Abschlußbericht

Effizientes feldtheoretisch strenges Verfahren zur Berechnung der Strahlungseigenschaften gekoppelter Aperturstrahler bestehend aus Rechteck- und Rundhohlleiter-Elementen

(Geschäftszeichen DFG: Ar 138/22-2)

Dr.-Ing. Ingo D. Rullhusen
<d01c@uni-bremen.de>

25. März 2003

Universität Bremen

Institut für Telekommunikation und Hochfrequenztechnik
Prof. Dr.-Ing. habil. F. Arndt

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

In diesem von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) unter dem Geschäftszeichen Ar 138/22-2 geförderten Forschungsvorhaben wird eine FMM-basierte Berechnungsmethode für Horngruppen zur Speisung eines Reflektors entwickelt. Hierbei soll der praxisrelevante Anwendungsschwerpunkt bei der Satelliten-Kommunikationstechnik liegen, wo die gewünschte Ausleuchtung bestimmter Gebiete eine wichtige technische Rolle spielt.

Zur Erstellung des angestrebten Verfahrens ist zunächst einmal der FMM-Kern zu entwickeln. Hierzu werden zunächst die mathematischen Grundlagen insbesondere das Gegenbauersche Additionstheorem dargestellt. Diese werden anschließend zur Implementation der Schnellen Multipolmethode (FMM) zwecks Lösung des klassischen metallischen Streuproblems eingesetzt. Die Schnelle Multipolmethode wird der Übersicht halber zunächst einstufig angewendet, um dann auf mehrere Stufen erweitert zu werden. Die Erweiterung auf Hornantennen erfolgt sodann durch die Einführung von Aperturen mittels magnetischer Oberflächenstromdichten. Abschließend wird noch die Möglichkeit einer parallelen Implementation der mehrstufigen Schnellen Multipolmethode erörtert, um die Rechenzeit zu verkürzen.

Es ist ferner erforderlich iterative Löser für lineare Gleichungssysteme zu betrachten. Diese Notwendigkeit ergibt sich aus der Tatsache, daß im Rahmen der FMM große Gleichungssysteme entstehen, deren Matrix jedoch nicht explizit vorliegt. Stattdessen ermöglicht die FMM eine effiziente Berechnung des Matrix-Vektor-Produktes. Diese Operation ist jedoch gerade die Grundlage der iterativen Gleichungssystemlöser. Hierbei kommt es insbesondere auf vorkonditionierte Verfahren an, da das lineare Gleichungssystem aus der FMM schlecht konditioniert ist.

Kapitel 2

Grundlegendes zur Schnellen Multipolmethode (FMM)

Im folgenden sollen die mathematischen Grundlagen dargestellt werden, soweit selbige speziell für die Schnelle Multipolmethode vonnöten sind. Hierbei kommt es insbesondere auf das Gegenbauersche Additionstheorem an.

2.1 Maxwellsche Gleichungen

Allen folgenden Betrachtungen liegen die symmetrisierten Maxwellschen Gleichungen in der komplexen Schreibweise

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}(\vec{r}) = \mathrm{j}\omega\varepsilon \boldsymbol{E}(\vec{r}) + \boldsymbol{J}(\vec{r}), \tag{2.1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\vec{r}) = -\mathrm{j}\omega\mu \boldsymbol{H}(\vec{r}) - \boldsymbol{M}(\vec{r}), \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(\vec{r}) = q_m(\vec{r}), \tag{2.3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D}(\vec{r}) = q(\vec{r}) \tag{2.4}$$

bei harmonischer Zeitabhängigkeit zugrunde. Die Zeitabhängigkeit wird in der komplexen Form $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ dargestellt.

Die Feldintegralgleichungen werden jedoch gemäß

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega \boldsymbol{A}_J - \operatorname{grad} \phi_J - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_M,$$

$$\boldsymbol{H} = -\mathrm{j}\omega \boldsymbol{A}_M - \operatorname{grad} \phi_M + \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_J$$

auf Grundlage der skalaren und vektoriellen Potentiale formuliert. Die Potentiale selbst ergeben sich dann aus den Quellgrößen als Faltungsintegrale über die zugehörigen Greenschen Funktionen. Letztere seien im folgenden kurz erläutert.

2.2 Die Greenschen Dyaden für den Freiraum

Ausgehend von der Lösung der Poisson-Gleichung für eine Punktladung kann man die Greensche Funktion für die vektorielle Helmholtzgleichung ableiten.[1] Da das Vektorpotential im Freiraum

[1] Siehe z.B. [8].

gerade diese erfüllt, ergibt sich die Greensche Dyade des aus einer elektrischen Stromdichte resultierenden magnetischen Vektorpotentials zu

$$\underline{G}_{AJ}(\vec{r};\vec{r}') = \mu \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\underline{I}. \tag{2.5}$$

Die Greensche Funktion für das aus einer elektrischen Ladungsdichte resultierende Skalarpotential ergibt sich daraus über die Lorentz-Eichung

$$\phi = -\frac{\operatorname{div} \boldsymbol{A}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu}. \tag{2.6}$$

Man zieht hierzu den Differentialoperator in das Quellintegral hinein, überträgt diesen vom Aufpunktkoordinatensystem auf das Quellpunktkoordinatensystem und erhält nach der Umlage des Differentialoperators auf die elektrische Stromdichte unter Anwendung des Satzes von Gauß schließlich

$$G_{\phi J}(\vec{r};\vec{r}') = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi\varepsilon|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{2.7}$$

Die Greensche Dyade für die aus einer elektrischen Stromdichte resultierende magnetische Feldstärke ergibt sich aus der Definition des magnetischen Vektorpotentials gemäß der Gleichung (3.7) direkt zu

$$\begin{aligned}\underline{G}_{HJ}(\vec{r};\vec{r}') &= \operatorname{grad}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \times \underline{I} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi R}\left(\frac{1}{R}+\mathrm{j}k\right)\hat{R}\times\underline{I},\end{aligned} \tag{2.8}$$

wobei $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ gesetzt worden ist.

Die Greensche Dyade für die aus einer magnetischen Stromdichte resultierende elektrische Feldstärke ergibt sich letztlich unter Beachtung der Symmetrie elektrischer und magnetischer Größen aus der entsprechenden Dyade für die aus einer elektrischen Stromdichte resultierende magnetische Feldstärke wie zuvor zu

$$\begin{aligned}\underline{G}_{EM}(\vec{r};\vec{r}') &= -\operatorname{grad}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \times \underline{I} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi R}\left(\frac{1}{R}+\mathrm{j}k\right)\hat{R}\times\underline{I}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Die Greensche Dyade für das aus einer magnetischen Stromdichte resultierende elektrische Vektorpotential ergibt sich entsprechend wie im obigen Falle zu

$$\underline{G}_{AM}(\vec{r};\vec{r}') = \varepsilon \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\underline{I}. \tag{2.10}$$

Die Greensche Funktion des aus einer magnetischen Ladungsdichte resultierenden Skalarpotentials ergibt sich daraus über die Lorentz-Eichung (2.6), die wegen der symmetrischen Form der Maxwellschen Gleichungen auch hier gilt, und unter Anwendung des Satzes von Gauß in der gleichen Weise wie zuvor zu

$$G_{\phi M}(\vec{r};\vec{r}') = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi\mu|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{2.11}$$

Die Exponentialausdrücke in den Greenschen Funktionen lassen sich mit Hilfe des Gegenbauerschen Additionstheorems derart umformen, daß eine Summe zweier Teilabstände zu einer Aufteilung in zwei Teilfaktoren führt. Dies wird im nächsten Abschnitt näher dargestellt.

2.3 Gegenbauersches Additionstheorem

Das Gegenbauersche Additionstheorem soll im folgenden aus physikalischen Betrachtungen heraus abgeleitet werden. Eine vollständig analytische Darstellung auf der Grundlage der Gegenbauerpolynome ist zum Beispiel bei Watson [33] zu finden. Der Kern der physikalischen Vorgehensweise liegt in der Gleichsetzung der Greenschen Funktion der Helmholtzgleichung in unterschiedlichen Koordinatensystemen. Hierzu wird im sogenannten statischen Fall zunächst die Poisson-Gleichung betrachtet, worauf sich im dynamischen Fall die Darstellung für die Helmholtzgleichung anschließt.

2.3.1 Der statische Fall

Es sei zunächst die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung betrachtet. Diese muß per definitionem die Gleichung

$$\nabla^2 G(\vec{r};\vec{r}\,') = -\delta(\vec{r};\vec{r}\,') \tag{2.12}$$

erfüllen, wobei von normierenden Feldkonstanten zunächst einmal abgesehen wird. Als Lösung ergibt sich die Greensche Funktion in kartesischen Koordinaten zu

$$G(\vec{r};\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{2.13}$$

Näheres ist hierzu beispielsweise bei Collin [8] zu finden. Um diese kartesische Form in Kugelkoordinaten zu überführen, kommt zunächst einmal der Kosinussatz zur Anwendung:

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha}.$$

Mit $\alpha = \alpha(\varphi;\vartheta;\varphi';\vartheta')$ wird hierbei der zwischen den Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ eingeschlossene Winkel bezeichnet. Führt man desweiteren die Bezeichnungen

$$r_< = \min\{r_1;r_2\}, \tag{2.14}$$
$$r_> = \max\{r_1;r_2\} \tag{2.15}$$

und

$$t = \frac{r_<}{r_>}$$

ein, so ergibt sich die Greensche Funktion in Kugelkoordinaten zunächst zu

$$G(\vec{r};\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi r_>\sqrt{1+t^2-2t\cos\alpha}}.$$

Die Legendre-Polynome sind als Entwicklungskoeffizienten der Darstellung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \qquad |t|<1 \tag{2.16}$$

definiert.[2] Durch Einsetzen folgt hieraus direkt die Darstellung der Greenschen Funktion der Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten in der Form

$$G(\vec{r};\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\alpha)\frac{r_<^n}{r_>^{n+1}}. \tag{2.17}$$

[2] Siehe bspw. [2].

