \rangle_{\text{Apertur}} \\
&\approx \frac{l_{N+m}}{2} \left[(-j\omega)\acute{\boldsymbol{A}}_M^2\{\vec{f}_{N+\mu}\}(\vec{r}^{\,\text{c}+}_{N+m}) \cdot \vec{\varrho}^{\,\text{c}+}_{N+m} + (-j\omega)\acute{\boldsymbol{A}}_M^2\{\vec{f}_{N+\mu}\}(\vec{r}^{\,\text{c}-}_{N+m}) \cdot \vec{\varrho}^{\,\text{c}-}_{N+m} \right] \\
&= -\frac{l_{N+m}}{2} \left[\iint\limits_{\text{Ap}} \mathcal{S}_0 \left\{ Y_2'(z_{\text{Ap}}; z_{\text{Ap}}) \right\} (|(\vec{r}^{\,\text{c}+}_{N+m} - \vec{r}')_t|) \vec{f}_{N+\mu}(\vec{r}')\mathrm{d}S' \cdot \vec{\varrho}^{\,\text{c}+}_{N+m} \right. \\
&\quad \left. + \iint\limits_{\text{Ap}} \mathcal{S}_0 \left\{ Y_2'(z_{\text{Ap}}; z_{\text{Ap}}) \right\} (|(\vec{r}^{\,\text{c}-}_{N+m} - \vec{r}')_t|) \vec{f}_{N+\mu}(\vec{r}')\mathrm{d}S' \cdot \vec{\varrho}^{\,\text{c}-}_{N+m} \right]. \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

Für die Gleichung (2.88) erhält man über die Definition (2.69) durch Anwendung der

Greenschen Funktion (4.88) für das Raumgebiet 2, der erneuten Nutzung der Ein-Punkt-Regel für das Integral des inneren Produktes und unter der Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung (2.23):

$$
\begin{aligned}
i_{m\mu} &= \langle -\operatorname{grad} \acute{\phi}^2_M\{\vec{f}_{N+\mu}\}, \vec{f}_{N+m}\rangle_{\text{Apertur}} \\
&= \iint\limits_{\text{Ap}} \acute{\phi}^2_M\{\vec{f}_{N+\mu}\}\left(\operatorname{div}_t \vec{f}_{M+m}\right) \mathrm{d}S \\
&\approx l_{N+m}\left[\acute{\phi}^2_M\{\vec{f}_{N+\mu}\}(\vec{r}^{c+}_{N+m}) - \acute{\phi}^2_M\{\vec{f}_{N+\mu}\}(\vec{r}^{c-}_{N+m})\right] \\
&= l_{N+m} l_{N+\mu}\left[\frac{1}{F^+_{N+\mu}}\iint\limits_{F^+_{N+\mu}}\left(\mathcal{S}_0\left\{\frac{Y_2'(z_{\text{Ap}};z_{\text{Ap}}) - Y_2''(z_{\text{Ap}};z_{\text{Ap}})}{k_t^2}\right\}(|(\vec{r}^{c+}_{N+m} - \vec{r}')_t|)\right.\right. \\
&\quad \left. -\mathcal{S}_0\left\{\frac{Y_2'(z_{\text{Ap}};z_{\text{Ap}}) - Y_2''(z_{\text{Ap}};z_{\text{Ap}})}{k_t^2}\right\}(|(\vec{r}^{c-}_{N+m} - \vec{r}')_t|)\right)\mathrm{d}S' \\
&\quad +\frac{1}{F^-_{N+\mu}}\iint\limits_{F^-_{N+\mu}}\left(\mathcal{S}_0\left\{\frac{Y_2'(z_{\text{Ap}};z_{\text{Ap}}) - Y_2''(z_{\text{Ap}};z_{\text{Ap}})}{k_t^2}\right\}(|(\vec{r}^{c-}_{N+m} - \vec{r}')_t|)\right. \\
&\quad \left.\left. -\mathcal{S}_0\left\{\frac{Y_2'(z_{\text{Ap}};z_{\text{Ap}}) - Y_2''(z_{\text{Ap}};z_{\text{Ap}})}{k_t^2}\right\}(|(\vec{r}^{c+}_{N+m} - \vec{r}')_t|)\right)\mathrm{d}S'\right], \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

wobei die Beziehung (2.91) verwendet wurde.

Für die Gleichung (2.89) erhält man über die Definition (2.68) durch Anwendung der Greenschen Dyade (4.89) für das Raumgebiet 3, der erneuten Nutzung der Ein-Punkt-Regel für das Integral des inneren Produktes und unter der Berücksichtigung, daß jeweils nur transversale Vektorkomponenten vorkommen:

$$
\begin{aligned}
j_{m\mu} &= \langle -j\omega \acute{\boldsymbol{A}}^3_M\{\vec{f}_{N+\mu}\}, \vec{f}_{N+m}\rangle_{\text{Apertur}} \\
&\approx \frac{l_{N+m}}{2}\left[(-j\omega)\acute{\boldsymbol{A}}^3_M\{\vec{f}_{N+\mu}\}(\vec{r}^{c+}_{N+m})\cdot\vec{\varrho}^{c+}_{N+m} + (-j\omega)\acute{\boldsymbol{A}}^3_M\{\vec{f}_{N+\mu}\}(\vec{r}^{c-}_{N+m})\cdot\vec{\varrho}^{c-}_{N+m}\right] \\
&= -\frac{l_{N+m}}{2}\left[\iint\limits_{\text{Ap}}\mathcal{S}_0\{Y_3'(z_{\text{Ap}};z_{\text{Ap}})\}(|(\vec{r}^{c+}_{N+m} - \vec{r}')_t|)\vec{f}_{N+\mu}(\vec{r}')\mathrm{d}S'\cdot\vec{\varrho}^{c+}_{N+m}\right. \\
&\quad \left. + \iint\limits_{\text{Ap}}\mathcal{S}_0\{Y_3'(z_{\text{Ap}};z_{\text{Ap}})\}(|(\vec{r}^{c-}_{N+m} - \vec{r}')_t|)\vec{f}_{N+\mu}(\vec{\varrho}')\mathrm{d}S'\cdot\vec{\varrho}^{c-}_{N+m}\right]. \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

Für die Gleichung (2.90) erhält man über die Definition (2.69) durch Anwendung der Greenschen Funktion (4.88) für das Raumgebiet 3, der erneuten Nutzung der Ein-Punkt-Regel für das Integral des inneren Produktes und unter der Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung (2.23):

$$
\begin{aligned}
k_{m\mu} &= \langle -\operatorname{grad} \acute{\phi}^3_M\{\vec{f}_{N+\mu}\}, \vec{f}_{N+m}\rangle_{\text{Apertur}} \\
&= \iint\limits_{\text{Ap}} \acute{\phi}^3_M\{\vec{f}_{N+\mu}\}\left(\operatorname{div}_t \vec{f}_{N+m}\right) \mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\approx \; l_{N+m}\left[\acute{\phi}^3_M\{\vec{f}_{N+\mu}\}(\vec{r}^{c+}_{N+m}) - \acute{\phi}^3_M\{\vec{f}_{N+\mu}\}(\vec{r}^{c-}_{N+m})\right] \\
&= \; l_{N+m}l_{N+\mu}\left[\frac{1}{F^+_{N+\mu}}\iint\limits_{F^+_{N+\mu}}\left(\mathcal{S}_0\left\{\frac{Y_3'(z_{\mathrm{Ap}};z_{\mathrm{Ap}}) - Y_3''(z_{\mathrm{Ap}};z_{\mathrm{Ap}})}{k_t^2}\right\}(|(\vec{r}^{c+}_{N+m} - \vec{r}')_t|)\right.\right. \\
&\quad \left. -\mathcal{S}_0\left\{\frac{Y_3'(z_{\mathrm{Ap}};z_{\mathrm{Ap}}) - Y_3''(z_{\mathrm{Ap}};z_{\mathrm{Ap}})}{k_t^2}\right\}(|(\vec{r}^{c-}_{N+m} - \vec{r}')_t|)\right)\mathrm{d}S' \\
&\quad +\frac{1}{F^-_{N+\mu}}\iint\limits_{F^-_{N+\mu}}\left(\mathcal{S}_0\left\{\frac{Y_3'(z_{\mathrm{Ap}};z_{\mathrm{Ap}}) - Y_3''(z_{\mathrm{Ap}};z_{\mathrm{Ap}})}{k_t^2}\right\}(|(\vec{r}^{c-}_{N+m} - \vec{r}')_t|)\right. \\
&\quad \left.\left. -\mathcal{S}_0\left\{\frac{Y_3'(z_{\mathrm{Ap}};z_{\mathrm{Ap}}) - Y_3''(z_{\mathrm{Ap}};z_{\mathrm{Ap}})}{k_t^2}\right\}(|(\vec{r}^{c+}_{N+m} - \vec{r}')_t|)\right)\mathrm{d}S'\right], \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

wobei die Beziehung (2.91) verwendet wurde.

Um die in den obigen Ausdrücken vorkommenden Flächenintegrale numerisch berechnen zu können, ist zu beachten, daß die vorkommenden Sommerfeld-Integrale an der Stelle $\varrho = 0$ mitunter singulär sind. Um eine numerische Berechnung der Flächenintegrale zu ermöglichen, müssen diese Singularitäten extrahiert und analytisch integriert werden. Wenn diese Extraktion auf die Operanden der Sommerfeld-Integrale übertragen wird, kann man gleichzeitig auch noch die Konvergenz der Sommerfeld-Integrale verbessern. Dieser Übergang in den Fourierbereich ist möglich, da eine Singularität im Ortsbereich im Fourierbereich durch das Verhalten im Unendlichen charakterisiert wird. Da es sich bei dem Sommerfeld-Integral nullter Ordnung um die inverse Fouriertransformation rotationssymmetrischer Funktionen handelt, entspricht der Singularität im Ortsbereich somit die Asymptote des Operanden des Sommerfeld-Integrals.

Um die Asymptoten der Operanden der Sommerfeld-Integrale zu ermitteln, ist das Verhalten dieser für den Fall $k_t \to \infty$ zu untersuchen. Hierbei ist zunächst festzustellen, daß sich wegen $jk_{zn} = \sqrt{k_t^2 - k_n^2}$ zunächst einmal

$$ jk_{zn} \to k_t \qquad (5.16) $$

ergibt. Hiermit folgen dann aus den Gleichungen (3.18) und (3.23) für die Wellenleitwerte der analogen Leitungen unmittelbar

$$ Y_n' \;\to\; \frac{j\omega\varepsilon_n}{k_t}, \qquad (5.17) $$

$$ Y_n'' \;\to\; \frac{k_t}{j\omega\mu_n}, \qquad (5.18) $$

wobei man sich daran erinnere, daß auch die longitudinalen Wellenzahlen für E- und H-Wellen im Falle eines transversal unbeschränkten Mediums gleich sind. Die Grenzwerte für die links- und rechtsseitigen Reflexionsfaktoren des n-ten Abschnittes der analogen Leitung für E-Wellen ergeben sich dann durch Einsetzen von (5.17) in die Gleichung (3.222) zu

$$ \overleftarrow{\Gamma}_n' \;\to\; \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}}, \qquad (5.19) $$

$$ \overrightarrow{\Gamma}_n' \;\to\; \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}}, \qquad (5.20) $$

sofern der n-te Leitungsabschnitt von den Leitungsabschnitten $(n-1)$ und $(n+1)$ begrenzt wird. Die anderseitigen Abschlüsse der analogen Leitungen $(n-1)$ und $(n+1)$ haben keine Auswirkung auf die asymptotischen Reflexionsfaktoren in der Leitung n, weil im asymptotischen Grenzfall gemäß der Bedingung (5.16) nur exponentiell gedämpfte Wellen betrachtet werden; somit können die Abschlüsse bei z_{n-1} und z_{n+2} nicht auf den Leitungsabschnitt n rückwirken. Entsprechend ergeben sich die Grenzwerte für die links- und rechtsseitigen Reflexionsfaktoren des n-ten Abschnittes der analogen Leitung für H-Wellen durch Einsetzen von (5.18) in die Gleichung (3.222) zu

$$\overleftarrow{\Gamma}''_n \rightarrow \frac{\mu_{n-1}-\mu_n}{\mu_{n-1}+\mu_n}, \tag{5.21}$$

$$\overrightarrow{\Gamma}''_n \rightarrow \frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{\mu_{n+1}+\mu_n}, \tag{5.22}$$

sofern der n-te Leitungsabschnitt von den Leitungsabschnitten $(n-1)$ und $(n+1)$ begrenzt wird. Eine Rückwirkung der übrigen Verbindungsstellen beziehungsweise Grenzflächen findet erneut wegen der exponentiellen Dämpfung im asymptotischen Falle nicht statt. Wird hingegen die n-te Leitung links- oder rechtsseitig ideal leitend abgeschlossen, was dem Anbringen einer ideal leitenden Schicht im geschichteten Dielektrikum entspricht, so ergibt sich für $\overleftarrow{\Gamma}_n$ oder $\overrightarrow{\Gamma}_n$ der Wert -1. Ist der n-te Leitungsabschnitt halbseitig unendlich, so ergibt sich für die Seite mit der unendlichen Ausdehnung ein Reflexionsfaktor von 0. Die letzten beiden Aussagen gelten sowohl für E- als auch für H-Wellen.

Im folgenden wird nun das asymptotische Verhalten von $Z''_n(z,z')$ betrachtet, welches zur Extraktion der Singularität im Integranden des Ausdruckes für $d_{n\nu}$ notwendig ist. Eine Singularität liegt in den hier betrachteten Fällen nur vor, wenn Auf- und Quellpunkt die gleiche z-Position besitzen, was somit weiterhin immer angenommen werden soll. Für den Fall $z=z'$ ergibt sich damit aus der Gleichung (3.228) unter Nutzung der Beziehungen (5.16) und (5.18) das asymptotische Verhalten zu

$$Z''_n(z;z) \rightarrow \frac{j\omega\mu_n}{2}\frac{1}{k_t} + \frac{j\omega\mu_n\overleftarrow{\Gamma}''_n}{2}\frac{\mathrm{e}^{-k_t[2(z-z_n)]}}{k_t} + \frac{j\omega\mu_n\overrightarrow{\Gamma}''_n}{2}\frac{\mathrm{e}^{-k_t[2(z_{n+1}-z)]}}{k_t}. \tag{5.23}$$

Entsprechend ergibt sich das asymptotische Verhalten von $(Z''_n(z;z)-Z'_n(z;z))/k_t^2$, welches zur Extraktion der Singularität im Integranden des Ausdruckes für $e_{n\nu}$ notwendig ist. Hierzu betrachtet man wieder die Gleichung (3.228), woraus sich über die Beziehungen (5.16), (5.17) und (5.18) unmittelbar das asymptotische Verhalten

$$\frac{Z''_n(z;z)-Z'_n(z;z)}{k_t^2} \rightarrow$$
$$O(k_t^{-3}) - \frac{1}{2j\omega\varepsilon_n}\frac{1}{k_t} - \frac{\overleftarrow{\Gamma}'_n}{2j\omega\varepsilon_n}\frac{\mathrm{e}^{-k_t[2(z-z_n)]}}{k_t} - \frac{\overrightarrow{\Gamma}'_n}{2j\omega\varepsilon_n}\frac{\mathrm{e}^{-k_t[2(z_{n+1}-z)]}}{k_t} \tag{5.24}$$

ergibt. Der Ausdruck $O(k_t^{-3})$ stellt dabei einen mit k_t^{-3} abklingenden Term dar, der gegenüber den anderen Termen vernachlässigt werden kann.