Für die weiteren Untersuchungen ist ein Ausdruck für die Dirac-Distribution der Winkelabhängigkeit notwendig. Diesen gewinnt man mit $r_- < r' < r_+$ durch radiale Integration über den Quellpunkt:

$$\lim_{r_-;r_+\to r'} \int\limits_{r_-}^{r_+} (\nabla^2 G) r^2 \mathrm{d}r = -\lim_{r_-;r_+\to r'} \int\limits_{r_-}^{r_+} \frac{\delta(r-r')\delta(\vartheta-\vartheta')\delta(\varphi-\varphi')}{r^2 \sin\vartheta} r^2 \mathrm{d}r = -\frac{\delta(\vartheta-\vartheta')\delta(\varphi-\varphi')}{\sin\vartheta}.$$

Wendet man den Laplaceoperator in Kugelkoordinaten auf die soeben gewonnene Greensche Funktion an, so erhält man

$$\begin{aligned} &\int\limits_{r_-}^{r_+} \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial G}{r} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial G}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2}\right) r^2 \mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi}\left[r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right]_{r_-}^{r_+} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\alpha)\int\limits_{r_-}^{r_+}\frac{r_<^n}{r_>^{n+1}}\mathrm{d}r + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\alpha)\int\limits_{r_-}^{r_+}\frac{r_<^n}{r_>^{n+1}}\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Nun sei das Grenzwertverhalten des Integrals $\int_{r_-}^{r_+} \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}}\mathrm{d}r$ betrachtet. Für den ersten Teil des Integrationsintervalls ergibt sich

$$\lim_{r_-\to r'} \int\limits_{r_-}^{r'} \frac{r^n}{r'^{n+1}}\mathrm{d}r = \lim_{r_-\to r'} \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{r_-^{n+1}}{r'^{n+1}}\right) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Bei der Berechnung des Integrals über den zweiten Intervallteil sind die Fälle $n = 0$ und $n \neq 0$ zu unterscheiden. Im Fall $n \neq 0$ ergibt sich

$$\lim_{r_+\to r'} \int\limits_{r'}^{r_+} \frac{r'^n}{r^{n+1}}\mathrm{d}r = \lim_{r_+\to r'} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{r'^n}{r_+^n}\right) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

und im Fall $n = 0$ folgt

$$\lim_{r_+\to r'} \int\limits_{r'}^{r_+} \frac{1}{r}\mathrm{d}r = \lim_{r_+\to r'} (\ln|r_+| - \ln|r'|) = 0.$$

Der Grenzwert des Integrals $\int_{r_-}^{r_+} \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}}\mathrm{d}r$ verschwindet also und dementsprechend ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{r_-;r_+\to r'} \int\limits_{r_-}^{r_+} (\nabla^2 G) r^2 \mathrm{d}r &= \lim_{r_-;r_+\to r'} \frac{1}{4\pi}\left[r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right]_{r_-}^{r_+} \\ &= \frac{1}{4\pi}\lim_{r_-;r_+\to r'}\left(r_+^2 \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\alpha) r'^n \frac{-n-1}{r_+^{n+2}} \right. \\ &\qquad \left. - r_-^2 \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\alpha)\frac{1}{r'^{n+1}} n r_-^{n-1}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\alpha). \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der obigen Ausgangsformel ergibt somit das Endresultat

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\alpha) = \frac{\delta(\vartheta-\vartheta')\delta(\varphi-\varphi')}{\sin\vartheta}. \tag{2.18}$$

2.3.2 Der dynamische Fall

Als nächstes soll die Greensche Funktion der Helmholtzgleichung

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r};\vec{r}') = -\delta(\vec{r};\vec{r}') \tag{2.19}$$

betrachtet werden. In kartesischen Koordinaten ergibt sich das bekannte Resultat

$$G(\vec{r};\vec{r}') = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}, \tag{2.20}$$

sofern die Zeitabhängigkeit $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ angesetzt wird. Um eine Darstellung in Kugelkoordinaten zu erhalten, wird zunächst die homogene Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten gelöst, um die Greensche Funktion dann aus diesen Eigenlösungen zusammenzusetzen. Dies ist möglich, da außerhalb der Quellsingularität der quellenfreie Fall vorliegt.

Die homogene Helmholtzgleichung nimmt in Kugelkoordinaten die Gestalt

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + k^2\psi = 0$$

an. Als erstes wird die φ-Abhängigkeit separiert. Hierzu wählt man den Ansatz

$$\psi = F(r;\vartheta)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi},$$

wobei m nur ganzzahlige Werte annehmen kann, da die Lösung im Freiraum rotationssymmetrisch sein muß. Durch Einsetzen erhält man hiernach die reduzierte Differentialgleichung

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial F}{\partial\vartheta} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2\sin^2\vartheta}\right)F = 0.$$

Separiert man nun mit dem Ansatz

$$F = b_n(kr)P_n^m(\cos\vartheta),$$

so zerfällt diese Differentialgleichung wegen der Konstanz der Einzelterme bei Variation der Argumente in die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^2\frac{\mathrm{d}b_n(kr)}{\mathrm{d}r} + \frac{k^2r^2 - n(n+1)}{r^2}b_n(kr) &= 0,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1-z^2)\frac{\mathrm{d}P_n^m(z)}{\mathrm{d}z} + n(n+1)P_n^m(z) &= 0,\end{aligned}$$

wobei $z = \cos\vartheta$ gesetzt worden ist. Die Winkellösungen in Form der Legendre-Polynome erster Art P_n^m vom Grade n und Ordnung m werden im folgenden nicht weiter von Interesse sein. Wichtig jedoch ist die Tatsache, daß die radiale Abhängigkeit über die sphärischen Bessel-, Neumann-, und Hankelfunktionen beschrieben wird, wie aus der zugeordneten Differentialgleichung ersichtlich ist. Es ergibt sich also:

$$b_n(kr) = \begin{cases}\mathrm{j}_n(kr)\\ \mathrm{y}_n(kr)\\ \mathrm{h}_n^{(1)}(kr)\\ \mathrm{h}_n^{(2)}(kr)\end{cases}.$$

Somit besitzt die Lösung der Helmholtzgleichung im Freiraum die Gestalt

$$\psi = \sum_{n;m} a_{nm}b_n(kr)P_n^m(\cos\vartheta)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi}.$$

Nun ist aus der Lösung im homogenen Fall ein Ansatz für die Greensche Funktion abzuleiten. Aus der physikalischen Sichtweise erkennt man, daß die Greensche Funktion nur von der Winkeldifferenz $\varphi - \varphi'$ abhängig ist und somit nicht vom Winkel φ selbst. Mithin ist also $m = 0$ und die Summation über m entfällt. Desweiteren erkennt man, daß das k bei der homogenen Lösung nicht in die Winkelabhängigkeit eingeht. Somit ist es möglich, die Winkelabhängigkeit vom statischen Fall zu übernehmen und auf den eingeschlossenen Winkel α zu reduzieren. Daraus ergibt sich als erster Ansatz

$$G(\vec{r};\vec{r}') = \sum_n c_n b_n(kr) P_n(\cos\alpha).$$

Die Quellpunktsingularität teilt den sphärischen Raum in ein inneres Kugelvolumen und den äußeren Rest. Da das Feld für $r < r'$ überall endlich sein soll, können im Ausdruck für den inneren Raumbereich keine im Nullpunkt singulären sphärischen Hankelfunktionen enthalten sein. Für die Felddarstellung im inneren Bereich verbleiben also nur die sphärischen Besselfunktionen. Der äußere Bereich soll als Randbedingungen die Abstrahlungsbedingungen erfüllen; es sollen somit nur vom Zentrum fortlaufende Wellenterme vorhanden sein. Bei einer Zeitabhängigkeit von $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ wird diese Bedingung gerade durch die sphärischen Hankelfunktionen zweiter Art erfüllt. Es ergibt sich folglich bezüglich der r-Abhängigkeit der modifizierte Ansatz

$$G(\vec{r};\vec{r}') = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^1 \mathrm{j}_n(kr) P_n(\cos\alpha) & \forall r < r' \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2 \mathrm{h}_n^{(2)}(kr) P_n(\cos\alpha) & \forall r > r' \end{cases}.$$

Um die r'-Abhängigkeit zu ermitteln, beachte man, daß das Feld außerhalb der Singularität bei r' stetig sein muß. Es soll also

$$\sum_n c_n^1 \mathrm{j}_n(kr') P_n(\cos\alpha) = \sum_n c_n^2 \mathrm{h}_n^{(2)}(kr') P_n(\cos\alpha)$$

gelten, woraus per Koeffizientenvergleich

$$c_n^1 \mathrm{j}_n(kr') = c_n^2 \mathrm{h}_n^{(2)}(kr')$$

folgt. Dies ist mit

$$\begin{aligned} c_n^1 &= c_n \mathrm{h}_n^{(2)}(kr'), \\ c_n^2 &= c_n \mathrm{j}_n(kr') \end{aligned}$$

erfüllbar, so das der Ansatz die Form

$$G(\vec{r};\vec{r}') = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \mathrm{h}_n^{(2)}(kr') \mathrm{j}_n(kr) P_n(\cos\alpha) & \forall r < r' \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \mathrm{j}_n(kr') \mathrm{h}_n^{(2)}(kr) P_n(\cos\alpha) & \forall r > r' \end{cases}.$$

annimmt.

Nun sind die c_n anhand des Verhaltens in der Singularität zu bestimmen. Hierzu wird die inhomogene Helmholtzgleichung über $r_- < r' < r_+$ integriert und der Grenzwert gebildet:

$$\lim_{r_-;r_+\to r'} \int\limits_{r_-}^{r_+} (\nabla^2 G + k^2 G) r^2 \mathrm{d}r = -\frac{\delta(\vartheta - \vartheta')\delta(\varphi - \varphi')}{\sin\vartheta}.$$

Stellt man den Laplaceoperator in sphärischen Koordinaten dar, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lim_{r_-;r_+\to r'} \int_{r_-}^{r_+} (\nabla^2 G + k^2 G) r^2 \mathrm{d}r &= \lim_{r_-;r_+\to r'} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\alpha) \int_{r_-}^{r_+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r^2 \frac{di}{\mathrm{d}r} \mathrm{j}_n(kr_<)\mathrm{h}_n^{(2)}(kr_>)\mathrm{d}r + 0 \\
&= \lim_{r_-;r_+\to r'} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\alpha) \left(\left[r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \mathrm{j}_n(kr)\mathrm{h}_n^{(2)}(kr') \right]_{r_-}^{r'} \right. \\
&\qquad \left. + \left[r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \mathrm{j}_n(kr')\mathrm{h}_n^{(2)}(kr) \right]_{r'}^{r_+} \right) \\
&= \lim_{r_-;r_+\to r'} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\alpha) \\
&\qquad \cdot \left(-r_-^2 \mathrm{h}_n^{(2)}(kr') k \left(\frac{n}{kr_-} \mathrm{j}_n(kr_-) - \mathrm{j}_{n+1}(kr_-) \right) + 0 \right. \\
&\qquad \left. + r_+^2 \mathrm{j}_n(kr') k \left(\frac{n}{kr_+} \mathrm{h}_n^{(2)}(kr_+) - \mathrm{h}_{n+1}^{(2)}(kr_+) \right) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\alpha) \\
&\qquad \cdot \left(kr'^2 \mathrm{h}_n^{(2)}(kr') \mathrm{j}_{n+1}(kr') - kr'^2 \mathrm{j}_n(kr') \mathrm{h}_{n+1}^{(2)}(kr') \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\alpha) kr'^2 \\
&\qquad \cdot \mathrm{j} \left(\mathrm{j}_n(kr')\mathrm{y}_{n+1}(kr') - \mathrm{y}_n(kr')\mathrm{j}_{n+1}(kr') \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\alpha) kr'^2 \mathrm{j} \left(-\frac{1}{(kr')^2} \right) = \frac{-\mathrm{j}}{k} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\alpha).
\end{aligned}$$

Die Umformungen sind mit Hilfe von Formeln aus Abramowitz und Stegun [1] ausgeführt worden. Setzt man die letzte Darstellung mit der Formel (2.18) gleich so folgen aus

$$\frac{-\mathrm{j}}{k} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\alpha) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\alpha)$$

die unbekannten Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich:

$$c_n = -\frac{\mathrm{j}k(2n+1)}{4\pi}.$$

Eingesetzt in den Ansatz ergibt sich die Greensche Funktion der Helmholtzgleichung für den Freiraum in Kugelkoordinaten zu

$$G(\vec{r};\vec{r}') = -\frac{\mathrm{j}k}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \mathrm{j}_n(kr_<)\mathrm{h}_n^{(2)}(kr_>) P_n(\cos\alpha). \tag{2.21}$$

2.3.3 Das Additionstheorem

Durch Gleichsetzen der Greenschen Funktion der Helmholtzgleichung für den Freiraum in Kugelkoordinaten (2.21) mit der selbigen in kartesischen Koordinaten erhält man die Beziehung

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\mathrm{j}k \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \mathrm{j}_n(kr_<)\mathrm{h}_n^{(2)}(kr_>) P_n(\cos\alpha). \tag{2.22}$$

Führt man hieran die Substitutionen

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{R},\\ \vec{r}' &= -\vec{d},\\ \cos\alpha &= -\hat{d}\cdot\hat{R}\end{aligned}$$

durch, so erhält man das Gegenbauersche Additionstheorem:

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{R}+\vec{d}|}}{|\vec{R}+\vec{d}|} = -\mathrm{j}k\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l(2l+1)\mathrm{j}_l(kd)\mathrm{h}_l^{(2)}(kR)P_l(\hat{d}\cdot\hat{R}) \quad \text{mit} \quad d < R. \tag{2.23}$$

Hierbei ist insbesondere beachtet worden, daß Legendre-Polynome bei ganzzahligen geraden Grad gerade und bei ganzzahligen ungeraden Grad ungerade Funktionen sind.[3]

2.4 Der sphärische Term in ebenen Wellen ausgedrückt

Um einen Ausdruck des sphärischen Terms in ebenen Wellen zu erhalten, betrachtet man zunächst das asymptotische Verhalten der Gleichung (2.22). Setzt man $\vec{r} = \hat{k}r$ und betrachtet $r \to \infty$, so ergibt sich wegen

$$|\vec{r}-\vec{r}'| \to r - \hat{k}\cdot\vec{r}'$$

für die linke Seite der Gleichung (2.22)

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \to \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}'}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}.$$

Wegen des asymptotischen Verhaltens der sphärischen Hankelfunktion

$$\mathrm{h}_l^{(2)}(z\to\infty) \to \mathrm{j}^{l+1}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}}{z}$$

kann man den Exponentialfaktor herauskürzen und erhält somit die Gleichung

$$\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{r}'} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\mathrm{j}_n(kr')\mathrm{j}^nP_n(\cos\alpha)$$

für die gemeinsame Asymptote. Durch die einfache Substitution $\vec{r}' = -\vec{d}$ gelangt man zu der Relation

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\vec{d}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{j})^n(2n+1)\mathrm{j}_n(kd)P_n(\hat{k}\cdot\hat{d}). \tag{2.24}$$

Multipliziert man die letzte Gleichung mit $P_l(\hat{z}\cdot\hat{k})$ und integriert das Resultat über die Einheitskugel bezüglich $\hat{k}$, so erhält man für die linke Seite direkt

$$\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{d}}P_l(\hat{z}\cdot\hat{k})\,\mathrm{d}A_{\hat{k}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{d}}P_l(\cos\alpha)\sin\alpha\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta, \tag{2.25}$$

sofern jetzt mit α der Polwinkel von $\hat{k}$ und mit β dessen Azimutwinkel bezeichnet werden. Zur Auswertung der rechten Seite wird ein Faktor der Gestalt

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}P_n(\cos\gamma)P_l(\cos\alpha)\sin\alpha\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

[3] Siehe bspw. [18].

benötigt, wobei $\cos\gamma = \hat{k}\cdot\hat{d}$ sei. Um diesen Ausdruck integrieren zu können, muß $P_n(\cos\gamma)$ als Funktion von α und β ausgedrückt werden. Dies geschieht vermöge der Additionsformel

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\alpha)P_n(\cos\vartheta) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\alpha)P_n^m(\cos\vartheta)\cos m(\varphi-\beta), \tag{2.26}$$

wobei ϑ nunmehr den Polwinkel von $\hat{d}$ und φ dessen Azimutwinkel darstellen. Diese Additionsformel ergibt sich aus einem Summenansatz mit Kugelfunktionen erster Art indem man deren Koeffizienten über die Orthogonalitätsbeziehungen bestimmt.[4] Der Summenterm entfällt, sofern man die β-Integration zuerst ausführt, wegen der Integration über ganze Perioden der Kosinusfunktion. Bei der Integration des ersten Terms beachte man, daß die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos\alpha)P_l^m(\cos\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\delta_{nl}$$

gilt.[5] Hiermit folgt

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n(\cos\alpha)P_l(\cos\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = \frac{4\pi}{2l+1}\delta_{nl},$$

weshalb von der Summe auf der linken Seite der Gleichung (2.24) nach der Integration nur ein Term verbleibt:

$$\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{d}}P_l(\hat{z}\cdot\hat{k})\,\mathrm{d}A_{\hat{k}} = (-\mathrm{j})^l(2l+1)\mathrm{j}_l(kd)P_l(\cos\vartheta)\frac{4\pi}{2l+1}.$$

Durch Umstellen ergibt sich hieraus schließlich

$$\mathrm{j}_l(kd)P_l(\hat{d}\cdot\hat{R}) = \frac{1}{4\pi(-\mathrm{j})^l}\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{d}}P_l(\hat{k}\cdot\hat{R})\,\mathrm{d}A_{\hat{k}}. \tag{2.27}$$

wobei $\iint \mathrm{d}A_{\hat{k}}$ erneut die Integration über die Einheitskugel im Wellenvektorraum darstellt und $\hat{z} = \hat{R}$ und folglich $\cos\vartheta = \hat{d}\cdot\hat{R}$ gesetzt worden ist.

Setzt man den Ausdruck (2.27) unter Vertauschung von Summation und Integration in das Gegenbauersche Additionstheorem (2.23) ein, so erhält man die Darstellung

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{R}+\vec{d}|}}{|\vec{R}+\vec{d}|} = -\frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{d}}T_\infty(kR;\hat{k}\cdot\hat{R})\,\mathrm{d}A_{\hat{k}} \tag{2.28}$$

mit der Abkürzung

$$T_L(\kappa;\cos\alpha) = \sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{\mathrm{j}^l}\mathrm{h}_l^{(2)}(\kappa)P_l(\cos\alpha). \tag{2.29}$$

Eine geeignete Wahl der oberen Summengrenze L zur Erzielung einer vorgegebenen Genauigkeit wird im Anhang C beschrieben.

Hiermit ist es nun ermöglicht, die Greenschen Funktionen als Funktionen eines großen Gruppenabstandes $\vec{R}$ und einer kleinen gruppeninternen Korrektur $\vec{d}$ darzustellen. Auf einer solchen Gruppenbildung beruht letztlich die Schnelle Multipolmethode, da nicht mehr alle Basisfunktionen direkt miteinander gekoppelt werden, sondern nur noch über ihre Gruppen eine Fernwirkung erzeugen.

[4] Vergl. [31].
[5] Siehe [19].

Kapitel 3

Anwendung der Schnellen Multipolmethode auf Streuprobleme

Die Anwendung der Schnellen Multipolmethode soll zunächst anhand des Streuproblems dargestellt werden. Der folgenden Betrachtung der elektrischen Feldintegralgleichung schließt sich die Darstellung der magnetischen Feldintegralgleichung an, um schließlich zur kombinierten Felddarstellung zu gelangen.

3.1 Die elektrische Feldintegralgleichung

Dem Streuproblem auf der Grundlage der elektrischen Feldintegralgleichung liegt ein Ansatz der Form

$$\hat{n} \times \boldsymbol{E}(\vec{r}) = \hat{n} \times (\boldsymbol{E}^J\{\boldsymbol{J}_s\}(\vec{r}) + \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\vec{r})) = \vec{0} \qquad \forall \vec{r} \in S \tag{3.1}$$

zugrunde, welcher auf der Oberfläche S des elektrisch ideal leitenden Streukörpers gilt. Die elektrische Flächenstromdichte wird unter der Einführung unbekannter Koeffizienten I_i mit Hilfe der vektoriellen Rao-Wilton-Glisson-Basisfunktionen[1] $\vec{f}_i(\vec{r})$ diskretisiert, wie es bei Anwendung der Momentenmethode üblich ist. Es ergibt sich hiermit für die elektrische Flächenstromdichte der Summenansatz:

$$\boldsymbol{J}_s(\vec{r} \in S) \approx \sum_i J_i \vec{f}_i(\vec{r}). \tag{3.2}$$

Indem man die diskretisierte Gleichung (3.1) nun im Rahmen der Momentenmethode mit den vektoriell multiplizierten Basisfunktionen $(\hat{n} \times \vec{f}_j)$ der elektrischen Flächenstromdichte auf der Oberfläche S skalar multipliziert und über S integriert, erhält man

$$\underline{Z} \cdot \underline{J} = \underline{U} \tag{3.3}$$

[1] Vgl. [25].

mit

$$(\underline{Z})_{ij} = \iint\limits_S \vec{f}_i \cdot \boldsymbol{E}^J\{\vec{f}_j'\}\,\mathrm{d}S, \tag{3.4}$$

$$(\underline{J})_i = J_i, \tag{3.5}$$

$$(\underline{U})_i = -\iint\limits_S \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}} \cdot \vec{f}_i\,\mathrm{d}S. \tag{3.6}$$

Anstatt die Feldintegralgleichung (3.1) zu verwenden, wird aus dieser die Mischpotentialform abgeleitet. Die Integranden dieser besitzen aufgrund der Verlagerung einer Differentiation vom skalaren Potential auf die Gewichtsfunktion eine Singularität geringerer Ordnung verglichen mit den ursprünglichen Feldintegralen. Dieses erleichtert dann die Behandlung der Singularitäten. Um eine solche Darstellung zu erhalten, ist zunächst eine Darstellung der Feldstärken durch Potentiale notwendig. Im Falle eines idealen elektrischen Leiters gilt $q_{ms} = 0$ und $\boldsymbol{M}_s = \vec{0}$ in den symmetrischen Maxwellschen Gleichungen. In diesem Fall ist $\boldsymbol{B}$ quellenfrei und kann als Rotation eines Vektorpotentials dargestellt werden:

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_J$$

beziehungsweise

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_J. \tag{3.7}$$

Die elektrische Feldstärke ergibt sich dann aus der Maxwellschen Gleichung (2.2) über

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_J$$

zu

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}_J - \mathrm{grad}\,\phi_J, \tag{3.8}$$

wobei beachtet worden ist, daß stets

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = \vec{0}$$

gilt. Für den äquivalenten Fall, daß $q_s = 0$ und $\boldsymbol{J}_s = \vec{0}$ sind, ergibt sich in analoger Art und Weise aus der Quellenfreiheit von $\boldsymbol{D}$:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_M \tag{3.9}$$

und

$$\boldsymbol{H} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}_M - \mathrm{grad}\,\phi_M. \tag{3.10}$$

Der allgemeine Fall resultiert hiermit aus der linearen Überlagerung beider Teilergebnisse zu:

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}_J - \mathrm{grad}\,\phi_J - \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_M, \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{H} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}_M - \mathrm{grad}\,\phi_M + \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_J, \tag{3.12}$$

wobei als Feldkonstanten diejenigen am Aufpunkt zu verwenden sind.