Das asymptotische Verhalten von $Y_n'(z;z)$, welches zur Extraktion der Singularitäten in den Integranden der Ausdrücke für $h_{m\mu}$ und $j_{m\mu}$ notwendig ist, ergibt sich aus der Gleichung (3.235) über die Beziehungen (5.16) und (5.17) zu

$$Y_n'(z;z) \to \frac{j\omega\varepsilon_n}{2}\frac{1}{k_t} - \frac{j\omega\varepsilon_n \overleftarrow{\Gamma}_n'}{2}\frac{\mathrm{e}^{-k_t[2(z-z_n)]}}{k_t} - \frac{j\omega\varepsilon_n \overrightarrow{\Gamma}_n'}{2}\frac{\mathrm{e}^{-k_t[2(z_{n+1}-z)]}}{k_t}. \tag{5.25}$$

Ebenso ergibt sich das asymptotische Verhalten von $(Y_n'(z;z) - Y_n''(z;z))/k_t^2$, welches zur Extraktion der Singularitäten in den Integranden der Ausdrücke für $i_{m\mu}$ und $k_{m\mu}$ notwendig ist. Hierzu betrachtet man erneut die Gleichung (3.235), woraus sich über die Beziehungen (5.16), (5.17) und (5.18) unmittelbar das asymptotische Verhalten

$$\frac{Y_n'(z;z) - Y_n''(z;z)}{k_t^2} \to$$
$$O(k_t^{-3}) - \frac{1}{2j\omega\mu_n}\frac{1}{k_t} + \frac{\overleftarrow{\Gamma}_n''}{2j\omega\mu_n}\frac{\mathrm{e}^{-k_t[2(z-z_n)]}}{k_t} + \frac{\overrightarrow{\Gamma}_n''}{2j\omega\mu_n}\frac{\mathrm{e}^{-k_t[2(z_{n+1}-z)]}}{k_t} \tag{5.26}$$

ergibt. Der mit k_t^{-3} abklingende Ausdruck $O(k_t^{-3})$ kann dabei erneut gegenüber den anderen Termen vernachlässigt werden.

Nun kann die Extraktion der Singularitäten erfolgen. Zu diesem Zweck wird nun von den Operanden der Sommerfeld-Integrale jeweils die entsprechende Asymptote subtrahiert; das Integral kann dann nicht mehr singulär werden und ist numerisch berechenbar. Die im Operanden der Sommerfeld-Integrale extrahierte Singularität muß dann anschließend wieder hinzugefügt werden, um die Extraktion wieder rückgängig zu machen. Hierzu müssen die Sommerfeld-Integrale der einzelnen Terme der asymptotischen Ausdrücke berechnet werden. Dies ist mit Hilfe der Sommerfeld-Identität[8]

$$\frac{\mathrm{e}^{-jkr}}{r} = \mathcal{S}_0\left\{2\pi\frac{\mathrm{e}^{-jk_z|d|}}{jk_z}\right\}(\varrho) \tag{5.27}$$

möglich, wobei hier $r^2 = \varrho^2 + d^2$ und $k^2 = k_z^2 + k_t^2$ sind. Hieraus ergibt sich dann im Grenzfall die Beziehung

$$\frac{1}{2\pi r} = \mathcal{S}_0\left\{\frac{\mathrm{e}^{-k_t|d|}}{k_t}\right\}(\varrho), \tag{5.28}$$

die sich aufgrund der Linearität des Sommerfeld-Integrals jeweils auf die einzelnen Terme der asymptotischen Darstellungen anwenden läßt. Damit erhält man dann eine Darstellung für die Singularitäten im Ortsbereich, die den Sommerfeld-Integralen einfach hinzuzufügen sind, sofern man sich mit der Flächenintegration nicht gerade in einem Dreieck der Netzdarstellung befindet, in dem die Singularitäten wirksam werden. In einem solchen Falle ist das Flächenintegral jeweils nur über das desingularisierte Sommerfeld-Integral und den möglichen vektoriellen Faktor numerisch berechenbar, die Flächenintegration über die Singularität und den möglichen vektoriellen Faktor muß analytisch erfolgen. Dieses Ergebnis der analytischen Flächenintegration ist dann dem numerischen Flächenintegral über den desingularisierten Integranden hinzuzufügen. Da diese analytische Behandlung

[8] siehe [31]

der singulären Anteile von fundamentaler Bedeutung für die Berechenbarkeit der Matrizenelemente ist, wird auf diese im folgenden Abschnitt noch genauer eingegangen.

Die numerische Berechnung der desingularisierten Sommerfeld-Integrale erfolgt in der komplexen k_t-Zahlenebene, um die *im Fourierbereich* auftretenden Singularitäten der Operanden umgehen zu können. Bei diesen Singularitäten handelt es sich zum einen um Polstellen und zum anderen um Verzweigungspunkte. Die Polstellen entsprechen den ausbreitungsfähigen Oberflächenwellen. Über die genaue Lage dieser existieren keine nutzbaren Aussagen; es bleibt nur festzuhalten, daß sich die Polstellen im verlustfreien Fall genau auf der reellen Achse der k_t-Ebene befinden und bei vorhandenen Verlusten unterhalb der positiven bzw. oberhalb der negativen reellen Achse der k_t-Ebene liegen.[9] Die Polstellen können also durch einen geeigneten Integrationspfad im ersten Quadranten der k_t-Ebene sicher umgangen werden. Die Verzweigungspunkte ergeben sich aus der Wellenausbreitung in einer halbseitig unendlichen Abschlußschicht, so daß bei einer planaren mehrfach geschichteten Struktur in der k_t-Ebene höchstens vier Verzweigungsschnitte auftreten können, deren Verlauf so gelegt werden kann, daß sie den Integrationspfad nicht kreuzen. Wenn nun k die Freiraumwellenzahl einer solchen Abschlußschicht sei, so ergeben sich aus dieser die Verzweigungspunkte bei $k_t = \pm k$, woraus zwei Verzweigungsschnitte entspringen. Dieser Zusammenhang zwischen den Verzweigungsschnitten und den halbseitig unendlichen Schichten läßt sich in folgender Weise verdeutlichen: In den Operanden der Sommerfeld-Integrale kommt die Größe k_z vor, die über die mehrdeutige Beziehung $k_z^2 = k^2 - k_t^2$ mit der Integrationsvariablen k_t verknüpft ist. Der aus dieser Mehrdeutigkeit resulierende Verzweigungsschnitt entsteht bei $k_z = 0$, was genau die oben genannten Positionen ergibt. Diese Interpretation ist zunächst für alle Schichten gültig. Die Tatsache, daß $k_z = 0$ ist, zeigt jedoch an, daß die dem Verzweigungsschnitt zugeordnete Welle nur transversal verläuft. Wie von Chew in [31] dargelegt, ergeben sich derartige Transversalwellen an den Grenzflächen, um einen stetigen Übergang zwischen einer Halbkugelwelle in dem einen Medium und der Feldverteilung in dem anderen Medium zu erreichen. Da sich Halbkugelwellen nur in halbseitig unbegrenzten Medien ungestört ausbreiten können, existieren die mit ihnen verbundenen korrektiven Transversalwellen auch nur für halbseitig unbegrenzte Medien.

Aus dieser grundlegenden Topologie der Greenschen Dyaden im Fourierbereich kann man nun einen Integrationspfad für die Sommerfeld-Integrale ableiten. Um alle Polstellen und Verzweigungspunkte sicher zu umgehen, beginnt der Integrationspfad im Nullpunkt der komplexen k_t-Ebene und verläuft entlang der imaginären Achse bis zu einer geeigneten Stelle. Von dort an läuft der Integrationspfad bei konstantem Imaginärteil parallel zur positiven reellen Achse bis zu einem Punkt, dessen Realteil mit Sicherheit größer ist als der größte aller Polstellen und Verzweigungsschnitte. Diesen Realteil kann man abschätzen, indem man zum größten Realteil der Freiraumwellenzahlen aller Schichten einen geeigneten Faktor hinzu multipliziert. Von diesem Punkte aus verläuft der Integrationspfad bei konstantem Realteil zur reellen Achse hin. Auf der reellen Achse läuft dieser dann weiter bis ins Unendliche. Die Wahl der geeigneten Proportionen dieses Pfades erfolgt dann mittels Konvergenzbetrachtungen.

Auf dem ersten Teil dieses Integrationsweges wird im Rahmen dieser Arbeit die Gauß-

[9] siehe [31] unter Beachtung der anderen Zeitabhängigkeit

$$\iint\limits_{\Delta} f(\vec{r}')\mathrm{d}S' \approx \sum_{i=1}^{7} g_i f(\vec{r}_i)$$		
i	$\vec{r}_i$	g_i
1; 2; 3	$\frac{1+\sqrt{15}}{7}\vec{r}^{1;2;3} + \frac{6-\sqrt{15}}{7}\vec{r}^{c}$	$\frac{155-\sqrt{15}}{1200}\Delta$
4; 5; 6	$\frac{1-\sqrt{15}}{7}\vec{r}^{1;2;3} + \frac{6+\sqrt{15}}{7}\vec{r}^{c}$	$\frac{155+\sqrt{15}}{1200}\Delta$
7	$\vec{r}^{c}$	$\frac{9}{40}\Delta$
$\vec{r}^{1;2;3}$: Eckpunkte des Dreiecks $\vec{r}^{c}$: Schwerpunkt des Dreiecks Δ : Fläche des Dreiecks		

Tabelle 2: Sieben-Punkte-Regel für Integration über Dreiecksfläche

Legendre-Quadratur gemäß [35] angewandt. Dieser Abschnitt endet ein geeignetes Stück nach Rückkehr auf die reelle Achse. Um das verbleibende, ins Unendliche reichende Integral möglichst genau und effektiv zu approximieren, wird die in [9] dargestellte Methode der Mittelwerte verwendet. Mosig demonstriert diese explizit nur für den Fall streng periodischer Integranden, es zeigt sich jedoch, daß die Methode der Mittelwerte auch auf quasiperiodische Funktionen, wie zum Beispiel Besselfunktionen, anwendbar ist. Die Methode der Mittelwerte dient im allgemeinen der Ermittlung eines Integrals, daß von einer endlichen unteren Grenze bis ins Unendliche reicht. Der Integrand bestehe dabei aus einem Produkt einer periodischen oder quasiperiodischen Teilfunktion und einer Funktion mit der Ordnung $O(k_t^{\alpha})$. Der Algorithmus beginnt mit der Berechnung einer Folge von $(a+1)$ Teilintegralen, die jeweils von der gemeinsamen unteren Grenze bis zum Ende der nächsten Halbperiode reichen. Als untere Grenze wählt man am besten ein Extremum der periodischen Teilfunktion, so daß das $(a+1)$-te Teilintegral genau $(a+1)$ Halbperioden dieser umfaßt. Im nächsten Schritt wird aus dieser Folge von $(a+1)$ Teilintegralen eine Folge von a Mittelwerten berechnet, indem man die Werte jeweils benachbarter Teilintegrale mittelt. Die resultierende Folge von Mittelwerten wird dann wiederholt in gleicher Weise gemittelt, bis ein einziger Mittelwert übrig bleibt. Dieser stellt dann den Schätzwert für das uneigentliche Integral dar. Die Approximation kann durch Erhöhen der Anzahl der Mittelungen a beliebig verbessert werden. Im hier betrachteten Fall handelt es sich bei der quasiperiodischen Funktion um die Besselfunktion des Sommerfeld-Integrals und bei der anderen um den Rest des Integranden.

Um Rechenzeit zu sparen, werden Interpolationstafeln von den Sommerfeld-Integralen bezüglich des Abstandes von Auf- und Quellpunkt angelegt. Aus diesen können dann die Sommerfeld-Integrale ohne großen Rechenaufwand über eine Lagrange-Interpolation zweiten Grades berechnet werden. Die anschließende Berechnung der Integrale über die

Quellflächen läßt sich immer auf eine endliche Anzahl von Integrationen über die Dreiecke des Netzes von Apertur beziehungsweise Leitungsstreifen zurückführen. Zur Integration über eine Dreiecksfläche, einem zweidimensionalen Simplex, wird die Sieben-Punkte-Regel nach [1] angewendet. Die entsprechenden Abtastpunkte und Gewichte sind in der Tabelle 2 angegeben. Mit dieser Regel kann ein Polynom fünften Grades mit zwei Variablen exakt integriert werden, obwohl ein solches aus bis zu 21 Termen besteht. Damit handelt es sich also um ein *effizientes* Verfahren. Bei der Integration über die Dreiecksflächen ist zu beachten, daß eine Anordnung von Aufpunkt und Quelldreieck zu maximal neun Elementen der Koeffizientenmatrix einen Beitrag liefern kann. Es ist also besonders effektiv, über jedes Dreieck einmal zu integrieren um dessen Beitrag dann den entsprechenden Matrixelementen hinzuzufügen. Die Elemente des Anregungsvektors ergeben sich dabei ähnlich durch Addition der entsprechend gewichteten Beiträge.

5.3 Behandlung der Singularitäten

An dieser Stelle sollen die Flächenintegrale mit singulärem Integranden entwickelt werden, die zur analytischen Integration der extrahierten Singularitäten notwendig sind. Die grundsätzliche Vorgehensweise ist dabei die folgende:[10]

1. Das Integral über die Fläche S wird in zwei Integrale über $(S - S_\epsilon)$ und S_ϵ aufgespalten. Der singuläre Punkt liegt dabei in S_ϵ; das eigentliche Integral erhält man dann durch den Grenzübergang $S_\epsilon \to 0$, sofern die Summe der Teilintegrale dabei konstant bleibt.

2. Der Integrand über $(S-S_\epsilon)$ wird nun mit Hilfe des zweidimensionalen Nablaoperators ∇_S ausgedrückt. Da der Integrand in $(S - S_\epsilon)$ nicht singulär ist, kann dort der Greensche Satz angewendet werden, der in Operatorschreibweise
$$\iint\limits_{S-S_\epsilon} \mathrm{d}S' \nabla'_S = \oint\limits_{\partial(S-S_\epsilon)} \mathrm{d}l' \,\hat{u} \tag{5.29}$$
lautet. Dabei ist $\hat{u}$ der Einheitsnormalenvektor auf dem Rand $\partial(S - S_\epsilon)$, der aus dem Gebiet $(S - S_\epsilon)$ herauszeigt. Hiermit ist es möglich, das Integral über die Fläche $(S - S_\epsilon)$ durch ein Integral über den Rand $\partial(S - S_\epsilon)$ zu ersetzen.

3. Als nächstes ist der Grenzwert des Integrals über S_ϵ zu ermitteln. Dieser würden nur verschwinden, wenn der Integrand endlich wäre. Bei einem singulären Integranden ergibt sich ein bestimmter Wert.

4. Nun wird der Grenzwert des Integrals über $\partial(S-S_\epsilon)$ ermittelt. Dabei ist zu beachten, daß der Beitrag von ∂S_ϵ nicht verschwindet, weil der Integrand nicht endlich bleibt. Der entsprechende Grenzwert muß also explizit ermittelt werden.

5. Das Integral ergibt sich also schließlich als Summe des Flächenintegrals über S_ϵ, des Linienintegrals über ∂S_ϵ und des Linienintegrals über ∂S. Letzteres läßt sich im hier betrachteten Falle in eine Summe von Linienintegralen über die Dreieckskanten zerlegen: $\partial S = \partial_1 S + \partial_2 S + \partial_3 S$

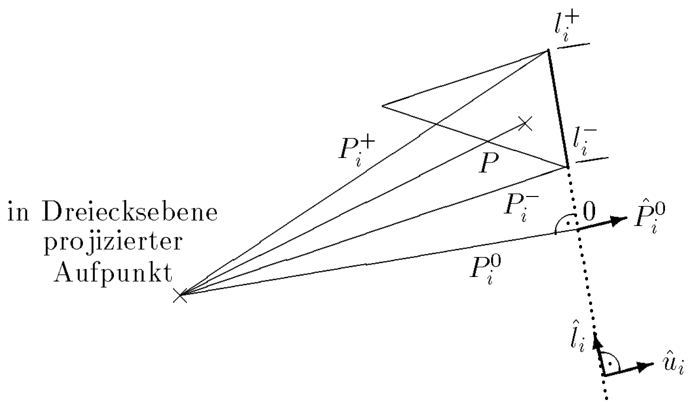


Abbildung 6: Die zugeordneten Größen der i-ten Kante

Den folgenden Berechnungen wird die Geometrie in Abbildung 6 zugrunde gelegt. Hierbei handelt es sich um eine Darstellung der Ebene in der das Dreieck liegt, über dessen Fläche integriert werden soll. Der Aufpunkt befindet sich dabei im allgemeinen im Abstand d über dieser Ebene. Die Länge der direkten Verbindungslinie zwischen Aufpunkt und Integrationspunkt ist demnach $R = \sqrt{P^2 + d^2}$. Dementsprechend gelten ferner $R_i^0 = \sqrt{(P_i^0)^2 + d^2}$ und $R_i^\pm = \sqrt{(P_i^\pm)^2 + d^2}$. Unter Beachtung dieser Nomenklatur soll nun das Integral

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}S'}{R}$$

berechnet werden, wobei S für die Fläche des Dreiecks steht. Dieser Integrand besitzt am Aufpunkt eine Singularität, wenn dieser in das Integrationsgebiet fällt. Die Aufteilung des Integrationsbereiches ist trivial, deshalb wird gleich mit der Einführung des Nablaoperators begonnen. Sei $\hat{P}$ der von der Projektion des Aufpunktes zum Integrationspunkt zeigende Einheitsvektor, so gilt bei der Verwendung von Polarkoordinaten in der Ebene von S mit dem Aufpunkt als Ursprung:

$$\begin{aligned}
\nabla'_S \cdot \left(\frac{R}{P}\hat{P}\right) &= \nabla'_S \left(\frac{\sqrt{P^2+d^2}}{P}\hat{P}\right) \\
&= \frac{1}{P}\frac{\partial}{\partial P} P \frac{\sqrt{P^2+d^2}}{P} \\
&= \frac{1}{P} 2P \frac{1}{2\sqrt{P^2+d^2}} \\
&= \frac{1}{R}.
\end{aligned}$$

Das zu berechnende Integral läßt sich nun also wie folgt umschreiben:

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}S'}{R} = \lim_{S_\epsilon \to 0} \iint_{S-S_\epsilon} \nabla'_S \cdot \left(\frac{R}{P}\hat{P}\right) \mathrm{d}S' + \lim_{S_\epsilon \to 0} \iint_{S_\epsilon} \frac{\mathrm{d}S'}{R}$$

[10] siehe [10]

$$= \lim_{S_\epsilon \to 0} \oint\limits_{\partial(S-S_\epsilon)} \frac{R}{P}\hat{P}\cdot\hat{u}\mathrm{d}l' + \lim_{S_\epsilon\to 0}\iint\limits_{S_\epsilon} \frac{\mathrm{d}S'}{R},$$

wobei für die letzte Zeile der zweidimensionale Gaußsche Satz verwendet wurde. Für S_ϵ sei ein Kreissegment mit dem Radius ϵ und dem Winkel α_{AP} angenommen. Unter Verwendung von Polarkoordinaten für das zweite Integral ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S'}{R} &= \lim_{S_\epsilon \to 0} \oint\limits_{\partial(S-S_\epsilon)} \frac{R}{P}\hat{P}\cdot\hat{u}\mathrm{d}l' + \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\epsilon\int_0^{\alpha_{\mathrm{AP}}} \frac{P\mathrm{d}P\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{P^2+d^2}} \\
&= \lim_{S_\epsilon \to 0} \oint\limits_{\partial(S-S_\epsilon)} \frac{R}{P}\hat{P}\cdot\hat{u}\mathrm{d}l' + \lim_{\epsilon\to 0}\alpha_{\mathrm{AP}}\left[\sqrt{P^2+d^2}\right]_0^\epsilon \\
&= \lim_{S_\epsilon \to 0} \oint\limits_{\partial(S-S_\epsilon)} \frac{R}{P}\hat{P}\cdot\hat{u}\mathrm{d}l' + \lim_{\epsilon\to 0}\alpha_{\mathrm{AP}}\left(\sqrt{\epsilon^2+d^2}-|d|\right) \\
&= \lim_{S_\epsilon \to 0} \int\limits_{\partial S_\epsilon} \frac{R}{P}\hat{P}\cdot\hat{u}\mathrm{d}l' + \sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\partial_i S} \frac{R}{P}\hat{P}\cdot\hat{u}_i\mathrm{d}l',
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile der äußere Rand in die einzelnen Dreieckskanten aufgeteilt wurde. α_{AP} ist dabei der Winkel des Kreisbogens, der um den Aufpunkt geschlagen wird, um diesen von der restlichen Dreiecksfläche abzutrennen. Wenn der Aufpunkt im Dreieck liegt, ist $\alpha_{\mathrm{AP}} = 2\pi$; wenn der Aufpunkt in einer Kante liegt, ist $\alpha_{\mathrm{AP}} = \pi$ und in den Ecken ist α_{AP} gleich den entsprechenden Eckwinkeln. Das erneute Einführen von Polarkoordinaten mit Ursprung im Aufpunkt für das Linienintegral um die Singularität führt zu:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S'}{R} &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\alpha_{\mathrm{AP}}} \frac{\sqrt{P^2+d^2}}{P}\hat{P}\cdot\hat{u}\epsilon\mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\partial_i S} \frac{R}{P}\hat{P}\cdot\hat{u}_i\mathrm{d}l' \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0}\sqrt{1+\frac{d^2}{\epsilon^2}}\,\epsilon\int_0^{\alpha_{\mathrm{AP}}}\mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\partial_i S} \frac{R}{P}\hat{P}\cdot\hat{u}_i\mathrm{d}l' \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0}\sqrt{\epsilon^2+d^2}\int_0^{\alpha_{\mathrm{AP}}}\mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\partial_i S} \frac{R}{P}\hat{P}\cdot\hat{u}_i\mathrm{d}l' \\
&= -\alpha_{\mathrm{AP}}\lim_{\epsilon\to 0}\sqrt{\epsilon^2+d^2} + \sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\partial_i S} \frac{R}{P}\hat{P}\cdot\hat{u}_i\mathrm{d}l' \\
&= -\alpha_{\mathrm{AP}}|d| + \sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\partial_i S} \frac{R}{P}\hat{P}\cdot\hat{u}_i\mathrm{d}l',
\end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, daß der Normaleneinheitsvektor $\hat{u}$ in das Innere von S_ϵ zeigt. Die verbleibenden Integrale werden jetzt wie folgt umgeschrieben:

$$\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S'}{R} = -\alpha_{\mathrm{AP}}|d| + \sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\partial_i S} \frac{R}{P}\hat{P}\cdot\hat{u}_i\mathrm{d}l'$$

$$= \quad -\alpha_{\mathrm{AP}}|d| + \sum_{i=1}^{3} \vec{P}_i^0 \cdot \hat{u}_i \int\limits_{\partial_i S} \left(\frac{1}{R} + \frac{d^2}{P^2 R} \right) \mathrm{d}l'$$

$$= \quad -\alpha_{\mathrm{AP}}|d| + \sum_{i=1}^{3} \vec{P}_i^0 \cdot \hat{u}_i \int\limits_{l_i^-}^{l_i^+} \left(\frac{1}{\sqrt{(P_i^0)^2 + l'^2 + d^2}} + \frac{d^2}{((P_i^0)^2 + l'^2)\sqrt{(P_i^0)^2 + l'^2 + d^2}} \right) \mathrm{d}l'.$$

Dies ist möglich, weil der Integrationspunkt in $\partial_i S$ liegt und dort immer

$$P\hat{P} \cdot \hat{u}_i = \vec{P}_i^0 \cdot \hat{u}_i$$

gilt, wobei $\vec{P}_i^0 = P_i^0 \hat{P}_i^0$ ist. Der erste Term des Integranden wird hierbei gemäß [30] aus

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \tag{5.30}$$

mit $a^2 = (P_i^0)^2 + d^2$ und $x = l'$ ermittelt; der zweite Term ergibt sich gemäß [30] aus

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2 + b)\sqrt{fx^2 + g}} = \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt{ag - bf}} \arctan \frac{x\sqrt{ag - bf}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2 + g}} + C \tag{5.31}$$

mit $x = l'$, $a = 1$, $b = (P_i^0)^2$, $f = 1$ und $g = (P_i^0)^2 + d^2$. Nach dem Einsetzen der Grenzen ergibt sich unter Beachtung, daß $\sqrt{(P_i^0)^2 + d^2 + (l_i^\pm)^2} = R_i^\pm$ ist:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{S} \frac{\mathrm{d}S'}{R} \quad = \quad & -\alpha_{\mathrm{AP}}|d| + \sum_{i=1}^{3} \hat{P}_i^0 \cdot \hat{u}_i \left[P_i^0 \ln \frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} \right. \\ & \left. +|d| \left(\arctan \frac{|d| l_i^+}{P_i^0 R_i^+} - \arctan \frac{|d| l_i^-}{P_i^0 R_i^-} \right) \right]. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Nun soll noch die Winkelgröße α_{AP} in den Summenausdruck involviert werden. Aus geometrischen Betrachtungen ergibt sich unmittelbar, daß

$$\alpha_{\mathrm{AP}} = \sum_{i=1}^{3} \hat{P}_i^0 \cdot \hat{u}_i \left(\arctan \frac{l_i^+}{P_i^0} - \arctan \frac{l_i^-}{P_i^0} \right)$$

ist. Ferner ergibt sich aus

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x - y}{1 + xy}$$

mit $x = \frac{l_i^\pm}{P_i^0}$ und $y = \frac{|d| l_i^\pm}{P_i^0 R_i^\pm}$ unter Berücksichtigung, daß $(l_i^\pm)^2 = (R_i^\pm)^2 - (R_i^0)^2$ und $(P_i^0)^2 = (R_i^0)^2 - d^2$ sind:

$$\arctan \frac{l_i^\pm}{P_i^0} - \arctan \frac{|d| l_i^\pm}{P_i^0 R_i^\pm} = \arctan \frac{P_i^0 l_i^\pm}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^\pm}.$$

Hiermit wird nun schließlich die Gleichung (5.32) zu

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S'}{R} &= \sum_{i=1}^{3} \hat{P}_i^0 \cdot \hat{u}_i \left[P_i^0 \ln \frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} \right. \\ &\left. -|d| \left(\arctan \frac{P_i^0 l_i^+}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^+} - \arctan \frac{P_i^0 l_i^-}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^-} \right) \right]. \qquad (5.33)\end{aligned}$$

Als nächstes wird nun das Integral

$$\iint\limits_S \frac{\vec{\varrho}' - \vec{\varrho}_{\mathrm{AP}}}{R} \mathrm{d}S'$$

berechnet. Hierbei sei $\vec{\varrho}'$ der in die Ebene von S projizierte Vektor, der vom Ursprung zum Integrationspunkt zeigt. Der Vektor $\vec{\varrho}_{\mathrm{AP}}$ stellt den in die Ebene von S projizierten Vektor vom Ursprung zum Aufpunkt dar. Die Vorgehensweise entspricht derjenigen im vorherigen Fall. Zunächst wird eine Darstellung des Integranden mittels des Nablaoperators gesucht. Hierbei werden erneut Polarkoordinaten in der Ebene von S mit dem Ursprung im Aufpunkt angesetzt. Damit ergibt sich

$$\nabla'_S R = \nabla'_S \sqrt{P^2 + d^2} = \hat{P} \frac{\partial}{\partial P} \sqrt{P^2 + d^2} = 2P \frac{1}{2\sqrt{P^2 + d^2}} \hat{P} = \frac{P}{R} \hat{P},$$

wobei zu beachten ist, daß $\vec{\varrho}' - \vec{\varrho}_{\mathrm{AP}} = P\hat{P}$ ist. Das Integral ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \frac{\vec{\varrho}' - \vec{\varrho}_{\mathrm{AP}}}{R} \mathrm{d}S' &= \lim_{S_\epsilon \to 0} \iint\limits_{S - S_\epsilon} \nabla'_S R \mathrm{d}S' + \lim_{S_\epsilon \to 0} \iint\limits_{S_\epsilon} \frac{\vec{\varrho}' - \vec{\varrho}_{\mathrm{AP}}}{R} \mathrm{d}S' \\ &= \lim_{S_\epsilon \to 0} \oint\limits_{\partial(S - S_\epsilon)} R \hat{u} \mathrm{d}l' + \lim_{S_\epsilon \to 0} \iint\limits_{S_\epsilon} \frac{P}{R} \hat{P} \mathrm{d}S' \\ &= \sum_{i=1}^{3} \hat{u}_i \int\limits_{\partial_i S} R \mathrm{d}l',\end{aligned}$$

wobei hier der zweidimensionale Greensche Satz angewendet und die Randkurve ∂S in die einzelnen Dreieckskanten $\partial_i S$ zerlegt wurde. Das Flächenintegral über S_ϵ und das Linienintegral über ∂S_ϵ verschwinden wegen der Zylindersymmetrie der *vektoriellen* Integranden, sofern S_ϵ erneut als Kreisscheibe angesetzt wird. Für die verbleibenden Integrale ergibt sich mit

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \right] + C \qquad (5.34)$$

gemäß [30] schließlich:

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \frac{\vec{\varrho}' - \vec{\varrho}_{\mathrm{AP}}}{R} \mathrm{d}S' &= \sum_{i=1}^{3} \hat{u}_i \int\limits_{l_i^-}^{l_i^+} \sqrt{l'^2 + (R_i^0)^2} \mathrm{d}l' \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \hat{u}_i \left((R_i^0)^2 \ln \frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} + l_i^+ R_i^+ - l_i^- R_i^- \right), \qquad (5.35)\end{aligned}$$

wobei beachtet wurde, daß $R_i^{\pm} = \sqrt{(l_i^{\pm})^2 + (R_i^0)^2}$ ist.

Eine Veränderung des Bezugsvektors, zum Beispiel vom projizierten Aufpunktvektor $\vec{\varrho}_{\mathrm{AP}}$ zu einem projizierten Scheitelpunktvektor $\vec{\varrho}_{\mathrm{SP}}$, ist über die Beziehung

$$\iint\limits_S \frac{\vec{\varrho}\,' - \vec{\varrho}_{\mathrm{SP}}}{R} \mathrm{d}S' = \iint\limits_S \frac{\vec{\varrho}\,' - \vec{\varrho}_{\mathrm{AP}}}{R} \mathrm{d}S' - (\vec{\varrho}_{\mathrm{SP}} - \vec{\varrho}_{\mathrm{AP}}) \iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S'}{R} \tag{5.36}$$

einfach möglich. Dieser Zusammenhang wird für die Singularitäten bei den vektoriellen Mischpotentialen benötigt, da die Vektoren $(\vec{\varrho}\,' - \vec{\varrho}_{\mathrm{SP}})$ den Vektoren $\vec{\varrho}_n^{\,+}$ bzw. $-\vec{\varrho}_n^{\,-}$ in den Basisfunktionen entsprechen.

5.4 Bestimmung des Eingangsreflexionsfaktors

Nachdem nun alle Elemente der problemlösenden Matrizengleichung (2.78) berechnet werden können, kann man die gesuchten Gewichte der Basisfunktionen der Flächenstromdichten über entsprechende algebraische Verfahren ermitteln. Desweiteren soll nun aus der berechneten Flächenstromdichte auf dem Leitungsstreifen der Eingangsreflexionsfaktor ermittelt werden. Hierzu ist die Flächenstromdichte auf dem speisenden Streifen in vor- und rücklaufende Wellenterme zu zerlegen, deren Amplituden dann ins Verhältnis gesetzt werden können. Die hierzu notwendige Schätzung der Ausbreitungskonstanten erfolgt dabei mittels der Matrix-Pencil-Methode, die sich anschließende Schätzung der Amplituden erfolgt nach dem Prinzip des kleinsten Fehlerquadrates.