Die Matrixelemente von $\underline{Z}$ werden somit über die Potentiale berechnet:

$$\begin{aligned}(\underline{Z})_{ij} &= \iint\limits_S \vec{f}_i \cdot \boldsymbol{E}^J\{\vec{f}_j'\}\mathrm{d}S \\ &= -\mathrm{j}\omega \iint\limits_{S_i} \vec{f}_i \cdot \boldsymbol{A}_J\{\vec{f}_j'\}\mathrm{d}S - \iint\limits_{S_i} \vec{f}_i \cdot \mathrm{grad}\,\phi_J \left\{-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\,\mathrm{div}_s{}'\,\vec{f}_j'\right\}\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

Hierbei ist beachtet worden, daß das skalare Potential aus der elektrischen Flächenladungsdichte q_s berechnet wird, für welche gilt:

$$q_s = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\,\mathrm{div}_s\,\boldsymbol{J}_s \tag{3.13}$$

Unter Beachtung von

$$\boldsymbol{J}_s \cdot \nabla\phi_J = \boldsymbol{J}_s \cdot \nabla_s\phi_J = \nabla_s \cdot (\boldsymbol{J}_s\phi_J) - \phi_J\nabla_s \cdot \boldsymbol{J}_s \tag{3.14}$$

und der Tatsache, daß man über eine geschlossene Hüllfläche integriert, läßt sich der Differentialoperator vom skalaren Potential auf die Basisfunktion übertragen. Man beachte, daß beim Durchtritt durch Grenzflächen, an denen die Integranden nicht differenzierbar sind, im allgemeinen zusätzliche Linienintegrale entstehen. Diese entfallen jedoch bei der „Formulierung C" nach Michalski,[2] so daß sich schließlich die Mischpotentialformen

$$(\underline{Z})_{ij} = -\mathrm{j}\omega \iint\limits_{S_i} \vec{f}_i \cdot \boldsymbol{A}_J\{\vec{f}_j'\}\,\mathrm{d}S - \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\iint\limits_{S_i}\left(\mathrm{div}_s\,\vec{f}_i\right)\phi_J\left\{\mathrm{div}_s{}'\,\vec{f}_j'\right\}\,\mathrm{d}S \tag{3.15}$$

ergeben. Die Potentiale ergeben sich dabei zu

$$\boldsymbol{A}_J\{\vec{f}_j'\} = \iint\limits_{S_j} \underline{G}_{AJ}\cdot\vec{f}_j'\,\mathrm{d}S', \tag{3.16}$$

$$\phi_J\left\{\mathrm{div}_s{}'\,\vec{f}_j'\right\} = \iint\limits_{S_j} G_{\phi J}\,\mathrm{div}_s{}'\,\vec{f}_j'\,\mathrm{d}S' \tag{3.17}$$

mit den Greenschen Funktionen (2.5) und (2.7). Hierbei ist zu beachten, daß bei der Integration über S_j in $\underline{Z}$ die Singularitäten der Integranden extrahiert und analytisch behandelt werden müssen, was im Anhang E näher dargestellt wird.

Das Prinzip der Schnellen Multipolmethode besteht nun darin, nur noch die Kopplungen im Nahbereich vermöge der gewöhnlichen Momentenmethodenprozedur zu bestimmen. Die Kopplungen zwischen weiter entfernten Basisfunktionen werden hingegen über die Multipolausdrücke des Kapitels 2 gebildet. Der Vorteil liegt darin, daß hierbei die Kopplung der einzelnen Basisfunktionen auf eine Kopplung von Gruppen von Basisfunktionen zurückgeführt werden kann. Der Fernbereichsbeitrag zur Matrix $\underline{Z}$ ergibt sich mithin aus der Kopplung zwischen den beteiligten Gruppen und der anschließenden Aufteilung dieser auf die einzelnen Basisfunktionen. Auf diese Weise kann eine Komplexität der Ordnung $O(N^2)$ vermieden werden, da nur der Nahbereich vollständig abgespeichert wird. Der Fernbereichsanteil wird durch eine dünn besetzte Matrixzerlegung dargestellt, die eine effektive Bildung des Matrix-Vektor-Produktes erlaubt, was die Grundlage des verwendeten iterativen Gleichungssystemlösers darstellt.

Die Matrix $\underline{Z}$ wird in diesem Sinne in einen Nahbereich $\underline{Z}^{\mathrm{MoM}}$ und einen Fernbereich $\underline{Z}^{\mathrm{FMM}}$ zerlegt:

$$\underline{Z} = \underline{Z}^{\mathrm{MoM}} + \underline{Z}^{\mathrm{FMM}}. \tag{3.18}$$

Der Nahbereichsteil enthält alle Beiträge der Gruppen von Basisfunktionen die in der Größenordnung der Wellenlänge beisammenliegen. Der Fernbereichsteil enthält die übrigen Anteile.

Während der Nahbereichsteil $\underline{Z}^{\mathrm{MoM}}$ direkt gemäß der Gleichung (3.15) bei ausschließlicher Integration über die Nahbereichsgruppen und unter Beachtung der Singularitäten bestimmt wird, kann für den Fernteil auf die Potentialform verzichtet werden, da hierbei keine Singularitäten auftreten. Mit der Greenschen Dyade der elektrischen Feldstärke ergibt sich in diesem Sinne

$$(\underline{Z}^{\mathrm{FMM}})_{ij} = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{4\pi}\iint\limits_{S_i}\vec{f}_i\cdot\iint\limits_{S_j}\left(\underline{I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot\vec{f}_j'\,\mathrm{d}S'\mathrm{d}S. \tag{3.19}$$

[2] Siehe [22].

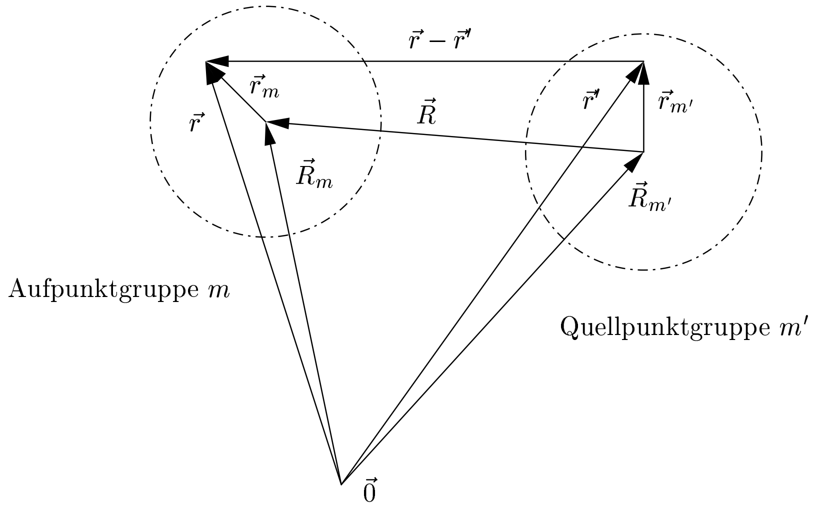

Abbildung 3.1: Definition der Beziehung zwischen Aufpunkt- und Quellpunktgruppe.

Um die Formel (2.28) einsetzen zu können, wird die Zerlegung

$$\vec{r}-\vec{r}' = \underbrace{\vec{r}_m - \vec{r}_{m'}}_{\vec{d}} + \underbrace{\vec{R}_m - \vec{R}_{m'}}_{\vec{R}} \tag{3.20}$$

eingeführt, die in der Abbildung 3.1 verdeutlicht wird. Hierbei bezeichnet $\vec{R}_m$ den Mittelpunkt der Aufpunkt-Gruppe m und $\vec{r}_m$ den Abstandsvektor vom Gruppenmittelpunkt zum Aufpunkt. Für die gestrichenen Größen gilt das gleiche.

Nach dem Einsetzen erhält man dann

$$(\underline{Z}^{\mathrm{FMM}})_{ij} = -\mathrm{j}k\frac{Z_F}{4\pi}\iint\limits_{S_i}\vec{f}_i\cdot\iint\limits_{S_j}\left(\underline{I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\left(-\frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\right)\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{d}}\,T_\infty(kR;\hat{k}\cdot\hat{R})\,\mathrm{d}A_{\hat{k}}\cdot\vec{f}_j'\,\mathrm{d}S'\mathrm{d}S.$$

Nach dem Auswerten der dyadischen Nablaoperatoren bezüglich der Exponentialfunktion und dem Vertauschen der Integrationsreihenfolge gelangt man zu

$$(\underline{Z}^{\mathrm{FMM}})_{ij} = -\mathrm{j}k\frac{Z_F}{4\pi}\left(-\frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\right)\iint T_\infty(kR;\hat{k}\cdot\hat{R})\iint\limits_{S_i}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_m}\,\vec{f}_i\cdot\iint\limits_{S_j}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_{m'}}\,(\underline{I}-\hat{k}\hat{k})\cdot\vec{f}_j'\,\mathrm{d}S'\mathrm{d}S\mathrm{d}A_{\hat{k}}.$$

Berücksichtigt man, daß die dyadische Beziehung

$$\vec{f}_i\cdot(\underline{I}-\hat{k}\hat{k})\cdot\vec{f}_j' = \left[(\underline{I}-\hat{k}\hat{k})\cdot\vec{f}_i\right]\cdot\left[(\underline{I}-\hat{k}\hat{k})\cdot\vec{f}_j'\right]$$

gilt, so ergibt sich letztlich

$$(\underline{Z}^{\mathrm{FMM}})_{ij} = \mathrm{j}k\frac{Z_F}{4\pi}\frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\iint \underbrace{T_\infty(kR;\hat{k}\cdot\hat{R})}_{T_{mm'}(\hat{k})}\underbrace{\iint\limits_{S_i}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_m}\,(\underline{I}-\hat{k}\hat{k})\cdot\vec{f}_i\,\mathrm{d}S}_{\boldsymbol{V}_i(\hat{k})=\boldsymbol{V}_{\vec{f}_i}(\hat{k})}$$
$$\cdot\underbrace{\iint\limits_{S_j}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_{m'}}\,(\underline{I}-\hat{k}\hat{k})\cdot\vec{f}_j'\,\mathrm{d}S'}_{\boldsymbol{V}_j^*(\hat{k})=\boldsymbol{V}_{\vec{f}_j'}(\hat{k})}\;\mathrm{d}A_{\hat{k}}. \tag{3.21}$$

Man beachte, daß die komplexe vektorielle Größe $\boldsymbol{V}_i$ aus nur zwei Komponenten besteht, da die radiale verschwindet.