5.4.1 Ermittlung der Ausbreitungskonstanten

Die Angabe eines Eingangsreflexionsfaktors geht davon aus, daß der Stromfluß in Längsrichtung auf dem speisenden Leitungsstreifen in Wellentermen darstellbar ist. Die Ausbreitungskonstanten der beteiligten Wellenterme sollen nun mittels der Matrix-Pencil-Methode[11] aus einer Reihe äquidistanter Abtastwerte des komplexen Stromflusses in Längsrichtung der Speiseleitung geschätzt werden. Hierbei ist es wichtig, daß die Gitterkonstante der Netzeinteilung ein ganzzahliges Vielfaches der gewählten Abtastdistanz κ ist, um die Störanteile möglichst gering zu halten. Die jeweiligen Werte des Stromflusses ergeben sich dabei durch die Integration der Längskomponente der elektrischen Flächenstromdichte über die Breite des speisenden Leitungsstreifens. Hierzu wird erneut die Gauß-Legendre-Quadratur verwendet.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist dabei die Annahme, daß sich die Abtastwerte des Stromflusses y_k durch

$$\begin{aligned} y_k &= x_k + n_k \\ &= \sum_{t=1}^{M} A_t \mathrm{e}^{j\beta_t \kappa k} + n_k \end{aligned} \tag{5.37}$$

[11] siehe [16]

darstellen lassen. Der Index k laufe dabei von 0 bis $(N-1)$, κ sei der Abstand zwischen den Abtastwerten, β_t seien die gesuchten, komplexen Ausbreitungskonstanten, A_t die entsprechenden Amplituden und n_k das überlagerte Rauschen. Die Größe M stellt hierbei die Anzahl der vorhandenen Wellenterme dar. Es ist anzumerken, daß die Größen M und N in diesem Abschnitt in einem anderen Zusammenhang verwendet werden als wie zuvor; aufgrund der andersartigen Thematik dürfte es jedoch keine Verwechselungen geben.

Die Matrix-Pencil-Methode basiert auf prinzipiellen Eigenschaften ungestörter, sinusförmiger Signale. Diese Eigenschaften lassen sich mit Hilfe der Definition spezieller Matrizen formalisieren. Hierzu ordnet man die Abtastwerte einer ungestörten Überlagerung verschiedener Sinussignale zunächst in Form der Spaltenvektoren

$$\underline{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \vdots \\ x_{N-L+t-1} \end{pmatrix} \tag{5.38}$$

an. Aus diesen Spaltenvektoren können dann die $(N-L) \times L$-Matrizen

$$\underline{X}_0 = (\underline{x}_{L-1}\, \underline{x}_{L-2} \cdots \underline{x}_0)\,, \tag{5.39}$$

$$\underline{X}_1 = (\underline{x}_L\, \underline{x}_{L-1} \cdots \underline{x}_1) \tag{5.40}$$

aufgestellt werden. Hierbei stellt L einen wählbaren Parameter der Matrix-Pencil-Methode dar. Wie in [13] gezeigt wird, stellt schließlich die Wahl $2L = N$ in der Regel eine sehr gute Annäherung der Schätzfehler an die Cramer-Rao-Schranke dar. Doch zunächst soll weiterhin das ungestörte Signal betrachtet werden. Bei dem betrachteten sinusförmigen Signal besitzen die Matrizen $\underline{X}_0$ und $\underline{X}_1$ nämlich eine besondere innere Struktur, welche die Zerlegungen

$$\underline{X}_0 = \underline{Z}_L \cdot \underline{P} \cdot \underline{Z}_R, \tag{5.41}$$

$$\underline{X}_1 = \underline{Z}_L \cdot \underline{P} \cdot \underline{Z} \cdot \underline{Z}_R \tag{5.42}$$

erlaubt, wobei

$$\underline{Z}_L = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_M \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{N-L-1} & \cdots & z_M^{N-L-1} \end{pmatrix}, \tag{5.43}$$

$$\underline{P} = \mathrm{diag}(A_1; A_2; \ldots; A_M), \tag{5.44}$$

$$\underline{Z}_R = \begin{pmatrix} z_1^{L-1} & z_1^{L-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_M^{L-1} & z_M^{L-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.45}$$

$$\underline{Z} = \mathrm{diag}(z_1; z_2; \ldots; z_M), \tag{5.46}$$

mit

$$z_t = \mathrm{e}^{j\beta_t \kappa} \tag{5.47}$$

gilt. Mit diag(...) werden hierbei Diagonalmatrizen mit den aufgelisteten Diagonalelementen bezeichnet. Diese Zerlegung kann man durch Ausführen der Matrizenmultiplikationen direkt verifizieren.

Diese Zerlegung dient nun dazu weitere wichtige Eigenschaften der Matrizen $\underline{X}_0$ und $\underline{X}_1$ zu zeigen. Als solche ergibt sich zunächst die Tatsache, daß alle z_t dann und nur dann den Rang des Matrix-Pencils $(\underline{X}_1 - z\underline{X}_0)$ verringern, wenn $M \leq L \leq (N-M)$ ist. Ansonsten ist kein einziges z_t eine rangverringernde Zahl.

Zum Beweis dieses Sachverhaltes betrachte man die Gleichung

$$\underline{X}_1 - z\underline{X}_0 = \underline{Z}_L \cdot \underline{P} \cdot (\underline{Z} - z\underline{E}_M) \cdot \underline{Z}_R,$$

die sich unmittelbar durch Einsetzen der obigen Zerlegungen in den Matrix-Pencil ergibt. Hierbei steht $\underline{E}_M$ für eine $M \times M$-Einheitsmatrix. Die Matrizen $\underline{P}$ und $\underline{Z}$ sind $M \times M$-Matrizen mit vollem Rang. Setzt man nun $z = z_t$ so wird das tt-Element der Matrix $(\underline{Z} - z\underline{E}_M)$ zu null. Damit werden die Wirkungen der t-ten Spalte von $\underline{Z}_L$ und der t-ten Zeile von $\underline{Z}_R$ in der obigen Gleichung aufgehoben. Sofern $M \leq L \leq (N-M)$ ist, besitzen $\underline{Z}_L$ und $\underline{Z}_R$ den Rang M. Damit ergibt sich dann, daß Rang $(\underline{X}_1 - z_t\underline{X}_0)+1 = M =$ Rang $(\underline{X}_1 - z\underline{X}_0)$ gilt, sofern z nicht zur Menge der z_t gehört. Bei $L < M$ ergeben sich Rang $(\underline{Z}_R) = L$ und Rang $((\underline{Z} - z_t\underline{E}_M) \cdot \underline{Z}_R) =$ Rang $((\underline{Z} - z\underline{E}_M) \cdot \underline{Z}_R) = L$, woraus folgt, daß sich der Rang von $(\underline{X}_1 - z\underline{X}_0)$ nicht bei $z = z_t$ verringert. Bei $L > (N-M)$ ergeben sich Rang $(\underline{Z}_L) = N - L$ und Rang $(\underline{Z}_L \cdot \underline{P} \cdot (\underline{Z} - z_t\underline{E}_M)) =$ Rang $(\underline{Z}_L \cdot \underline{P} \cdot (\underline{Z} - z\underline{E}_M)) = N - L$, woraus folgt, daß sich der Rang von $(\underline{X}_1 - z\underline{X}_0)$ erneut bei $z = z_t$ nicht verringert.

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist, daß sich für $M \leq L \leq (N-M)$ die Lösungen des verallgemeinerten singulären Eigenwertproblems

$$(\underline{X}_1 - z\underline{X}_0) \cdot \underline{q} = \underline{0}, \tag{5.48}$$

$$\underline{p}^{\mathrm{H}} \cdot (\underline{X}_1 - z\underline{X}_0) = \underline{0} \tag{5.49}$$

zu $z = z_t$, $\underline{q} = \underline{q}_t$ und $\underline{p}^{\mathrm{H}} = \underline{p}_t^{\mathrm{H}}$ ergeben. Hierbei steht $\underline{q}_t$ für den t-ten Spaltenvektor von

$$\underline{Z}_R^{+} = \underline{Z}_R^{\mathrm{H}} \cdot \left(\underline{Z}_R \cdot \underline{Z}_R^{\mathrm{H}}\right)^{-1} \tag{5.50}$$

und $\underline{p}_t^{\mathrm{H}}$ für den t-ten Zeilenvektor von

$$\underline{Z}_L^{+} = \left(\underline{Z}_L^{\mathrm{H}} \cdot \underline{Z}_L\right)^{-1} \cdot \underline{Z}_L^{\mathrm{H}}. \tag{5.51}$$

Der obere Index H steht dabei für die Transjugierte und der obere Index + für die Moore-Penrose-Inverse. Die Moore-Penrose-Inverse einer *beliebigen* Matrix $\underline{N}$ ist dabei diejenige Matrix $\underline{N}^{+}$, die sich immer eindeutig aus den Eigenschaften

$$\underline{N} \cdot \underline{N}^{+} \cdot \underline{N} = \underline{N}, \tag{5.52}$$

$$\underline{N}^{+} \cdot \underline{N} \cdot \underline{N}^{+} = \underline{N}^{+}, \tag{5.53}$$

$$\left(\underline{N} \cdot \underline{N}^{+}\right)^{\mathrm{H}} = \underline{N} \cdot \underline{N}^{+}, \tag{5.54}$$

$$\left(\underline{N}^{+} \cdot \underline{N}\right)^{\mathrm{H}} = \underline{N}^{+} \cdot \underline{N} \tag{5.55}$$

bestimmen läßt. Das Matrizenprodukt einer Moore-Penrose-Inversen mit ihrer ursprünglichen ergibt nur dann die Einheitsmatrix, sofern die Zeilenzahl der quadratischen Ergebnismatrix gleich dem Rang der ursprünglichen Matrix ist. Bei quadratischen, nicht singulären

Matrizen ist diese mit der normalen Inversen identisch. Die obige Eigenschaft kann dann durch Einsetzen der obigen Zerlegungen (5.41) und (5.42) direkt unter der Beachtung, daß

$$\underline{Z}_R \cdot \underline{Z}_R^+ = \underline{E}_M, \tag{5.56}$$
$$\underline{Z}_L^+ \cdot \underline{Z}_L = \underline{E}_M \tag{5.57}$$

gelten, bewiesen werden. Da der Rang des Matrix-Pencils nur bei $z = z_t$ und dann auch nur um genau eins abnimmt, ist die Lösung dieses Eigenwertproblems bis auf einen skalaren Faktor eindeutig.

Aus dem letzten Sachverhalt ergibt sich nun die Grundlage der Matrix-Pencil-Methode. Nachfolgend wird nun immer angenommen, daß $M \leq L \leq (N-M)$ gilt. Damit ergibt sich dann aus den Gleichungen (5.48) und (5.49) durch linksseitiges Multiplizieren von $\underline{X}_0^+$ zu (5.48):

$$\underline{X}_0^+ \cdot \underline{X}_1 \cdot \underline{q}_t = z_t \underline{X}_0^+ \cdot \underline{X}_0 \cdot \underline{q}_t = z_t \underline{q}_t. \tag{5.58}$$

Um die letzte Gleichheit zu beweisen, beachte man, daß sich die eindeutige Moore-Penrose-Inverse nur entsprechend den Gleichungen (5.50) beziehungsweise (5.51) berechnen läßt, sofern die ursprüngliche Matrix den maximal möglichen Rang besitzt, der sich als Minimum aus Zeilenzahl und Spaltenzahl ergibt. Anderenfalls läßt sich die Moore-Penrose-Inverse aus einer Zerlegung nach Maximalrang berechnen. Für die Matrix $\underline{X}_0$ ergibt sich eine solche Zerlegung zum Beispiel zu (5.41), da Rang $(\underline{X}_0)$ = Rang $(\underline{Z}_L)$ = Rang $(\underline{P})$ = Rang $(\underline{Z}_R) = M$ gilt. Die rechteckigen Matrizen $\underline{Z}_L$ und $\underline{Z}_R$ besitzen also ihren Maximalrang und die quadratische Matrix $\underline{P}$ ist invertierbar. Die Moore-Penrose-Inverse der Matrix $\underline{X}_0$ ergibt sich dann zu

$$\underline{X}_0^+ = \underline{Z}_R^+ \cdot \underline{P}^{-1} \cdot \underline{Z}_L^+. \tag{5.59}$$

Unter Beachtung der Gleichung (5.57) ergibt sich dann daraus

$$\underline{Z}_R^+ = \underline{X}_0^+ \cdot \underline{Z}_L \cdot \underline{P},$$

womit man dann direkt

$$\begin{aligned} \underline{X}_0^+ \cdot \underline{X}_0 \cdot \underline{Z}_R^+ &= \underline{X}_0^+ \cdot \underline{X}_0 \cdot \underline{X}_0^+ \cdot \underline{Z}_L \cdot \underline{P} \\ &= \underline{X}_0^+ \cdot \underline{Z}_L \cdot \underline{P} = \underline{Z}_R^+ \end{aligned} \tag{5.60}$$

zeigen kann, sofern man die Definitionseigenschaft (5.52) berücksichtigt. Hiermit wäre dann die letzte Gleichheit in (5.58) bewiesen, da $\underline{q}_t$ die t-te Spalte der Matrix $\underline{Z}_R^+$ ist und die Matrizengleichung (5.60) problemlos in ein Gleichungssystem der Spaltenvektoren $\underline{q}_t$ zerlegt werden kann.

Hiermit ist es also gelungen, die Berechnung der z_t auf ein gewöhnliches Eigenwertproblem zurückzuführen. Hierbei ist jedoch noch anzumerken, daß die $L \times L$-Matrix $\underline{X}_0^+ \cdot \underline{X}_1$ nicht ihren vollen Rang besitzt, da ihr Rang gleich M ist. Damit ergeben sich also $L - M$ Eigenwerte zu null. Im gestörten Fall soll nun daher ein Eigenwertproblem formuliert werden, daß nur die gesuchten z_t liefert.

Bei der bisherigen Betrachtung des ungestörten Signals handelte es sich um eine reine Berechnung der gesuchten z_t. Beim Übergang auf die Schätzung der z_t aus den gestörten

Abtastwerten y_k legt man dem gestörten Signal ein ähnliches Verhalten zugrunde wie dem ungestörten Signal. Man gelangt also dementsprechend zu einer Gleichung wie (5.58), wobei $\underline{X}_0$ und $\underline{X}_1^+$ durch $\underline{Y}_0$ und $\underline{Y}_1^+$ zu ersetzen sind, die man mit den Abtastwerten y_k anstelle der x_k gewinnt. Die eigentliche Schätzung findet jetzt bei der Ermittlung von $\underline{Y}_0^+$ statt. Hierzu ist zunächst die Anzahl M der vorhandenen z_t zu schätzen. Dies erfolgt mittels der Singulärwertzerlegung von $\underline{Y}_0$:

$$\underline{Y}_0 = \underline{U} \cdot \mathrm{diag}(\sigma_1; \ldots; \sigma_L) \cdot \underline{V}^{\mathrm{H}}. \tag{5.61}$$

Da bei störungsfreien Signalen für die der Größe nach geordneten Singulärwerte $\sigma_{M+1} = \ldots = \sigma_L = 0$ gilt, ergibt sich M bei einem gestörten Signal daraus, daß σ_{M+1}/σ_1 eine gegebene Schwelle unterschreitet. Hiermit ergibt sich dann die Zerlegung

$$\underline{Y}_0 = \underline{U_0} \cdot \mathrm{diag}(\sigma_1; \ldots; \sigma_M) \cdot \underline{V_0}^{\mathrm{H}}. \tag{5.62}$$

Die Matrizen $\underline{U_0}$ und $\underline{V_0}$ ergeben sich dabei durch Streichen der entsprechenden Spaltenvektoren in $\underline{U}$ und $\underline{V}$, die zu den verschwindenden Singulärwerten gehören. Aus dieser geschätzten Zerlegung kann man nun eine geschätzte Moore-Penrose-Inverse gewinnen:

$$\underline{Y}_0^+ = \underline{V_0} \cdot \underline{D}^{-1} \cdot \underline{U_0}^{\mathrm{H}}, \tag{5.63}$$

wobei

$$\underline{D} = \mathrm{diag}(\sigma_1; \ldots; \sigma_M) \tag{5.64}$$

gesetzt wurde. Setzt man nun $\underline{Y}_1$ und die Zerlegung von $\underline{Y}_0^+$ an Stelle der ungestörten Matrizen in die Gleichung (5.58) ein, so erhält man

$$\underline{V}_0 \cdot \underline{D}^{-1} \cdot \underline{U}_0^{\mathrm{H}} \cdot \underline{Y}_1 \cdot \underline{q}_t = z_t \underline{q}_t.$$

Da $\underline{V}_0^{\mathrm{H}} \cdot \underline{V}_0 = \underline{E}_M$ und $\underline{q}_t = \underline{V}_0 \cdot \underline{V}_0^{\mathrm{H}} \cdot \underline{q}_t$ gelten, ergibt sich hieraus durch linkseitiges Multiplizieren von $\underline{V}_0^{\mathrm{H}}$

$$\underline{D}^{-1} \cdot \underline{U}_0^{\mathrm{H}} \cdot \underline{Y}_1 \cdot \underline{V}_0 \cdot \left(\underline{V}_0^{\mathrm{H}} \cdot \underline{q}_t\right) = z_t \left(\underline{V}_0^{\mathrm{H}} \cdot \underline{q}_t\right). \tag{5.65}$$

Hiermit erhält man also die nicht symmetrische $M \times M$-Matrix

$$\underline{Z_E} = \underline{D}^{-1} \cdot \underline{U}_0^{\mathrm{H}} \cdot \underline{Y}_1 \cdot \underline{V}_0, \tag{5.66}$$

deren M Eigenwerte genau die gesuchten z_t darstellen. Aus diesen ergeben sich dann durch komplexes Logarithmieren und anschließendes Dividieren durch die Abtastdistanz κ die gesuchten komplexen Ausbreitungskonstanten β_t.

5.4.2 Ermittlung der Amplituden

Nachdem nun die komplexen Ausbreitungskonstanten β_t bekannt sind, sollen nun die zugehörigen Amplituden A_t ermittelt werden. Hierzu sucht man derartige A_t, die den Ausdruck

$$x(\kappa k) = \sum_{t=1}^{M} A_t \mathrm{e}^{j\beta_t \kappa k} \tag{5.67}$$

im Sinne des kleinsten quadratischen Fehlers möglichst gut an die gegebenen N Abtastpunkte $(\kappa k; y(\kappa k))$ anpassen. Fordert man nun zunächst formal die Gleichheit von Wellendarstellung und Abtastwerten an den Abtaststellen, so ergibt sich zunächst das Gleichungssystem

$$\underline{F} \cdot \underline{a} = \underline{y}, \tag{5.68}$$

wobei sich der Amplitudenvektor zu

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_M \end{pmatrix}, \tag{5.69}$$

der Wertevektor zu

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \tag{5.70}$$

und die Entwurfsmatrix zu

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_M \\ z_1^N & \cdots & z_M^N \end{pmatrix} \tag{5.71}$$

ergeben. Hierbei wurde erneut die Abkürzung (5.47) beachtet. Da im allgemeinen die Anzahl der Abtastwerte N größer ist als die Zahl der gesuchten Amplituden M, handelt es sich um ein überbestimmtes Gleichungssystem, das im allgemeinen nicht konsistent ist.

Im Sinne des kleinsten Fehlerquadrates ist nun die Größe

$$\chi^2 = \left| \underline{F} \cdot \underline{a} - \underline{y} \right|^2$$

zu minimieren. Hierzu wird erneut Gebrauch von der Singulärwertzerlegung gemacht. Die Singulärwertzerlegung der Matrix $\underline{F}$ ergebe sich zu

$$\underline{F} = \underline{U} \cdot \mathrm{diag}(w_1; \ldots; w_{M-\nu}; 0_{M-\nu+1}; \ldots; 0_M) \cdot \underline{V}^{\mathrm{H}}. \tag{5.72}$$

Hierbei wurde angenommen, daß ν der der Größe nach geordneten Singulärwerte gleich null seien. Numerisch sind auch hinreichend kleine Singulärwerte auf null zu setzen. Die Lösung des Gleichungssystems (5.68) im Sinne des kleinsten Fehlerquadrates erhält man dann aus dieser Zerlegung zu

$$\underline{a} = \underline{V} \cdot \mathrm{diag}(1/w_1; \ldots; 1/w_{M-\nu}; 0_{M-\nu+1}; \ldots; 0_M) \cdot \underline{U}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{y}. \tag{5.73}$$

Um diesen Sachverhalt zu beweisen, ist zunächst die Singulärwertzerlegung (5.72) zu modifizieren. Die per definitionem aus orthonormalen Spaltenvektoren bestehende $N \times M$-Matrix $\underline{U}$ wird durch die Ergänzung mit $(N - M)$ orthonormalen Spaltenvektoren in eine unitäre $N \times N$-Matrix $\underline{U}_N$ überführt. Eine derartige Ergänzung ist immer möglich, da ein N-dimensionaler Vektorraum N orthonormale Basisvektoren besitzt. Die Unitarität folgt dann daraus, daß die quadratische Matrix $\underline{U}_N$ nicht singulär ist und $\underline{U}_N^{\mathrm{H}} \cdot \underline{U}_N = \underline{E}_N$

gilt. Um die Zerlegung aufrecht zu erhalten, ist dann die Diagonalmatrix entsprechend zu erweitern:

$$\underline{W}_N = \mathrm{diag}(w_1; \ldots; w_{M-\nu}; 0_{M-\nu+1}; \ldots; 0_M; 0_{M+1}; \ldots; 0_N).$$

Ebenso ist schließlich auch noch die quadratische Matrix $\underline{V}$ durch Hinzufügen von $(N - M)$ mit Nullen besetzten Spalten in die $M \times N$-Matrix $\underline{V}_{MN}$ zu überführen. Mit dieser modifizierten Zerlegung kann nun der Beweis für (5.73) geführt werden, da die Nutzung der modifizierten Matrizen in der Gleichung (5.73) zum gleichen Ergebnis führt wie die Verwendung der ursprünglichen, was durch Ausmultiplizieren sofort gezeigt werden kann.

Zum Beweis nimmt man nun eine Änderung der Lösung $\underline{a}$ um $\underline{a}'$ an. Damit verändert sich $\left(\underline{F} \cdot \underline{a} - \underline{y}\right)$ um den additiven Anteil $\underline{y}' = \underline{F} \cdot \underline{a}'$. Beachtet man nun die gegebene Orthonormalität der Spaltenvektoren von $\underline{V}$, so ergibt sich dann für χ:

$$\begin{aligned}
\left|\underline{F} \cdot \underline{a} - \underline{y} + \underline{y}'\right| &= \left|\left(\underline{U}_N \cdot \underline{W}_N \cdot (\underline{V}_{MN})^{\mathrm{H}}\right) \cdot \left(\underline{V}_{MN} \cdot \underline{W}_N^{,,-1``} \cdot \underline{U}_N^{\mathrm{H}} \cdot \underline{y}\right) - \underline{y} + \underline{y}'\right| \\
&= \left|\left(\underline{U}_N \cdot \underline{W}_N \cdot \underline{W}_N^{,,-1``} \cdot \underline{U}_N^{\mathrm{H}} - \underline{E}_N\right) \cdot \underline{y} + \underline{y}'\right| \\
&= \left|\underline{U}_N \cdot \left[\left(\underline{W}_N \cdot \underline{W}_N^{,,-1``} - \underline{E}_N\right) \cdot \underline{U}_N^{\mathrm{H}} \cdot \underline{y} + \underline{U}_N^{\mathrm{H}} \cdot \underline{y}'\right]\right|.
\end{aligned}$$

Hierbei sei mit „ − 1“ angedeutet, daß die bei der Inversion zu unendlich werdenden Matrixelemente auf null gesetzt wurden. Die Diagonalmatrix $\left(\underline{W}_N \cdot \underline{W}_N^{,,-1``} - \underline{E}_N\right)$ besteht fast ausschließlich aus Nullen, bis auf die Elemente, die zu den $w_i = 0$ gehören. Da nur die Spaltenvektoren von $\underline{U}_N$, die zu den $w_i \neq 0$ gehören, den Raum des Wertebereiches der von $\underline{F}$ vermittelten Abbildung aufspannen, besitzt $\underline{U}_N^{\mathrm{H}} \cdot \underline{y}'$ nur für $w_i \neq 0$ Elemente ungleich null, da $\underline{y}'$ ja im Wertebereich von $\underline{F}$ liegt und somit orthogonal zu allen anderen Spaltenvektoren von $\underline{U}_N$ ist. Da sich diese beiden Terme der letzten obigen Gleichung also nicht vermischen, ist ein Minimum des obigen Betrages also nur für $\underline{y}' = \underline{0}$ möglich. Dies entspricht direkt einem $\underline{a}' = \underline{0}$, da das im allgemeinen inkonsistente Gleichungssystem $\underline{F} \cdot \underline{a}' = \underline{y}'$ nur die triviale Lösung mit Sicherheit besitzt. Damit ist also keine bessere Lösung im Sinne des kleinsten Fehlerquadrates als die in Gleichung (5.73) angegebene möglich.

Als vorlaufende Grundwelle wird dann diejenige mit der größten Amplitude angesehen. Die entsprechende reflektierte Grundwelle ergibt sich dann aus einem Vergleich der Imaginärteile der Ausbreitungskonstanten: Die Absolutbeträge dieser Imaginärteile müssen bei gleichen Wellenmoden möglichst gleich groß sein. Der Reflexionsfaktor s_{11} folgt dann aus dem Verhältnis der Amplituden von rücklaufender zu vorlaufender Grundwelle unter Beachtung der Phasendifferenz zur Referenzebene und des Faktors -1 zwischen Strom- und Spannungsreflexionsfaktor.

5.5 Bestimmung des Fernfeldes

An dieser Stelle soll nun das Fernfeld der Aperturantenne ermittelt werden. Hierzu betrachtet man zunächst die elektrische Feldstärke, die sich im oberen Halbraum aus der magnetischen Flächenstromdichte ergibt. In der Formulierung mit der Greenschen Dyade $\underline{G}_{EM}$ nach Gleichung (4.94) erhält man dann

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\vec{r}) &= \iint\limits_{\mathrm{Ap}} \underline{G}_{EM}(\vec{r};\vec{r}') \cdot (-\boldsymbol{M}_s(\vec{r}'))\,\mathrm{d}S' \\
&= -\iint\limits_{\mathrm{Ap}} \Bigg\{ [(\hat{y}\hat{y}-\hat{x}\hat{x})\sin(2\varphi)+(\hat{x}\hat{y}+\hat{y}\hat{x})\cos(2\varphi)]\,\frac{1}{2}\mathcal{S}_2\left\{\frac{T_3^{V\prime}-T_3^{V\prime\prime}}{k_t^2}\right\}(\varrho) \\
&\quad + (\hat{y}\hat{x}-\hat{x}\hat{y})\,\frac{1}{2}\mathcal{S}_0\left\{T_3^{V\prime}+T_3^{V\prime\prime}\right\}(\varrho) \\
&\quad + (\hat{z}\hat{x}\sin\varphi-\hat{z}\hat{y}\cos\varphi)\,\frac{j\eta_0}{k_0\varepsilon_r(z)}\mathcal{S}_1\left\{Y_3'(z;z_{\mathrm{Ap}})\right\}(\varrho)\Bigg\} \cdot \boldsymbol{M}_s(\vec{r}')\,\mathrm{d}S', \qquad (5.74)
\end{aligned}
$$

wobei hier beachtet wurde, daß $\boldsymbol{M}_s$ nur aus transversalen Komponenten besteht. Die Sommerfeld-Integrale ergeben sich dabei durch explizites Einsetzen der Greenschen Funktionen der äquivalenten, halbseitig unendlichen Leitungen zu:

$$\mathcal{S}_0\left\{T_3^{V\prime}+T_3^{V\prime\prime}\right\}(\varrho) = \mathcal{S}_0\left\{\left(1-\frac{\overleftarrow{\Gamma}_3{}'+\overleftarrow{\Gamma}_3{}''}{2}\right)\mathrm{e}^{-jk_{z3}|z-z_{\mathrm{Ap}}|}\right\}(\varrho), \qquad (5.75)$$

$$\mathcal{S}_1\left\{Y_3'(z;z_{\mathrm{Ap}})\right\}(\varrho) = \mathcal{S}_1\left\{\frac{\omega\varepsilon_3}{2k_{z3}}\left(1-\overleftarrow{\Gamma}_3{}'\right)\mathrm{e}^{-jk_{z3}|z-z_{\mathrm{Ap}}|}\right\}(\varrho), \qquad (5.76)$$

$$\mathcal{S}_2\left\{\frac{T_3^{V\prime}-T_3^{V\prime\prime}}{k_t^2}\right\}(\varrho) = \mathcal{S}_2\left\{\frac{\overleftarrow{\Gamma}_3{}''-\overleftarrow{\Gamma}_3{}'}{2k_t^2}\mathrm{e}^{-jk_{z3}|z-z_{\mathrm{Ap}}|}\right\}(\varrho). \qquad (5.77)$$

Im folgenden sind nun diese Sommerfeld-Integrale unter den Bedingungen des Fernfeldes zu berechnen. Hierzu betrachte man den allgemeinen Fall

$$\mathcal{S}_n\left\{f(k_t)\mathrm{e}^{-jk_z|z-z_{\mathrm{Ap}}|}\right\}(\varrho) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C(0;\infty)} f(k_t)\mathrm{e}^{-jk_z|z-z_{\mathrm{Ap}}|}\mathrm{J}_n(k_t\varrho)k_t^{n+1}\,\mathrm{d}k_t, \qquad (5.78)$$

der sich unmittelbar aus der Gleichung (4.79) ergibt. Um hieraus die Fernfeldnäherung abzuleiten, soll die Sattelpunktsmethode angewendet werden. Hierzu ist ein Integrand zu erzeugen, der aus einer reell parametrisierten Exponentialfunktion und einem langsam variierenden Faktor besteht.