Um hieraus einen numerisch berechenbaren Ausdruck zu erhalten ist zunächst einmal die unendliche Reihe T_∞ durch die endliche T_L zu approximieren. Ferner ist das Integral über die Ausbreitungsrichtungen $\hat{k}$ mit einer Anzahl K von Abtastpunkten als gewichtete Summe zu bestimmen. Hierzu wird die von Coifman, Rokhlin und Wandzura[3] vorgeschlagene Methode angewandt: Man nehme die $L+1$ Nullstellen des Legendre-Polynoms $(L+1)$-ter Ordnung aus der Gleichung (2.29) für eine Gaußquadratur über den polaren Winkel von $\hat{k}$ und desweiteren $2L+1$ äquidistante Punkte für eine Anwendung der Trapezregel zur Integration des Azimutwinkels von $\hat{k}$. Somit gilt also $O(K) = O(L^2)$. Da das notwendige L in etwa proportional zur elektrischen Gruppengröße ist, gilt ferner $O(L) = O(\sqrt{N/M})$ und $O(K) = O(N/M)$, sofern man Flächenströme annimmt. Die Auf- und Quellpunktintegrale sind wie im Momentenmethodenanteil zu berechnen.

Aus diesen Approximationen ergibt sich das folgende Schema zur Berechnung des Matrix-Vektor-Produkts $\underline{Z}^{\mathrm{FMM}} \cdot \underline{J}$ bei N Basisfunktionen in M Gruppen:

1. Zunächst sind die KM vektoriellen Werte

$$\boldsymbol{s}_m(\hat{k}) = \sum_\alpha \boldsymbol{V}^*_{j(m;\alpha)}(\hat{k}) J_{j(m;\alpha)} \tag{3.22}$$

   für die Fernbereichswirkung der einzelnen Gruppen zu bestimmen. Die Summation erfolgt jeweils über die Gruppenmitglieder. Der Rechenaufwand beträgt hierbei $O(KN) = O(N^2/M)$.

2. Anschließend ist die Rückwirkung der anderen Fernbereichsgruppen auf eine Gruppe anhand von KM vektoriellen Werten zu bestimmen:

$$\boldsymbol{g}_m(\hat{k}) = \sum_{m'} T_{mm'}(\hat{k}) \boldsymbol{s}_{m'}(\hat{k}). \tag{3.23}$$

   Der Rechenaufwand beträgt hierbei $O(KM^2) = O(NM)$.

3. Abschließend ist das Integral über die Ausbreitungsrichtungen als gewichtete Summe zu approximieren:

$$(\underline{Z}^{\mathrm{FMM}} \cdot \underline{J})_{i(m;\alpha)} = \sum_{\hat{k}} w(\hat{k}) \boldsymbol{V}_{i(m;\alpha)}(\hat{k}) \cdot \boldsymbol{g}_m(\hat{k}). \tag{3.24}$$

   Der Rechenzeitbedarf ist hierbei $O(KN) = O(N^2/M)$.

Der Aufwand für den Nahbereichsanteil $\underline{Z}^{\mathrm{MoM}} \cdot \underline{J}$ liegt ebenfalls bei $O(N^2/M)$. Dieser Anteil ist direkt per Matrix-Vektor-Produkt für dünn besetzte Matrizen zu bilden und dem obigen Beitrag hinzuzufügen, um das gesamte Matrix-Vektor-Produkt $\underline{Z} \cdot \underline{J}$ zu erhalten, welches für den iterativen Gleichungssystemlöser benötigt wird.

Insgesamt benötigt das Matrix-Vektor-Produkt also $O(aNM + bN^2/M)$ Rechenoperationen. Die Komplexität dieses Verfahrens wird mit der Wahl von $M = \sqrt{bN/a}$ minimal. Abgesehen von den rechner- und problemabhängigen Konstanten a und b erlaubt also eine Gruppenanzahl von $M = O(\sqrt{N})$ einen Rechenaufwand von insgesamt $O(N^{3/2})$, was unterhalb dem für die Momentenmethode üblichen von $O(N^2)$ liegt.

[3] Siehe [7].

3.2 Die magnetische Feldintegralgleichung

Dem Streuproblem auf der Grundlage der magnetischen Feldintegralgleichung liegt ein Ansatz der Form

$$\hat{n} \times \left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}(\vec{r}) + \boldsymbol{H}^{J}\{\boldsymbol{J}_s\}(\vec{r}) \right) = \boldsymbol{J}_s(\vec{r}) \qquad \forall \vec{r} \in S \tag{3.25}$$

zugrunde, welcher auf der Oberfläche S des elektrisch ideal leitenden Streukörpers gilt. Führt man in die Form

$$\boldsymbol{J}_s - \hat{n} \times \boldsymbol{H}^{J}\{\boldsymbol{J}_s\} = \hat{n} \times \boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}$$

den Summenansatz (3.2) ein, so gelangt man durch skalare Multiplikation mit $\vec{f}_i$ und Integration über die Oberfläche S zu dem linearen Gleichungssystem

$$\underline{T} \cdot \underline{J} = \underline{V} \tag{3.26}$$

mit

$$(\underline{T})_{ij} = \iint\limits_S \vec{f}_i \cdot \vec{f}_j \, \mathrm{d}S - \iint\limits_S \boldsymbol{H}^{J}\{\vec{f}_j\} \cdot (\vec{f}_i \times \hat{n}) \, \mathrm{d}S, \tag{3.27}$$

$$(\underline{J})_i = J_i, \tag{3.28}$$

$$(\underline{V})_i = \iint\limits_S \boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}} \cdot (\vec{f}_i \times \hat{n}) \, \mathrm{d}S. \tag{3.29}$$

Das Teilintegral $\iint \vec{f}_i \cdot \vec{f}_j \, \mathrm{d}S$ liefert nur einen Beitrag, wenn sich die Träger der beiden Basisfunktionen überlappen. Für den Fall der Rao-Wilton-Glisson-Basisfunktionen, die im Anhang D geschrieben werden, ergibt sich der analytische Beitrag

$$\iint\limits_S \vec{f}_i \cdot \vec{f}_j \, \mathrm{d}S = \frac{l_i l_j}{48D} (2\vec{l}_{ik} \cdot \vec{l}_{jk} + \vec{l}_{ik} \cdot \vec{l}_{ji} + \vec{l}_{ij} \cdot \vec{l}_{jk} + \vec{l}_{ij} \cdot \vec{l}_{ji}), \tag{3.30}$$

sofern sich beide Basisfunktionen jeweils nur mit ihrem positiven Dreieck überlappen. Ansonsten ist das Vorzeichen zu korrigieren. Hierbei steht l_i beispielsweise für die Länge der dem Punkte i gegenüberliegenden Dreieckskante, $\vec{l}_{ij}$ für den Kantenvektor vom Punkte i zum Punkt j und D für die Fläche des gemeinsamen Dreiecks selbst. Im Falle der Gleichheit beider Basisfunktionen ergibt sich für ein gemeinsames Dreieck hingegen

$$\iint\limits_S \vec{f}_i \cdot \vec{f}_i \, \mathrm{d}S = \frac{l_i^2}{48D} (2\vec{l}_{ik} \cdot \vec{l}_{ik} + \vec{l}_{ik} \cdot \vec{l}_{ij} + \vec{l}_{ij} \cdot \vec{l}_{ik} + 2\vec{l}_{ij} \cdot \vec{l}_{ij}). \tag{3.31}$$

Das Teilintegral $\iint \boldsymbol{H}^{J}\{\vec{f}_j\} \cdot (\vec{f}_i \times \hat{n}) \, \mathrm{d}S$ ergibt sich durch Einsetzen der Greenschen Dyade (2.8) in den Integraloperator der magnetischen Feldstärke zu

$$\begin{aligned} \iint\limits_S \boldsymbol{H}^{J}\{\vec{f}_j\} \cdot (\vec{f}_i \times \hat{n}) \, \mathrm{d}S &= \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \iint\limits_S \left(\operatorname{grad} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \times \vec{f}_j' \, \mathrm{d}S' \cdot (\vec{f}_i \times \hat{n}) \, \mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left[\, {\int\!\!\!\!\!\!-\!\!\!\int}_S \left(\operatorname{grad} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \times \vec{f}_j' \, \mathrm{d}S' - \frac{4\pi}{2} \hat{n} \times \vec{f}_j \right] \cdot (\vec{f}_i \times \hat{n}) \, \mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Man beachte hierbei die Hauptwertbildung zur Behandlung der Singularität, was im Anhang E.2 näher ausgeführt wird.

Analog zum Fall der elektrischen Feldintegralgleichung wird nun die Matrix $\underline{T}$ gemäß

$$\underline{T} = \underline{T}^{\mathrm{MoM}} + \underline{T}^{\mathrm{FMM}} \tag{3.33}$$

in einen Nahbereichsanteil $\underline{T}^{\mathrm{MoM}}$ und einen Fernbereichsteil $\underline{T}^{\mathrm{FMM}}$ zerlegt. Der Nahbereichsteil wird wie bei der Momentenmethode durch numerische Integration der obigen Formeln bestimmt. Der Fernbereichsteil wird mit Hilfe der Schnellen Multipolmethode ermittelt.

Für den Fernbereichsteil ergibt sich mit der Formel (2.28) somit

$$\begin{aligned}
(\underline{T}^{\mathrm{FMM}})_{ij} &= -\iint\limits_S \boldsymbol{H}^J\{\vec{f}_j\} \cdot (\vec{f}_i \times \hat{n})\,\mathrm{d}S \\
&= -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \iint\limits_S \left(\operatorname{grad} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \times \vec{f}'_j\,\mathrm{d}S' \cdot (\vec{f}_i \times \hat{n})\,\mathrm{d}S \\
&= -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \iint\limits_S \operatorname{grad}\left(-\frac{\mathrm{j}k}{4\pi} \iint \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{d}}\, T_\infty(kR;\hat{k}\cdot\hat{R})\,\mathrm{d}A_{\hat{k}}\right) \times \vec{f}'_j\,\mathrm{d}S' \cdot (\vec{f}_i \times \hat{n})\,\mathrm{d}S \\
&= \frac{k^2}{(4\pi)^2} \iint\limits_S \iint\limits_S \iint \hat{k}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{d}}\, T_\infty(kR;\hat{k}\cdot\hat{R})\,\mathrm{d}A_{\hat{k}} \times \vec{f}'_j\,\mathrm{d}S' \cdot (\vec{f}_i \times \hat{n})\,\mathrm{d}S,
\end{aligned}$$

wobei die Bezeichnungen gemäß der Beziehung (3.20) angewandt worden sind. Nach dem Vertauschen der Integrationsreihenfolge und Beachtung der Relation (3.20) gelangt man zu

$$\begin{aligned}
(\underline{T}^{\mathrm{FMM}})_{ij} = -\frac{k^2}{(4\pi)^2} \iint & \underbrace{T_\infty(kR;\hat{k}\cdot\hat{R})}_{T_{mm'}(\hat{k})} \\
& \underbrace{\hat{k} \times \iint\limits_{S_i} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_m} (\hat{n} \times \vec{f}_i)\,\mathrm{d}S}_{\boldsymbol{V}_{\hat{n}\times\vec{f}_i}(\hat{k})} \cdot \underbrace{\iint\limits_{S_j} \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_{m'}} (\underline{I} - \hat{k}\hat{k}) \cdot \vec{f}'_j)\,\mathrm{d}S'}_{\boldsymbol{V}_{\vec{f}'_j}(\hat{k})}\,\mathrm{d}A_{\hat{k}}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Die Anwendung dieser Darstellung zur Bildung des Matrix-Vektor-Produktes erfolgt völlig analog zur obigen Darstellung für die elektrische Feldintegralgleichung. Es ist nur zu beachten, daß nunmehr zwei unabhängige vektorielle Größen $\boldsymbol{V}_j^{\hat{k}}$ und $\boldsymbol{V}_i^{\hat{n}}$ zu betrachten sind. Hierbei besteht die komplexe vektorielle Größe $\boldsymbol{V}_j^{\hat{k}}$ nur aus den beiden zu $\hat{k}$ orthogonalen Komponenten und wegen des Skalarproduktes werden mithin auch von $\boldsymbol{V}_i^{\hat{n}}$ nur diese beiden Komponenten benötigt.

3.3 Die kombinierte Feldintegralgleichung

Die kombinierte Feldintegralgleichung (CFIE)[4] geht aus der elektrischen Feldintegralgleichung (EFIE)[5] und der magnetischen Feldintegralgleichung (MFIE)[6] durch lineare Superposition beider hervor.[7] Der Vorteil liegt dabei im allgemeinen im Verschwinden der inneren Resonanzfrequenzen und im speziellen in einer Verbesserung der Konvergenz von iterativen Gleichungssystemlösern.

[4]CFIE = combined field integral equation.
[5]EFIE = electric field integral equation.
[6]MFIE = magnetic field integral equation.
[7]Siehe [21].

In diesem Sinne werden die Matrizengleichungen (3.3) und (3.26) zu

$$\underbrace{\left(-\frac{4\pi\alpha}{\mathrm{j}kZ_F}\underline{Z} + \frac{4\pi(1-\alpha)}{\mathrm{j}k}\underline{T}\right)}_{\underline{C}} \cdot \underline{J} = -\frac{4\pi\alpha}{\mathrm{j}kZ_F}\underline{U} + \frac{4\pi(1-\alpha)}{\mathrm{j}k}\underline{V} \tag{3.35}$$

kombiniert. Hierbei bildet α einen Mischungsparameter, wobei $\alpha = 0$ auf die magnetische und $\alpha = 1$ auf die elektrische Feldintegralgleichung führt. Im Falle der kombinierten Feldintegralgleichung hat sich $\alpha = 0{,}2$ besonders bewährt. Die Faktoren sind so gewählt, daß sich die physikalischen Einheiten angleichen und die Frequenzabhängigkeit reduziert wird. Das Vorzeichen ist für die Konvergenz der Schnellen Multipolmethode von entscheidender Bedeutung.

Der Nahbereichsteil der Matrix $\underline{C} = \underline{C}^{\mathrm{MoM}} + \underline{C}^{\mathrm{FMM}}$ ergibt sich direkt zu

$$\underline{C}^{\mathrm{MoM}} = -\frac{4\pi\alpha}{\mathrm{j}kZ_F}\underline{Z}^{\mathrm{MoM}} + \frac{4\pi(1-\alpha)}{\mathrm{j}k}\underline{T}^{\mathrm{MoM}},$$

wobei der Nahbereich so zu wählen ist, daß auch alle Beiträge des freien Gliedes der magnetischen Integralgleichung hierin enthalten sind. Der Beitrag des Fernbereichs ergibt sich mit der Schnellen Multipolmethode durch Umordnen der Gleichungen (3.21) und (3.34) zu

$$\begin{aligned}(\underline{C}^{\mathrm{FMM}})_{ij} = \iint \underbrace{T_\infty(kR;\hat{k}\cdot\hat{R})}_{T_{mm'}(\hat{k})} & \\ \underbrace{\left(-\frac{\mathrm{j}k\alpha}{4\pi}\iint\limits_{S_i} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_m}(\underline{I}-\hat{k}\hat{k})\cdot\vec{f}_i\,\mathrm{d}S + \frac{\mathrm{j}k(1-\alpha)}{4\pi}\iint\limits_{S_i}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_m}(\hat{n}\times\vec{f}_i)\,\mathrm{d}S\times\hat{k}\right)}_{\boldsymbol{V}_i(\hat{k})} & \\ \cdot \underbrace{\iint\limits_{S_j}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}'_m}\vec{f}'_j\,\mathrm{d}S'}_{\boldsymbol{V}'_j(\hat{k})=\boldsymbol{V}_{\vec{f}'_j}(\hat{k})}\,\mathrm{d}A_{\hat{k}}. &\end{aligned} \tag{3.36}$$

Ein Vergleich mit dem Ansatz der magnetischen Feldintegralgleichung zeigt, daß der Speicheraufwand für die Anwendung der kombinierten Feldintegralgleichung der gleiche ist.

3.4 Bestimmung der Fernfeldgrößen

Ein wichtiges Merkmal für passive Streukörper stellt der Streuquerschnitt (RCS)[8] dar. Dessen Definition geht von einem Sender aus, der einen Raumwinkel Ω_s mit einer Sendeleistung von P_s ausleuchtet und somit am Ort des Streukörpers in einer Entfernung r vom Sender eine Leistungsdichte von

$$S^{\mathrm{inc}} = \frac{P_s}{4\pi r^2}\frac{4\pi}{\Omega_s}$$

erzeugt. Besitzt nun ein verlustloser Streukörper eine Querschnittsfläche von σ, so streut dieser nach der Näherung der geometrischen Optik insgesamt eine Leistung von

$$P_r = \sigma S^{\mathrm{inc}}$$

[8] RCS = Radar Cross Section.

in den Raum zurück. Am Ort des Empfängers im Abstand r ergibt sich dann bei einer gleichmäßigen Streuung in den Raumwinkel Ω_r eine Leistungsdichte der Streustrahlung von

$$S_r = \frac{\sigma S^{\text{inc}}}{4\pi r^2} \frac{4\pi}{\Omega_r}.$$

Bei isotroper Streuung, also $\Omega_r = 4\pi$, ergibt sich daraus als Rückschluß auf den Querschnitt des Streukörpers unter Fernfeldbedingungen

$$\sigma = \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \frac{S_r}{S^{\text{inc}}}.$$

Daraus folgt dann für den Streuquerschnitt:

$$\sigma = \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \frac{|\boldsymbol{E}^{\text{ref}}|^2}{|\boldsymbol{E}^{\text{inc}}|^2}. \tag{3.37}$$

Hierbei steht $\boldsymbol{E}^{\text{ref}}$ für die betrachtete elektrische Feldstärke des Streufeldes in Referenzpolarisation am Orte des Empfängers und $\boldsymbol{E}^{\text{inc}}$ für die betrachtete elektrische Feldstärke des einfallenden Feldes am Orte des Streukörpers.

Zusätzlich wird der Streuquerschnitt nach monostatisch und bistatisch unterschieden. Vom monostatischen Fall spricht man, falls sich die Sende- und Empfangsantenne in der Meßanordnung an der gleichen Stelle befinden. Eine Richtungsangabe betrifft hierbei immer sowohl die Sende- als auch die Empfangsantenne. Im bistatischen Fall hingegen befinden sich die Sende- und Empfangsantenne an unterschiedlichen Orten. Somit kommt es hierbei auch auf die Relativposition beider Antennen zueinander an.