Hierzu ist zunächst die Besselfunktion durch die Hankelfunktion zu ersetzen. Dies geschieht über die Identität

$$\mathrm{J}_n(x) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{H}_n^{(1)}(x)+\mathrm{H}_n^{(2)}(x)\right], \qquad (5.79)$$

wobei ferner noch die zirkularen Beziehungen[12]

$$\mathrm{H}_n^{(1)}(\mathrm{e}^{j\pi}k_t) = -\mathrm{e}^{-jn\pi}\mathrm{H}_n^{(2)}(k_t), \qquad \mathrm{H}_n^{(2)}(\mathrm{e}^{-j\pi}k_t) = -\mathrm{e}^{jn\pi}\mathrm{H}_n^{(1)}(k_t) \qquad (5.80)$$

zu beachten sind. Letztere ergeben sich aus dem Verzweigungsschnitt der Hankelfunktionen, der ausgehend vom Ursprung der komplexen k_t-Ebene entlang der negativen reellen

[12] siehe [24]

Achse gelegt wurde. Ersetzt man nun die Besselfunktion in der obigen Integraldarstellung durch die Summe der Hankelfunktionen, so heben sich die Verzweigungsschnitte im Integranden zunächst gegenseitig auf. Spaltet man nun das Integral entlang $C(0;\infty)$ in zwei gleiche Integrale auf, so kann man bei einem Teilintegral die Substitution $k_t \to \mathrm{e}^{-j\pi}k_t$ durchführen, wobei der Verzweigungsschnitt zu beachten ist. Mit den zirkularen Beziehungen erhält man dann ein Integral entlang $C(\infty\mathrm{e}^{-j\pi};0)$, dessen Integrand mit dem des anderen Teilintegrals übereinstimmt. Hieraus ergibt sich nun ein Gesamtintegral entlang $C(\infty\mathrm{e}^{-j\pi};\infty)$. Um dieses Integral über die Summe der Hankelfunktionen aufspalten zu können, muß zunächst der Integrationsweg mittels äquivalenter Verschiebung so gelegt werden, daß die Singularität im Nullpunkt umgangen wird. Entsprechend der obigen Substitution wählt man einen Weg $C(-\infty;\infty)$, der zunächst asymptotisch unterhalb der negativen reellen Achse verläuft, den Nullpunkt umgeht, die positive reelle Achse an geeigneter Stelle schneidet, um dann weiterhin asymptotisch oberhalb dieser zu verlaufen. Die Singularitäten von $f(k_t)$ sind dabei ebenfalls geeignet zu umgehen. Dieses Integral läßt sich nun in zwei konvergente Teilintegrale über jeweils eine Hankelfunktion aufspalten. Indem man nun die Hankelfunktion der ersten Art in einem Teilintegral durch eine zirkulare Beziehung ersetzt, erhält man nach Zusammenfassung der beiden Teilintegrale:

$$\mathcal{S}_n\left\{f(k_t)\mathrm{e}^{-jk_z|z-z_{\mathrm{Ap}}|}\right\}(\varrho) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{C(-\infty;\infty)} f(k_t)\mathrm{e}^{-jk_z|z-z_{\mathrm{Ap}}|}\mathrm{H}_n^{(2)}(k_t\varrho)k_t^{n+1}\,\mathrm{d}k_t. \tag{5.81}$$

Da das Fernfeld in Kugelkoordinaten berechnet wird, seien diese nun gemäß

$$\varrho = R\sin\vartheta, \tag{5.82}$$

$$|z-z_{\mathrm{Ap}}| = R\cos\vartheta \tag{5.83}$$

eingeführt:

$$\mathcal{S}_n\left\{f(k_t)\mathrm{e}^{-jk_z|z-z_{\mathrm{Ap}}|}\right\}(\varrho) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{C(-\infty;\infty)} f(k_t)\mathrm{e}^{-jk_zR\cos\vartheta}\mathrm{H}_n^{(2)}(k_tR\sin\vartheta)k_t^{n+1}\,\mathrm{d}k_t. \tag{5.84}$$

Da hier das Fernfeld untersucht wird, was implizit bedeutet, daß R gegen unendlich gehen soll, kann man nun die Asymptote für die Hankelfunktion mit großem Argument x, die sich zu

$$\mathrm{H}_n^{(2)}(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{-j\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \tag{5.85}$$

ergibt[13], einsetzen, wodurch man dann

$$\mathcal{S}_n\left\{f(k_t)\mathrm{e}^{-jk_z|z-z_{\mathrm{Ap}}|}\right\}(\varrho)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{C(-\infty;\infty)} f(k_t)\sqrt{\frac{2j}{\pi k_tR\sin\vartheta}}j^n\mathrm{e}^{-j(k_zR\cos\vartheta+k_tR\sin\vartheta)}k_t^{n+1}\,\mathrm{d}k_t. \tag{5.86}$$

erhält.

[13] siehe [30]

Da die möglichen Funktionen $f(k_t)$ im hier betrachteten Fall Verzweigungsschnitte des Integranden erzeugen, die bei $k_t = \pm k_3$ entspringen, wird eine Transformation der Integrationsvariablen durchgeführt. Über die Substitution

$$k_t = k_3 \sin w, \tag{5.87}$$
$$k_z = k_3 \cos w \tag{5.88}$$

erreicht man dann, daß die einzelnen Quadranten der komplexen k_t-Ebene in vertikale, halbseitig unendliche Streifen der Breite $\pi/2$ in der w-Ebene abgebildet werden, sofern k_3 reell ist. Führt man die Verzweigungsschnitte von den Stellen $\pm k_3$ aus geradlinig zum Nullpunkt und dann nach $\mp j\infty$, so verschwinden diese in der w-Ebene. Dies ergibt sich aus der Periodizität der gewählten Abbildung, die bewirkt, daß die einzelnen Riemannschen Blätter der k_t-Zahlenebene in der w-Zahlenebene aneinander gehängt werden. Das Verschwinden dieser Verzweigungsschnitte wird im folgenden nützlich sein, um den Integrationspfad einfach verschieben zu können. Das Sommerfeld-Integral ergibt sich mit dieser Transformation dann zu

$$\mathcal{S}_n\left\{f(k_t)\mathrm{e}^{-jk_z|z-z_{\mathrm{Ap}}|}\right\}(\varrho) = \tag{5.89}$$
$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{C_w(-\infty;\infty)} f(k_3\sin w)\sqrt{\frac{2j}{\pi k_3 \sin w R \sin\vartheta}}\, j^n \mathrm{e}^{-jk_3R\cos(w-\vartheta)}\left(k_3\sin w\right)^{n+1} k_3\cos w \,\mathrm{d}w,$$

wobei $C_w(-\infty;\infty)$ derjenige Integrationsweg in der w-Ebene ist, der unmittelbar dem ursprünglichen $C(-\infty;\infty)$ entspricht.

Das darin enthaltene Integral besitzt nun die allgemeine Form

$$I(\Omega) = \int\limits_{C_w(-\infty;\infty)} F(w)\mathrm{e}^{\Omega q(w)}\mathrm{d}w,$$

wobei F und q komplexe Funktionen in der w-Ebene sind und es sich bei Ω um einen reellen Parameter handelt. Dieser Sachverhalt wird deutlich, wenn man

$$\Omega = R, \tag{5.90}$$
$$q(w) = -jk_3\cos(w-\vartheta), \tag{5.91}$$
$$F(w) = j^n\sqrt{\frac{2j}{\pi k_3 R \sin w \sin\vartheta}}\left(k_3\sin w\right)^{n+1} k_3\cos w\, f(k_3\sin w) \tag{5.92}$$

setzt. Dieses Integral läßt sich nun mit der Sattelpunktsmethode für den Fall $\Omega\to\infty$ berechnen. Hierzu wählt man zunächst den Pfad des stärksten Abklingens $\mathrm{SDP}_w(-\infty;\infty)$[14] in der w-Ebene. Ein solcher Integrationspfad ergibt sich, wenn man den Integrationspfad so legt, daß $\mathrm{Re}\, q(w)$ in einem Punkt w_s dessen ein Maximum annimmt und ansonsten möglichst stark mit der Entfernung von w_s abfällt. In einem solchen Falle kommt der Hauptbeitrag zum Integral überwiegend vom Integranden an der Stelle w_s, da die restlichen Beiträge über $\Omega\to\infty$ beliebig stark exponentiell gedämpft werden. Bei der Überführung des Integrationspfades in einen Pfad stärksten Abklingens ist darauf zu achten, ob dabei Singularitäten des Integranden überschritten werden. Ist dies der Fall, so müssen die

[14] SDP = steepest descent path

entsprechenden Residuen berücksichtigt werden! Bei den *hier* betrachteten Integranden wurden die Verzweigungsschnitte bereits durch Variablentransformation eliminiert. Es liegen höchstens noch Singularitäten in $w = 0$ bzw. $k_t = 0$ und $w = \pm\pi/2$ bzw. $k_t = \pm k_3$ vor, die jedoch nicht überschritten werden müssen, da $0 < w_s = \vartheta < \pi/2$ sein wird und der Integrationspfad somit zwischen $w = 0$ und $w = \pi/2$ hindurchläuft.

Bei dem Punkt w_s, in dem $\operatorname{Re} q(w)$ entlang $\mathrm{SDP}_w(-\infty;\infty)$ ein absolutes Maximum erreicht, handelt es sich um einen Sattelpunkt von $q(w)$. Einen solchen Sattelpunkt r-ter Ordnung kann man aus den Beziehungen $q^{(r)}(w_s) = 0$ und $q^{(r+1)}(w_s) \neq 0$ bestimmen. Hierbei ist zu beachten, daß durch w_s auch die Pfade des stärksten Anstiegs führen. Die Pfade der stärksten Änderung erhält man über die Beziehung $\operatorname{Im} q(w) = \mathrm{const}$, was man unmittelbar aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ableiten kann. Den Pfad $\mathrm{SDP}_w(-\infty;\infty)$ erhält man dann aus einer Betrachtung des Funktionsverlaufes von $q(w)$ in w_s. Um den Pfad $\mathrm{SDP}_w(-\infty;\infty)$ in einer einfachen Weise darstellen zu können, führt man eine Transformation

$$\tau(s) = q(z)$$

durch, wobei der Sattelpunkt in der s-Ebene die gleiche Ordnung wie in der z-Ebene besitzen und im Nullpunkt liegen soll. Der Integrationspfad wird dann zu $\mathrm{SDP}_s(-\infty;\infty)$ beziehungsweise $\mathrm{SDP}_w(-\infty;\infty)$ wird erst durch $\mathrm{SDP}_s(-\infty;\infty)$ bestimmt.

Aus der obigen Definition von $q(w)$ folgt

$$q'(w) = jk_3 \sin(w - \vartheta), \tag{5.93}$$
$$q''(w) = jk_3 \cos(w - \vartheta), \tag{5.94}$$

woraus sich sofort $w_s = \vartheta$ ergibt, wobei es sich um einen Sattelpunkt erster Ordnung handelt. Für einen solchen ist die Transformation

$$q(z) = \tau(s) = q(w_s) - s^2$$

besonders gut geeignet, weil $\mathrm{SDP}_s(-\infty;\infty)$ in diesem Falle genau entlang der reellen Achse verläuft. Über

$$G(s) = F(w)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}$$

mit

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = \frac{-2s}{q'(w)}$$

ergibt sich dann

$$I(\Omega) = \mathrm{e}^{\Omega q(w_s)} \int_{-\infty}^{\infty} G(s)\mathrm{e}^{-\Omega s^2}\mathrm{d}s.$$

Nimmt man nun $G(s)$ in der Umgebung von $s = 0$ als holomorph an, so kann man $G(s)$ um diesen Sattelpunkt in eine Potenzreihe entwickeln. Bricht man die Potenzreihe nach dem ersten Glied $G(0)$ ab, so erhält man die asymptotische Approximation erster Ordnung

$$I(\Omega) \approx G(0)\mathrm{e}^{\Omega q(w_s)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\Omega s^2}\mathrm{d}s, \tag{5.95}$$

wobei gilt:

$$G(0) = F(w_s) \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} \right)_{s=0}.$$

Der Differentialquotient ist dabei über die Regel von de L'Hospital auszuwerten, da er im Sattelpunkt ansich unbestimmt ist. Dieser ergibt sich dann über

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} \right)_{s=0} = \left(\frac{-2s}{q'(w)} \right)_{s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}(-2s)/\mathrm{d}s}{q''(w)\mathrm{d}w/\mathrm{d}s} \right)_{s=0} = \frac{-2}{q''(w_s)\,(\mathrm{d}w/\mathrm{d}s)_{s=0}}$$

schließlich zu

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} \right)_{s=0} = \sqrt{\frac{-2}{q''(w_s)}}.$$

Hierbei ist zu berücksichtigen, daß der Winkel der komplexen Wurzel gleich $\arg(\mathrm{d}w)_{w=w_s}$ gewählt werden muß, da $\mathrm{d}s$ entlang des Integrationsweges immer positiv reell ist. Beachtet man ferner, daß das Integral in (5.95) gleich $\sqrt{\pi/\Omega}$ ist, so erhält man schießlich:

$$I(\Omega) \approx \sqrt{\frac{-2\pi}{\Omega q''(w_s)}} F(w_s) \mathrm{e}^{\Omega q(w_s)}. \tag{5.96}$$

Bricht man die Potenzreihe von $G(s)$ erst nach höheren Gliedern ab, erhält man Approximationen höherer Ordnung. Dabei sind dann jedoch zusätzlich Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} s^t \mathrm{e}^{-\Omega s^2} \mathrm{d}s$ mit $t \in \mathbb{N}$ zu berechnen, was durch Einführung der Gammafunktion auch möglich ist. Dies soll hier jedoch nicht weiter verfolgt werden.

Durch Einsetzen der ursprünglichen Definitionen (5.90) bis (5.92) erhält man damit für die Fernfeldnäherung des Sommerfeld-Integrals (5.89):

$$\mathcal{S}_n \left\{ f(k_t) \mathrm{e}^{-jk_z|z-z_{\mathrm{Ap}}|} \right\} (\varrho) \to \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{-jk_3 R}}{R} 2jk_3 \cos\vartheta (jk_3 \sin\vartheta)^n f(k_3 \sin\vartheta).$$

Die bisher verwendeten Kugelkoordinaten haben ihren Ursprung im Quellpunkt. Nun soll auf das absolute Kugelkoordinatensystem übergegangen werden, dessen Koordinatenursprung mit dem des absoluten kartesischen Koordinatensystems zusammenfällt, in welchem die Struktur beschrieben wird und dessen Nullpunkt etwa in der Mitte der untersuchten Struktur liegen soll. Hierbei betrachtet man weiterhin den Fernfeldfall $R \to \infty$. Unter dieser Bedingung ergibt sich der Zusammenhang

$$R = r - \hat{r} \cdot \vec{r}\,'$$

zwischen dem Abstand R vom Quellpunkt zum Aufpunkt, dem Abstand r vom absoluten Ursprung zum Aufpunkt, dessen Einheitsvektor $\hat{r}$ und dem Abstandsvektor $\vec{r}\,'$ vom absoluten Ursprung zum Quellpunkt. Die Winkelkoordinaten sind für den Grenzfall Fernfeld in beiden Kugelkoordinatensystemen gleich, da diese nur translatorisch gegeneinander verschoben sind. Unter Beachtung dieser Koordinatentransformation ergibt sich nun schließlich für die Sommerfeld-Integrale des Fernfeldes die folgende asymptotische Approximation:

$$\mathcal{S}_n \left\{ f(k_t) \mathrm{e}^{-jk_z|z-z_{\mathrm{Ap}}|} \right\} (\varrho) \to \frac{\mathrm{e}^{-jk_3 r}}{2\pi r} \mathrm{e}^{jk_3 \hat{r}\cdot\vec{r}\,'} jk_3 \cos\vartheta (jk_3 \sin\vartheta)^n f(k_3 \sin\vartheta). \tag{5.97}$$

Wendet man diese Formel nun auf die Gleichungen (5.75) bis (5.77) an, so erhält man:

$$\mathcal{S}_0\left\{T_3^{V\prime}+T_3^{V\prime\prime}\right\}(\varrho) \quad\to\quad \frac{\mathrm{e}^{-jk_3r}}{2\pi r}\mathrm{e}^{jk_3\hat{r}\cdot\vec{r}'}jk_3\cos\vartheta\left(1-\frac{\overleftarrow{\Gamma}_3{}'+\overleftarrow{\Gamma}_3{}''}{2}\right)_{k_t=k_3\sin\vartheta}, \tag{5.98}$$

$$\mathcal{S}_1\left\{Y_3'(z;z_{\mathrm{Ap}})\right\}(\varrho) \quad\to\quad \frac{\mathrm{e}^{-jk_3r}}{2\pi r}\mathrm{e}^{jk_3\hat{r}\cdot\vec{r}'}(-k_3)\sin\vartheta\frac{\omega\varepsilon_3}{2}\left(1-\overleftarrow{\Gamma}_3{}'\right)_{k_t=k_3\sin\vartheta}, \tag{5.99}$$

$$\mathcal{S}_2\left\{\frac{T_3^{V\prime}-T_3^{V\prime\prime}}{k_t^2}\right\}(\varrho) \quad\to\quad \frac{\mathrm{e}^{-jk_3r}}{2\pi r}\mathrm{e}^{jk_3\hat{r}\cdot\vec{r}'}(-jk_3)\cos\vartheta\left(\frac{\overleftarrow{\Gamma}_3{}''-\overleftarrow{\Gamma}_3{}'}{2}\right)_{k_t=k_3\sin\vartheta}. \tag{5.100}$$

Die Fernfeldstärke $\boldsymbol{E}(r;\varphi;\vartheta)$ ergibt sich jetzt einfach durch Einsetzen der Sommerfeld-Integrale (5.98) bis (5.100) in die Bestimmungsgleichung (5.74), wobei die kartesischen Vektorkomponenten dann nur noch in Kugelkoordinaten umzusetzen sind.

Für den Fall, daß es sich bei der oberen Platte um einen idealen elektrischen Leiter handelt, ergeben sich aus der Tatsache, daß nun

$$\overleftarrow{\Gamma}_3{}'=\overleftarrow{\Gamma}_3{}''=-1$$

gilt, weitere Vereinfachungen. Zum einen verschwindet das Sommerfeld-Integral $\mathcal{S}_2$ und zum anderen ergeben die Reflexionsfaktoren in den übrigen Sommerfeld-Integralen einfache Konstanten. Durch eine entsprechende Betrachtung der einzelnen Komponenten kann man über

$$\hat{r}=\hat{x}\sin\vartheta\cos\varphi+\hat{y}\sin\vartheta\sin\varphi+\hat{z}\sin\vartheta$$

zeigen, daß sich dann

$$\boldsymbol{E}(r\to\infty;\varphi;\vartheta)=\frac{\mathrm{e}^{-jk_3r}}{2\pi r}\iint\limits_{\mathrm{Ap}} jk_3\hat{r}\times\boldsymbol{M}_s(\vec{r}')\mathrm{e}^{jk_3\hat{r}\cdot\vec{r}'}\,\mathrm{d}S' \tag{5.101}$$

ergibt. Dies ist jedoch genau diejenige Darstellung, die sich auch aus dem Prinzip der Spiegelquellen ableiten läßt: Um eine ideal elektrisch leitende Platte unendlicher Ausdehnung in ihrer Wirkung beim Vorhandensein magnetischer Quellen zu berücksichtigen, kann man in gleichem Abstand hinter der Plattenebene eine zur ursprünglichen gespiegelte magnetische Quellverteilung positionieren und die leitende Platte selbst fortlassen, ohne das Feld im ursprünglichen Halbraum zu verändern. Nun liegt ein Freiraumproblem vor, daß über die Greensche Funktion des Freiraumes gelöst werden kann. Führt man auch dort Fernfeldnäherungen ein und bringt man die magnetischen Quellen genau auf der Plattenfläche an, so ergibt sich ebenfalls genau die Formel (5.101). Eine verlustbehaftete Platte läßt sich im Gegensatz zur obigen Formulierung mit der Spiegelmethode jedoch nicht ohne weiteres berechnen. Im Formalismus der äquivalenten Leitungen wären demgegenüber einfach nur modifizierte Reflexionsfaktoren anzuwenden, um diese Aufgabenstellung abzuhandeln.

5.6 Rechenbeispiel

Die zuvor erläuterte Theorie wurde in das Rechnerprogramm `apant` umgesetzt, welches in FORTRAN 77 erstellt wurde. An dieser Stelle soll nun ein erstes Beispiel für diese

Umsetzung dargestellt werden. Hierbei handelt es sich um einen mikrostreifengespeisten, rechteckigen Schlitz in der Grundplatte. Es handelt sich also um ein Dreischichtproblem gemäß der Abbildung 1, wobei die untere Platte durch eine unendliche Fortsetzung der ersten Schicht ersetzt wurde. Im Leitungsersatzschaltbild der Abbildung 1 entspricht dies einem angepaßten Abschluß $\overleftarrow{Z}_1 = Z_1$, was sowohl für die Leitung der E-Wellen als auch für die der H-Wellen gilt.

Bei den Schichten eins und drei handelt es sich um Luft, das heißt es gilt $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = 1$ und $\mu_{r1} = \mu_{r3} = 1$. Für die Schicht zwei wird laut [19] $\varepsilon_{r2} = 2,5$ und $\mu_{r2} = 1$ bei einer Schichtdicke von 0,079cm angesetzt. Der Schlitz ist rechteckig mit der Dimensionierung 0,25cm mal 0,8cm. Die Mikrostreifenleitung verläuft quer und zentriert zum Schlitz. Sie endet bündig mit der hinteren Schlitzkante und besitzt eine Breite von 0,025cm. Ein Ausschnitt des triangulierten Leitungsstreifens und der Apertur ist in der Abbildung 7 dargestellt.

Der Leitungsstreifen besitzt für die Rechnung eine Gesamtlänge von 4cm, um die Reflexionsfaktoren schließlich genau genug bestimmen zu können. Die Referenzebene für den Reflexionsfaktor liegt entsprechend [19] 1,98cm vor der Mitte der Apertur. Die Zerlegung in ein Netz von Dreiecken wurde schließlich entsprechend der Abbildung 7 gewählt, wobei sich dabei auf der Apertur 178 Dreiecke und 247 Innenkanten und auf dem Leitungsstreifen insgesamt 638 Dreiecke und 796 Innenkanten ergeben. Das sich daraus ergebende lineare Gleichungssystem besitzt also 1043 Unbekannte. Die Rechenzeit auf einem RISC-Rechner IBM/RS6000 beträgt dabei etwa dreieinhalb Minuten pro Frequenzpunkt.

In der Abbildung 8 ist der Reflexionsfaktor s_{11} bezüglich des Grundmodus der speisenden Mikrostreifenleitung in einem Smith-Diagramm dargestellt, wobei der Frequenzbereich von 11,0GHz bis 14,5GHz in äquidistanten Frequenzschritten durchlaufen wird. Diesen Rechenergebnissen sind dabei die berechneten Werte aus [19] gegenübergestellt. Die Abweichungen zwischen beiden Resultaten bestehen hauptsächlich aus einer leichten Drehung im Smith-Diagramm. Diese Abweichungen resultieren möglicherweise aus der Tatsache, daß in [19] mit dem Delta-Spaltgenerator ein anderes Speisemodell verwendet wurde. In der Abbildung 9 ist dann explizit der Betrag des Eingangsreflexionsfaktors dargestellt, wobei die Meßergebnisse aus [4] hinzugefügt wurden. Hierbei ist eine gute Übereinstimmung zwischen der hier durchgeführten Rechnung und der Rechnung in [19] festzustellen. Der Vergleich mit der Messung aus [4] zeigt einen Frequenzversatz des Anpassungspunktes, der hier zu 12,25GHz bestimmt wurde, von 250MHz, was in etwa zwei Prozent entspricht. Beim Vergleich der Meßwerte mit den Ergebnissen der Rechnung ist jedoch zu beachten, daß im Meßaufbau noch Anpassungsstrukturen enthalten waren, die bei den Rechnungen hier und in [19] nicht beachtet wurden.

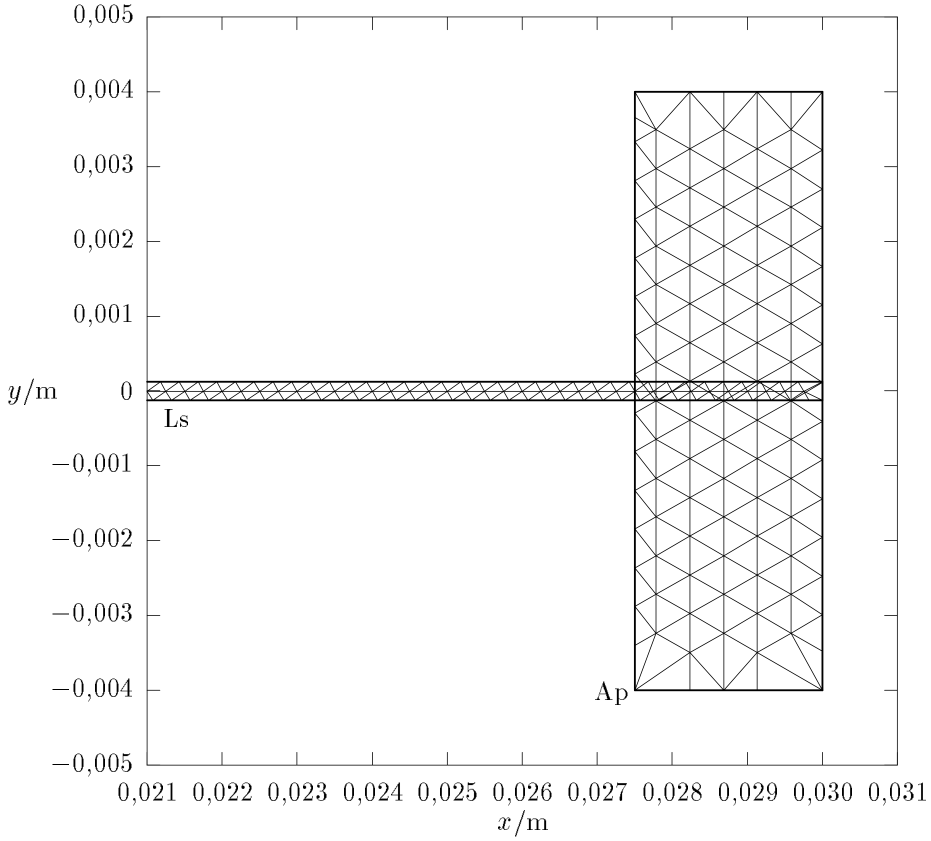


Abbildung 7: Netz der Anordnung

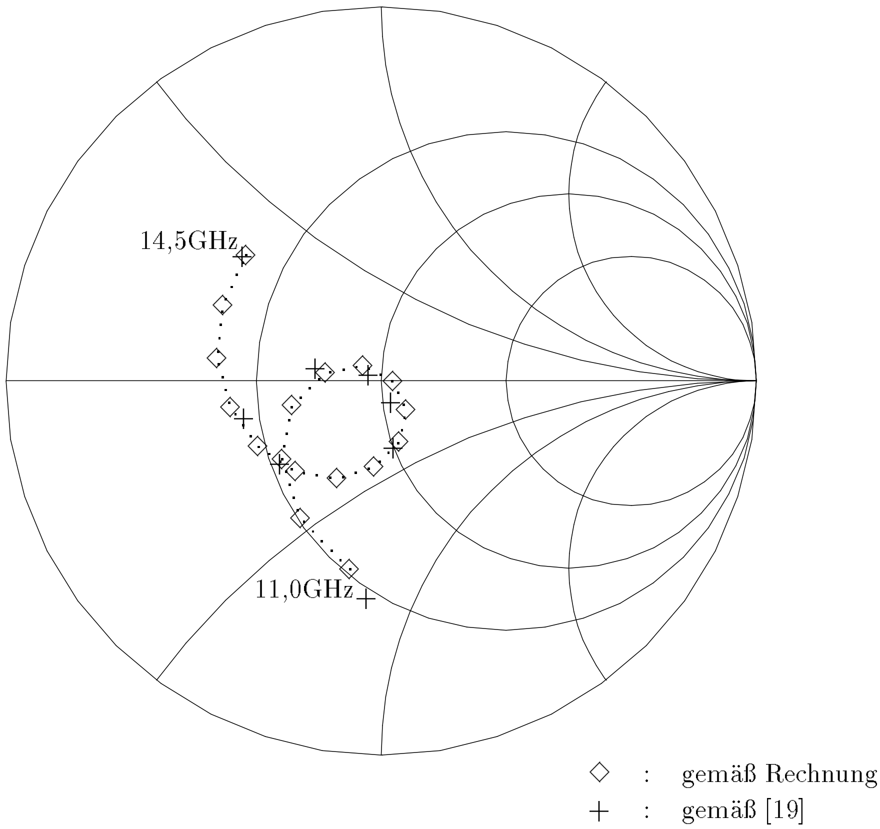


Abbildung 8: Smith-Diagramm

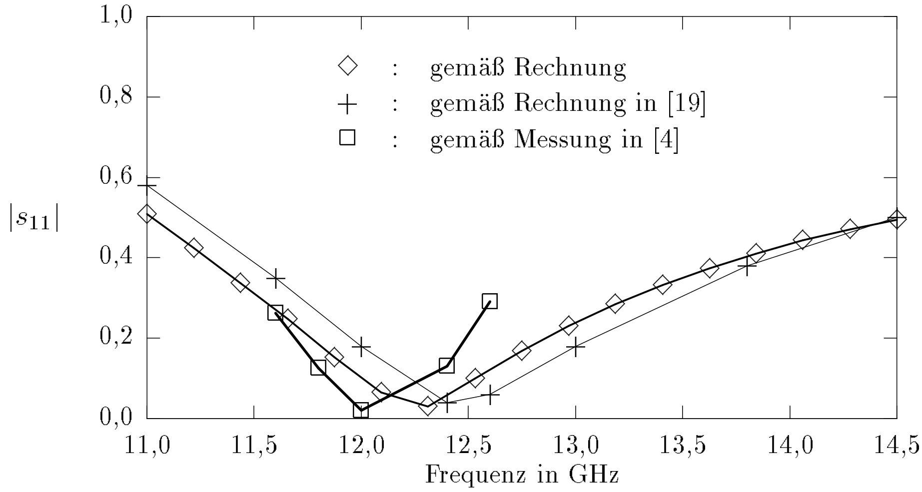
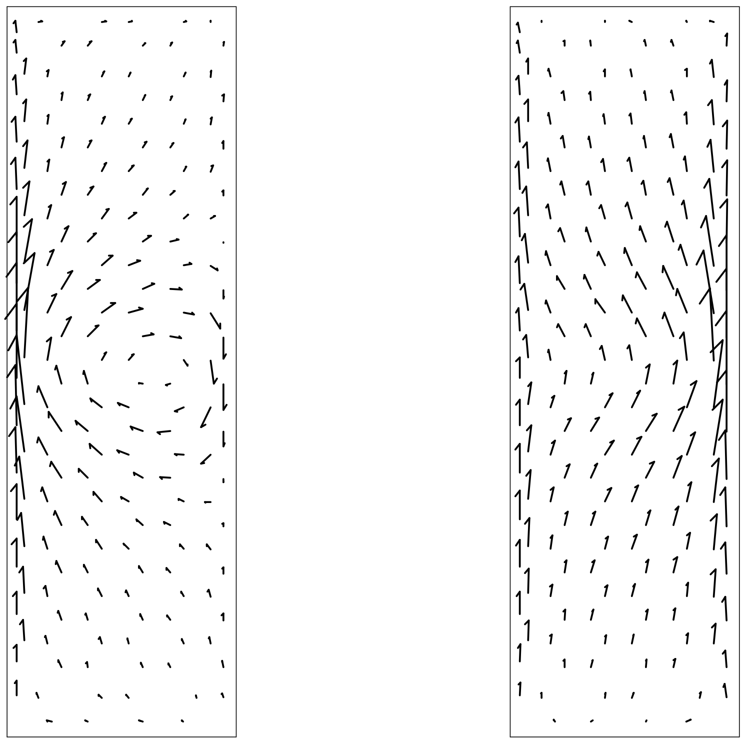


Abbildung 9: Betrag des Eingangsreflexionsfaktors

max. 17,4Am^{-1} max. 64,8Am^{-1}



Re $\boldsymbol{M}_s$ Im $\boldsymbol{M}_s$

Abbildung 10: Magnetische Flächenstromdichte auf Apertur in Schicht 2

In der Abbildung 10 ist exemplarisch die magnetische Flächenstromdichte $\boldsymbol{M}_s$ auf der Aperturunterseite bei einer Frequenz von 11,0GHz dargestellt. Der im Realteil erscheinende Wirbel verschwindet bei höheren Frequenzen und erscheint später im Imaginärteil. Ein Größenvergleich zeigt jedoch, daß für die Fernfeldwirkung hauptsächlich die Längskomponenten an den Schlitzkanten verantwortlich sind. Insgesamt stellt der Schlitz damit also in etwa einen magnetischen Dipol dar. Dem entsprechen dann zum Beispiel bei der Anpassungsfrequenz von 12,25GHz die Richtcharakteristiken für die E- und H-Ebene in den Abbildungen 11 und 12. Die in der Abbildung 10 erkennbare Phasenverschiebung der magnetischen Flächenstromdichte an den beiden Längskanten des Schlitzes führt in der Richtcharakteristik für $\varphi = 0°$ zu einer leichten Asymmetrie, die je nach Frequenz unterschiedlich stark ausgeprägt ist.