3.4.1 Das Fernfeld der magnetischen Flächenstromdichte

Die elektrische Feldstärke verursacht durch eine magnetische Flächenstromdichte auf einer Quellfläche A ergibt sich zunächst aus der Greenschen Dyade (2.9) zu

$$\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{M}_s\}(\vec{r}) = -\iint\limits_A \operatorname{grad}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \times \boldsymbol{M}_s(\vec{r}')\,\mathrm{d}A'.$$

Mit der geometrischen Näherung

$$|\vec{r}-\vec{r}'| \approx r - \hat{r}\cdot\vec{r}' \tag{3.38}$$

und der allgemeinen Beziehung

$$\operatorname{grad}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r} = -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\left(\frac{1}{r}+\mathrm{j}k\right)\hat{r} \tag{3.39}$$

ergibt sich dann nach Vernachlässigung der Terme der Ordnung $O(r^{-2})$ direkt die Fernfeldnäherung der elektrischen Feldstärke zu:

$$\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{M}_s\}(\vec{r})|_{r\to\infty} = \mathrm{j}k\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\hat{r} \times \iint\limits_A \boldsymbol{M}_s(\vec{r}')\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k\hat{r}\cdot\vec{r}'}\,\mathrm{d}A'. \tag{3.40}$$

3.4.2 Das Fernfeld der elektrischen Flächenstromdichte

Die elektrische Feldstärke verursacht durch eine elektrische Flächenstromdichte auf einer Quellfläche A ergibt sich zunächst aus der Greenschen Dyade (2.5) und der Greenschen Funktion (2.7) zu

$$\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{J}_s\}(\vec{r}) = -\mathrm{j}\omega \iint\limits_A \mu \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\boldsymbol{J}_s(\vec{r}')\,\mathrm{d}A' + \operatorname{grad}\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu}\iint\limits_A \mu \operatorname{grad}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\boldsymbol{J}_s(\vec{r}')\,\mathrm{d}A'.$$

Durch Anwendung der geometrischen Näherung (3.38) und der Nutzung von Gleichung (3.39) unter Vernachlässigung der Terme der Ordnung $O(r^{-2})$ ergibt sich dann nach Nutzung des Entwicklungssatzes

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) \tag{3.41}$$

die Fernfeldnäherung der elektrischen Feldstärke zu:

$$\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{J}_s\}(\vec{r})|_{r\to\infty} = \mathrm{j}\omega\mu\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\hat{r} \times \left(\hat{r} \times \iint\limits_A \boldsymbol{J}_s(\vec{r}')\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k\hat{r}\cdot\vec{r}'}\,\mathrm{d}A'\right). \tag{3.42}$$

3.5 Die mehrstufige Schnelle Multipolmethode (MLFMM)

Um die Komplexität und den Speicherbedarf weiter zu reduzieren, wird im folgenden die mehrstufige Schnelle Multipolmethode eingeführt. Hierzu werden zunächst die Basisfunktionen wie zuvor in Gruppen mit einem Durchmesser in der Größenordnung von einer Wellenlänge zusammengefaßt. Auf der nächsthöheren Stufe bildet man aus der Zusammenfassung benachbarter Gruppen neue, größere Elterngruppen. Dies wird rekursiv fortgesetzt, bis auf der nächst höheren Stufe keine Fernkopplungen mehr möglich wären, da alle Gruppen benachbart lägen. Als fern werden hierbei gemäß Gyure und Stalzer [13] alle Gruppen m und m' der Stufe l betrachtet für die

$$kR_{mm'} \geq L_l \tag{3.43}$$

erfüllt ist. Die Unterscheidung zwischen nah und fern ist jeweils nur zwischen Gruppen zu treffen, deren Elterngruppen benachbart liegen. Für die oberste Stufe wird letzteres bezüglich aller ihrer Gruppen angenommen.

Die Quellvektoren $\boldsymbol{V}_i(\hat{k})$ und $\boldsymbol{V}'_j(\hat{k})$ sind gleichfalls wie zuvor vorab zu berechnen. Der Verschiebungsoperator $T^l_{L_l}(kR;\hat{k}\cdot\hat{R})$ ist jetzt für jede Stufe l vorab zu bestimmen. Hierbei ist zu beachten, daß die notwendige Anzahl L_l an Multipolen und somit auch die der Fernfeldrichtungen K_l auf einer Stufe l mit der Zunahme des Gruppendurchmessers steigt, sofern man eine fest vorgegebene Genauigkeit ansetzt.

Aus diesen Ausführungen ergibt sich das folgende Schema zur Berechnung des Matrix-Vektor-Produkts $\underline{C}^{\mathrm{MLFMM}} \cdot \underline{J}$ bei N Basisfunktionen:

1. Zunächst sind die vektoriellen Werte

$$\boldsymbol{s}_{m_1}(\hat{k}) = \sum_{\alpha} \boldsymbol{V}'_{j(m_1;\alpha)}(\hat{k}_1)J_{j(m_1;\alpha)} \tag{3.44}$$

für die Fernbereichswirkung der einzelnen Gruppen auf der ersten Stufe zu bestimmen. Die Summation erfolgt jeweils über die Gruppenmitglieder der ersten Stufe, wobei alle Gruppen fortlaufend numeriert werden.

2. Als nächstes durchläuft man alle Stufen aufwärts bzw. die Baumstruktur abwärts, um die Quellterme $\boldsymbol{s}_{m_l}(\hat{k})$ auf allen Stufen l zu bestimmen. Sei m_{l-1} die Untergruppe von m_l so gilt für jedes m_{l-1}
$$\boldsymbol{s}_{m_l}(\hat{k}_l) = \boldsymbol{s}_{m_l}(\hat{k}_l) + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_l \cdot \vec{R}_{m_l m_{l-1}}} \mathrm{Itpl}(\boldsymbol{s}_{m_{l-1}}(\hat{k}_{l-1}), \hat{k}_l),$$
wobei $\mathrm{Itpl}(\boldsymbol{s}_{m_{l-1}}(\hat{k}_{l-1}), \hat{k}_l)$ für die Interpolation der Wellenvektorrichtungen steht, da deren Anzahl auf den verschiedenen Stufen unterschiedlich ist.

3. Anschließend ist auf jeder Stufe l die Rückwirkung der anderen Fernbereichsgruppen dieser Stufe auf jede Gruppe derselben Stufe zu bestimmen:
$$\boldsymbol{g}_{m_l}(\hat{k}) = \sum_{m'_l} T^l_{m_l m'_l}(\hat{k}) \boldsymbol{s}_{m'_l}(\hat{k}). \tag{3.45}$$
Es sei darauf hingewiesen, daß nur diejenigen Gruppen im Fernbereich sind, deren Elterngruppen nahe zueinander liegen.

4. Nun werden die Stufen wieder abwärts bzw. die Baumstruktur aufwärts durchlaufen, um zur ersten Stufe zurück zu gelangen. Sei m_l die Elterngruppe von m_{l-1} so gilt für jedes m_l
$$\boldsymbol{g}_{m_{l-1}}(\hat{k}_{l-1}) = \boldsymbol{g}_{m_{l-1}}(\hat{k}_{l-1}) + \mathrm{Atpl}(\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\vec{k}_l \cdot \vec{R}_{m_l m_{l-1}}} \boldsymbol{g}_{m_l}(\hat{k}_l), \hat{k}_{l-1}).$$
wobei Atpl für die Anterpolation der Wellenvektorrichtungen steht, um deren Anzahl auf den verschiedenen Stufen anzugleichen.

5. Abschließend wird das Integral über die Ausbreitungsrichtungen auf der ersten Stufe als gewichtete Summe approximiert:
$$(\underline{C}^{\mathrm{MLFMM}} \cdot \underline{J})_{i(m_1;\alpha)} = \sum_{\hat{k}_1} w(\hat{k}_1) \boldsymbol{V}_{i(m_1;\alpha)}(\hat{k}_1) \cdot \boldsymbol{g}_{m_1}(\hat{k}_1). \tag{3.46}$$

Um das vollständige Matrix-Vektor-Produkt $\underline{C} \cdot \underline{J}$ zu erhalten, ist abschließend noch der Nahbereichsanteil $\underline{C}^{\mathrm{MoM}} \cdot \underline{J}$ gemäß der Momentenmethode hinzu zu addieren.

Die Einordnung der Interpolation zur Erhöhung der Anzahl der Richtungen des Wellenvektors und der Anterpolation zu deren Reduzierung in das Stufenschema ist in der Abbildung 3.2 veranschaulicht. Insbesondere ist zu beachten, daß die Verschiebung immer auf der höheren Stufe also bei der größeren Anzahl an Raumrichtungen erfolgt. Dies ergibt sich daraus, daß gerade die Verschiebung eine höhere Anzahl an Multipolen und mithin an Raumrichtungen erfordert, da beim Verschieben der ursprünglich zulässige Darstellungsbereich verlassen werden könnte. Die Interpolation und Anterpolation zur Anpassung der Anzahl der Raumrichtungen benachbarter Stufen erfolgt getrennt nach φ und $\cos\vartheta$.

Für die φ-Richtung kommt die Schnelle Fouriertransformation zum Einsatz. Wegen der Periode von 2π in φ-Richtung ergibt das die optimale Lösung: Bei der Interpolation werden nach einer Vorwärtstransformation die höheren räumlichen Frequenzanteile einfach als null hinzugefügt, so daß man nach deren Rücktransformation eine größere Anzahl an interpolierten Werten erhält. Bei der Anterpolation werden die höheren räumlichen Frequenzanteile nach der Vorwärtstransformation einfach gestrichen, so daß die Rücktransformation eine geringere Anzahl an anterpolierten Werten liefert.

Für die $\cos\theta$-Richtung kommt eine Legendre-Entwicklung zum Einsatz. Hierzu wird eine Funktion $f(\cos\vartheta)$ durch
$$f(\cos\vartheta) = \sum_{l=0}^{L} a_l P_l(\cos\vartheta)$$

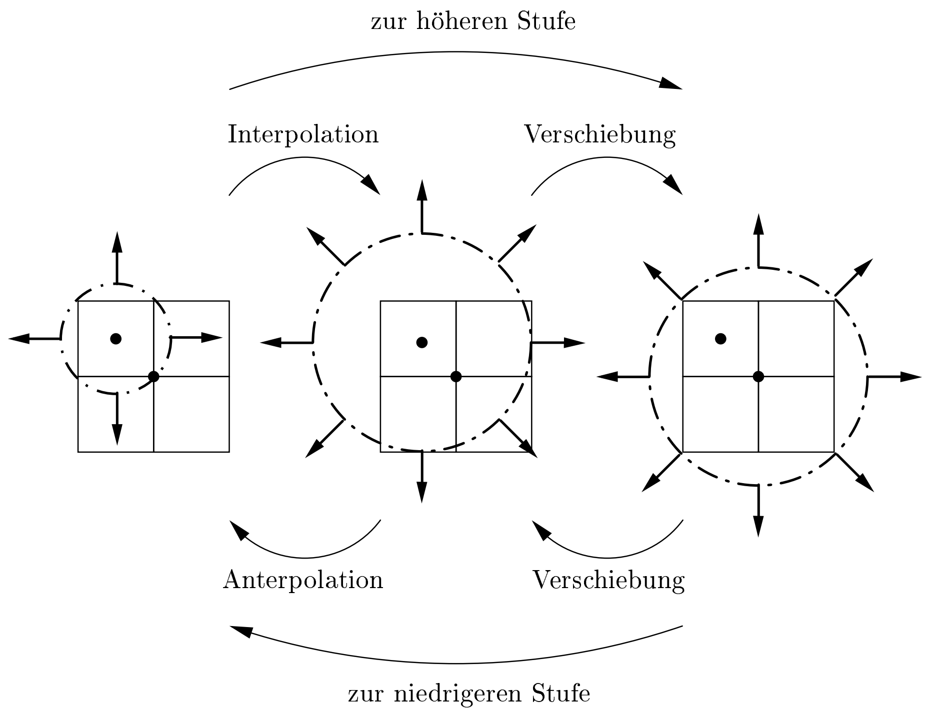

Abbildung 3.2: Vorgehensweise bei der Bewegung über die Stufendarstellung der mehrstufigen Schnellen Multipolmethode; die Verschiebung erfolgt immer bei der höheren Anzahl an Raumrichtungen, die für den größeren Darstellungsbereich erforderlich ist und mit der Anzahl der Multipole in der Felddarstellung korrespondiert.