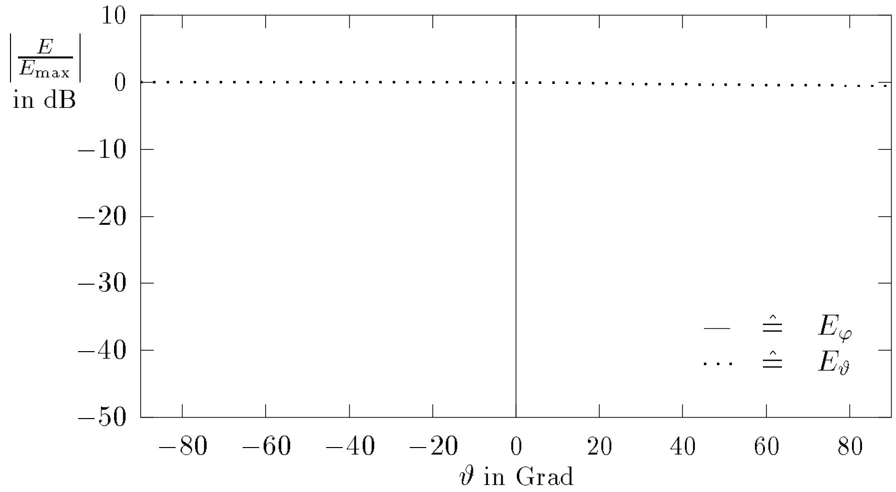


Abbildung 11: Richtcharakteristik für $\varphi = 0°$ (E-Ebene)

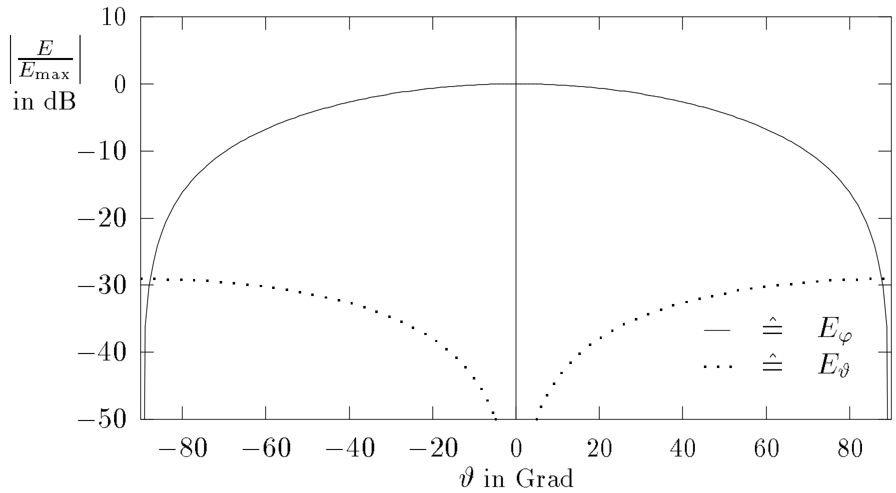


Abbildung 12: Richtcharakteristik für $\varphi = 90°$ (H-Ebene)

Es ist jedoch immer zu beachten, daß die Rechnung von einer unendlich ausgedehnten Grundplatte ausgeht. Bei der Messung des Fernfeldes eines Schlitzes in einer *endlichen* Grundplatte fällt zum Beispiel die Feldstärke E_ϑ in der E-Ebene bei $\vartheta = \pm 90°$ auf Null ab, da die senkrecht zu der Grundplatte stehende elektrische Feldstärke nicht mehr ins Unendliche geführt werden kann. Ferner ist der gemessene Kurvenverlauf wellig; diese Wellenstruktur resultiert aus einer Überlagerung der Abstrahlung des Schlitzes mit den Abstrahlungen der Begrenzungskanten der endlichen Grundplatte. Ansonsten ist anzumerken, daß das berechnete Fernfeld gut mit den ebenfalls berechneten Fernfeldern in [12] übereinstimmt, wobei die andersartige Speisung des Schlitzes in [12] offenbar keinen nennenswerten Einfluß auf das Fernfeld besitzt.

5.7 Abschließende Bemerkungen

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Verfahren zur Charakterisierung mehrfach geschichteter, mikrostreifen- bzw. streifengespeister Aperturantennen im Ortsbereich dargestellt. Die Aufstellung der problembeschreibenden Integralgleichungen geht von der Darstellung der Feldstärken als eine Faltung der elektrischen und magnetischen Quellstromdichten mit den entsprechenden Greenschen Funktionen aus. Aus der Randbedingung auf dem Leitungsstreifen gewinnt man dementsprechend eine Integralgleichung der elektrischen Feldstärke, aus der Stetigkeit der magnetischen Transversalfeldstärke in der Apertur erhält man eine Integralgleichung der magnetischen Feldstärke; beide Integralgleichungen können durch Darstellung der Feldstärken über skalare und vektorielle Potentiale in eine Potentialform gebracht werden. Aufgrund der stark singulären Integranden in den skalaren Potentialen ist es dann jedoch notwendig, auf eine Mischpotentialfom überzugehen.

Zur Lösung der Integralgleichungen in Mischpotentialform wird hier die Momentenmethode in Form der Methode von Galerkin eingesetzt; die numerische Lösung erfolgt dabei im Ortsbereich. Die Rechnung im Ortsbereich ermöglicht eine hohe Flexibilität bezüglich der betrachteten Geometrien. Die Verwendung von Dreieckelementen zur Netzeinteilung wäre zum Beispiel im Fourierbereich mit deutlich höherem Aufwand verbunden. Erst diese Dreieckelemente erlauben jedoch die Netzeinteilung nahezu beliebiger Strukturen. Ein Vorteil der Momentenmethode in der betrachteten Form besteht darin, daß nur Flächen zu diskretisieren sind und nur über Flächen integriert wird. Bei der Anwendung eines Verfahrens mit finiten Differenzen wäre zum Beispiel ein endliches Raumgebiet, das die betrachtete Struktur enthält, zu diskretisieren, wodurch Speicher- und Rechenzeit-Bedarf deutlich größer wären. Ferner erlaubt der Ansatz über die Greenschen Funktionen die unmittelbare Berechnung des Fernfeldes, ohne den Formalismus wechseln zu müssen. Bei der Nutzung der Momentenmethode ist es auch nicht notwendig, ein Extremalprinzip abzuleiten und anzuwenden, wie zum Beispiel bei der Methode der finiten Elemente, wodurch die Problemlösung vereinfacht wird.

Die Momentenmethode in Form der Methode von Galerkin liefert als Lösung die beste Annäherung des Reihenansatzes an die tatsächliche Lösung im Sinne der Orthogonalität. Dieser Ansatz geht davon aus, daß beim Einsetzen des Reihenansatzes in eine Differential- bzw. Integralgleichung diese nicht mehr erfüllt wird und sich dieser Fehler durch einen zusätzlichen Funktionsterm, dem Residuum, darstellen läßt. Die Methode von Galerkin fordert nun, daß das Residuum orthogonal zu den Basisfunktionen des Reihenansatzes sein soll, so daß es selbst mit diesen Basisfunktionen nicht mehr darstellbar ist. Die Gewichte des Reihenansatzes werden letztlich gemäß dieser Forderung bestimmt.

Die Effizienz des Rechnerprogrammes beruht zum Teil auf der Sieben-Punkte-Regel für die Integration über die Quellflächen hauptsächlich jedoch auf der Ein-Punkt-Regel für die Integrale des inneren Produktes der Momentenmethode. Die Ein-Punkt-Regel erzeugt deutliche Abweichungen in den Elementen der Koeffizientenmatrix relativ zur exakten Integration, wie aus dem Verlust der theoretisch vorhandenen Symmetrie der Koeffizientenmatrix erkennbar ist. Diese Abweichungen werden jedoch im Endergebnis kaum wirksam. Dies ist daran erkennbar, daß sich das Endergebnis kaum ändert, wenn man die Koeffizientenmatrix durch paarweise Mittelung der entsprechenden Matrixelemente nachträglich symmetrisiert.

In dieser Arbeit werden zwar nur offene, planare Quellflächen betrachtet, da die Herleitung der Greenschen Funktionen jedoch von einer allgemeinen Verteilung der *räumlichen* Stromdichten ausgeht, kann man die oben berechneten Greenschen Funktionen bei beliebigen Quellgebieten anwenden. Dabei sind sowohl räumliche Stromdichten als auch Flächenstromdichten möglich. Bei nichtplanaren Quellstrukturen ist jedoch zu beachten, daß sich die Sommerfeld-Integrale nicht mehr mittels einer Interpolationstafel bezüglich einer Variablen darstellen lassen, wodurch sich die Rechenzeit deutlich erhöht.

Der Leitungsformalismus nach Felsen erlaubt es, Strukturen mit einer beliebigen Anzahl von Schichten zu berechnen, ohne daß sich an den obigen Darstellungen etwas ändert. Die Wirkungen der Reflexionsfaktoren und der Quellen sind lediglich iterativ von Leitungsabschnitt zu Leitungsabschnitt bis zum Leitungsabschnitt des Aufpunktes zu übertragen. Die Grundplatte und die eventuelle Deckplatte wurden als ideal leitend angesetzt. Durch die Wahl geeigneter Abschlußwiderstände im Leitungsersatzschaltbild kann man jedoch auch verlustbehaftete Platten berücksichtigen. Der Ansatz eines verlustbehafteten Leitungsstreifens greift hingegen in die Randbedingungen ein und erfordert eine Abwandlung der problembeschreibenden Integralgleichungen.

Literatur

[1] „Numerical Integration over Simplexes and Cones“
P. C. Hammer, O. P. Marlowe, A. H. Stroud
Math. Tables Aids Comp., Vol. 10, 1956: S.130-136

[2] „A Frequency Dependent Solution for Microstrip Transmission Lines“
Edgar J. Denlinger
IEEE MTT-19, Nr. 1, Januar 1971: S.30-39

[3] „A Technique for Computing Dispersion Characteristics of Shielded Microstrip Lines“
Tatsuo Itoh, Raj Mittra
IEEE MTT, Short Papers, Oktober 1974: S.896-898

[4] „Microstrip Antenna Array for 12 GHz TV“
M. Collier
Microwave Journal, vol. 20, September 1977: S.67-71

[5] „Spectral Domain Immitance Approach for Dispersion Characteristics of Generalized Printed Transmission Lines“
Tatsuo Itoh
IEEE MTT-28, Nr. 7, Juli 1980: S.733-736

[6] „A Full-Wave Analysis Method for Open Microstrip Structures“
Tatsuo Itoh, Wolfgang Menzel
IEEE AP-29, Nr. 1, Januar 1981: S.63-67

[7] „Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape“
Sadasiva M. Rao, Donald R. Wilton, Allen W. Glisson
IEEE AP-30, Nr. 3, Mai 1982: S.409-417

[8] „Spectral Domain Analysis of Frequency Dependent Propagation Characteristics of Planar Structures on Uniaxial Medium“
Hyuckjae Lee, Vijai K. Tripathi
IEEE MTT-30, Nr. 8, August 1982: S.1188-1193

[9] „Analytical and numerical techniques in the Green's function treatment of microstrip antennas and scatterers“
J. R. Mosig, F. E. Gardiol
IEE PROC., Vol. 130, Pt. H, Nr. 2, März 1983: S.175-182

[10] „Potential Integrals for Uniform and Linear Source Distributions on Polygonal and Polyhedral Domains“
Donald R. Wilton, S. M. Rao, Allen W. Glisson, Daniel H. Schaubert, O. M. Al-Bundak, Chalmers M. Butler
IEEE AP-32, Nr. 3, März 1984: S.276-281

[11] „The Mixed-Potential Electric Field Integral Equation for Objects in Layered Media“
Krzysztof A. Michalski
AEÜ, Band 39 [1985], Heft 5: S.317-322

[12] „Cavity-backed wide slot antenna“
J. Hirokawa, H. Arai, N. Goto
IEE PROC., Vol. 136, Pt. H, Nr. 1, Februar 1989: S.29-33

[13] „Generalized Pencil-of-Function Method for Extracting Poles of an EM System from Its Transient Response“
Yingbo Hua, Tapan K. Sarkar
IEEE AP-37, Nr. 2, Februar 1989: S.229-234

[14] „Electromagnetic Scattering and Radiation by Surfaces of Arbitrary Shape in Layered Media, Part I: Theory“
Krzysztof A. Michalski, Dalian Zheng
IEEE AP-38, Nr. 3, März 1990: S.335-344

[15] „Electromagnetic Scattering and Radiation by Surfaces of Arbitrary Shape in Layered Media, Part II: Implementation and Results for Contiguous Half-Spaces“
Krzysztof A. Michalski, Dalian Zheng
IEEE AP-38, Nr. 3, März 1990: S.345-352

[16] „Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped/Undamped Sinusoids in Noise“
Yingbo Hua, Tapan K. Sarkar
IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, ASSP-38, Nr. 5, Mai 1990: S.814-824

[17] „Analysis of Coaxially Fed Microstrip Antennas of Arbitrary Shape with Thick Substrates“
K. A. Michalski, D. Zheng
Journal of Electromagnetic Waves and Applications, Vol. 5, Nr. 12, 1991: S.1303-1327

[18] „Formulation of Mixed-Potential Integral Equations for Arbitrarily Shaped Microstrip Structures with Uniaxial Substrates“
K. A. Michalski
Journal of Electromagnetic Waves and Applications, Vol. 7, Nr. 7, 1993: S.899-917

[19] „Analysis of a Wide Radiating Slot in the Ground Plane of a Microstrip Line“
Masoud Kahrizi, Tapan K. Sarkar, Zoran A. Maricevic
IEEE MTT-41, Nr. 1, Januar 1993: S.29-37

[20] „Dyadic Green's Functions for Conductor-Backed Layered Structures Excited by Arbitrary Tridimensional Sources“
Paolo Bernardi, Renato Cicchetti
IEEE MTT-42, Nr. 8, August 1994: S.1474-1483

[21] „Approximate Calculation of Integrals“
V. I. Krylov
The Macmillan Company, New York 1962

[22] „The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields“
P. C. Clemmow
Pergamon Press Ltd. 1966

[23] „Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves"
R. Mittra, S. W. Lee
The Macmillan Company, New York 1971

[24] „Radiation and Scattering of Waves"
Leopold B. Felsen, Nathan Marcuvitz
Prentice-Hall 1973

[25] „Theory of Waveguides"
L. Lewin
Butterworth & Co Ltd., London 1975

[26] „Microstrip Lines and Slotlines"
K. C. Gupta, Ramesh Garg, I. J. Bahl
Artech House, Inc., 1979

[27] „Theoretische Physik 3: Elektrodynamik"
Rainer J. Jelitto
Aula-Verlag GmbH, Wiesbaden 1985

[28] „Applied Linear Algebra"
Riaz A. Usmani
Marcel Dekker, Inc., 1987

[29] „Theoretische Elektrotechnik"
Károly Simonyi
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1989 (9. Auflage)

[30] „Taschenbuch der Mathematik"
I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew
Verlag Harri Deutsch, Thun 1989 (24. Auflage)

[31] „Waves and Fields in Inhomogeneous Media"
Weng Cho Chew
Van Nostrand Reinhold, New York 1990

[32] „Methode der finiten Elemente"
Hans Rudolf Schwarz
B. G. Teubner Stuttgart 1991

[33] „Partielle Differentialgleichungen der Physik"
Arnold Sommerfeld
Verlag Harri Deutsch, Thun 1992

[34] „Numerische Mathematik"
Günther Hämmerlin, Karl-Heinz Hoffmann
Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1992

[35] „Numerical Recipes in FORTRAN"
William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery
Cambridge University Press 1992 (2. Auflage)