als Reihe von Legendre-Polynomen dargestellt. Mit $L+1$ Abtastpunkten erhält man mithin eine vollständige Form bis zum Grade L:

$$\begin{pmatrix} f(\cos\vartheta_1) \\ \vdots \\ f(\cos\vartheta_{L+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0(\cos\vartheta_1) & \dots & P_L(\cos\vartheta_1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_0(\cos\vartheta_{L+1}) & \dots & P_L(\cos\vartheta_{L+1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_L \end{pmatrix} .$$

Ein Wechsel in der Anzahl der Abtastpunkte von $L+1$ Werten $\cos\vartheta_l$ nach $L'+1$ Werten von $\cos\vartheta_l'$ soll nun so erfolgen, daß die ersten Koeffizienten der Legendre-Darstellung unverändert bleiben. Hieraus ergibt sich das Rechenschema

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f(\cos\vartheta_1') \\ \vdots \\ f(\cos\vartheta_{L'+1}') \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} P_0(\cos\vartheta_1') & \dots & P_L(\cos\vartheta_1') \\ \vdots & & \vdots \\ P_0(\cos\vartheta_{L'+1}') & \dots & P_L(\cos\vartheta_{L'+1}') \end{pmatrix} \\ & \cdot \begin{pmatrix} P_0(\cos\vartheta_1) & \dots & P_L(\cos\vartheta_1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_0(\cos\vartheta_{L+1}) & \dots & P_L(\cos\vartheta_{L+1}) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(\cos\vartheta_1) \\ \vdots \\ f(\cos\vartheta_{L+1}) \end{pmatrix} , \end{aligned} \tag{3.47}$$

das sowohl für die Interpolation als auch für die Anterpolation gilt. Man beachte, daß die erste Matrix nicht mehr quadratisch ist. Zur Minimierung des Rechenaufwands ist die Reihenfolge von φ- und $\cos\vartheta$-Interpolation und -Anterpolation so zu wählen, daß die größere Datenmenge von der Schnellen Fouriertransformation verarbeitet wird.

3.6 Numerische Beispiele

Bevor die mehrstufige Schnelle Multipolmethode auf Aperturanordnungen erweitert wird, soll die vorangegangene Formulierung anhand einfacher Streuprobleme validiert werden. Hierzu dient eine ideal elektrisch leitende Kugel.

Im ersten Fall wird zunächst eine elektrisch kleine Kugel betrachtet, so daß ein Vergleich mit der Momentenmethode möglich ist. Die in der Abbildung 3.3 dargestellte Kugel besitzt einen Radius von 1 m und wird von einer ebenen elektromagnetischen Welle mit einer Frequenz von 143,14 MHz bestrahlt. Die Kugeloberfläche enthält 1695 Kanten was ebenso vielen Unbekannten entspricht. Für die mehrstufige Schnelle Multipolmethode ist die Kugel in 1161 Gruppen auf insgesamt drei Stufen unterteilt worden. In der Abbildung 3.4 ist der bistatische Streuquerschnitt dargestellt. Die Ergebnisse der mehrstufigen Schnellen Multipolmethode basierend auf der magnetischen und kombinierten Feldintegralgleichung stimmen gut mit der Lösung der reinen Momentenmethode überein. Das bikonjugierte Gradientenverfahren konvergiert jedoch nicht für die auf der elektrischen Feldintegralgleichung beruhenden Multipolmethode, da sich die schlechte Konditionierung des linearen Gleichungssystems hierbei durch den Vorkonditionierer nicht beheben läßt. Ferner ist das Konvergenzverhalten im Falle der kombinierten Feldintegralgleichung besser als im Falle der magnetischen.

Als zweites Beispiel wird eine elektrisch große Kugel betrachtet, die nicht mehr mit der Momentenmethode berechnet werden kann. Die in der Abbildung 3.5 dargestellte Kugel mit einem Radius von 1 m besteht aus 12.000 Kanten bzw. Unbekannten und ist für die mehrstufige Schnelle Multipolmethode in 778 Gruppen auf drei Stufen unterteilt. Die einfallende ebene elektromagnetische Welle besitzt eine Frequenz von 720 MHz. Der Speicherbedarf für die Momentenmethode würde hierfür bei zirka ein bis zwei Gigabyte liegen, wohingegen die Multipolmethode mit etwa 250 Megabyte auskommt. Als Ergebnis ist der bistatische Streuquerschnitt in der Abbildung 3.6 angegeben. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Formulierungen auf der Grundlage der elektrischen, magnetischen sowie kombinierten Feldintegralgleichung. Für die elektrische Feldintegralgleichung ergibt sich jedoch erneut ein mangelhaftes Konvergenzverhalten, wohingegen die kombinierte Feldintegralgleichung wieder eine bessere Konvergenz des bikonjugierten Gradientenverfahrens aufweist als die magnetische.

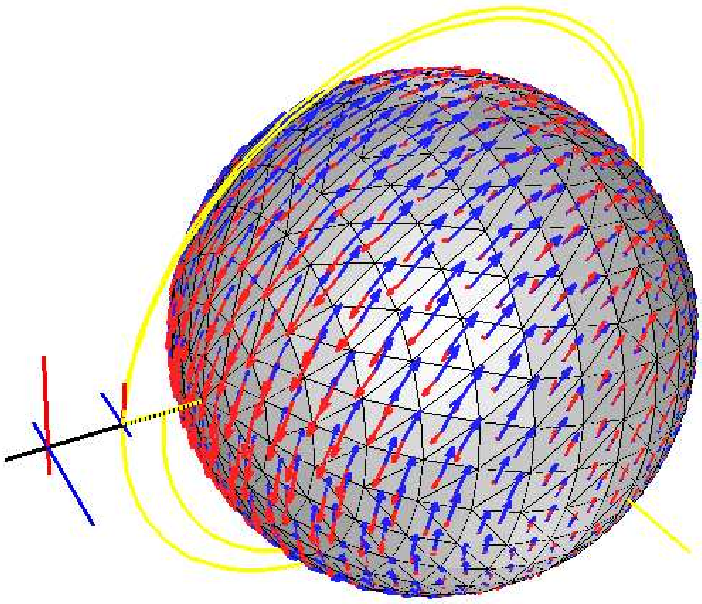

Abbildung 3.3: Kleine metallische Kugel zum Vergleich der mehrstufigen Schnellen Multipolmethode mit der Momentenmethode ($r = 1\,\mathrm{m}$, $f = 143{,}14\,\mathrm{MHz}$); dargestellt mit Real- und Imaginärteil der Oberflächenstromdichte sowie mit der Einfallsrichtung und der Empfangsebene.

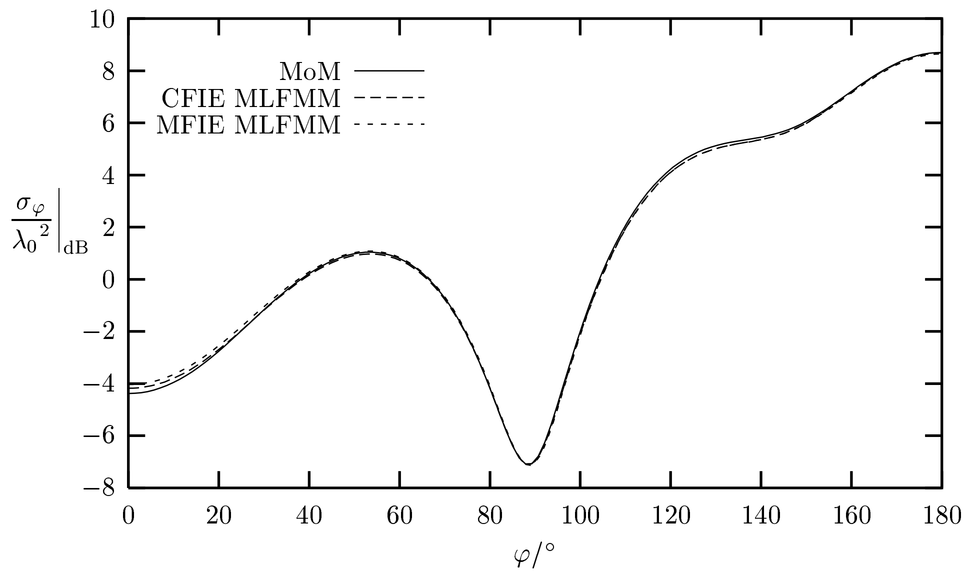

Abbildung 3.4: Bistatischer Streuquerschnitt der Referenzkomponente der kleinen Kugel aus der Abbildung 3.3; wechselseitiger Vergleich der Lösungen der mehrstufigen Schnellen Multipolmethode (MLFMM) auf der Grundlage der magnetischen (MFIE) und der kombinierten (CFIE) Feldintegralgleichung mit einer reinen Momentenmethodenlösung (MoM).

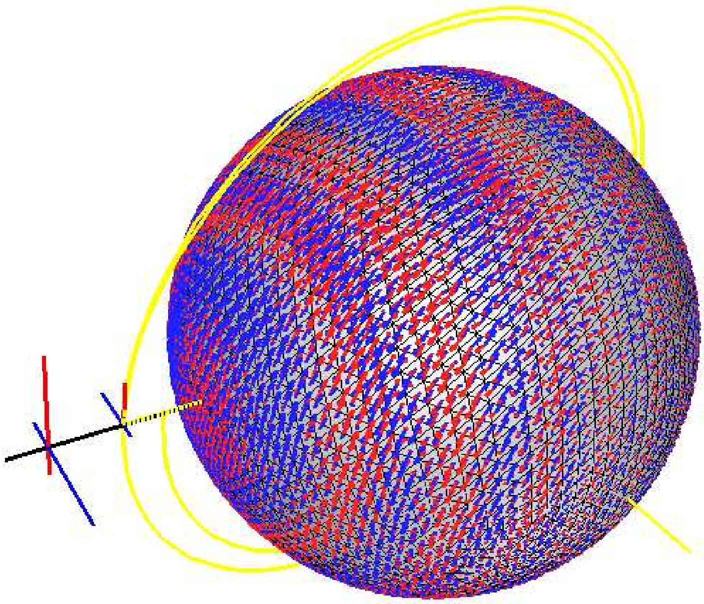

Abbildung 3.5: Große metallische Kugel als Streuproblem für die mehrstufige Schnelle Multipolmethode ($r = 1\,\mathrm{m}$, $f = 720\,\mathrm{MHz}$); dargestellt mit Real- und Imaginärteil der Oberflächenstromdichte sowie mit der Einfallsrichtung und der Empfangsebene.

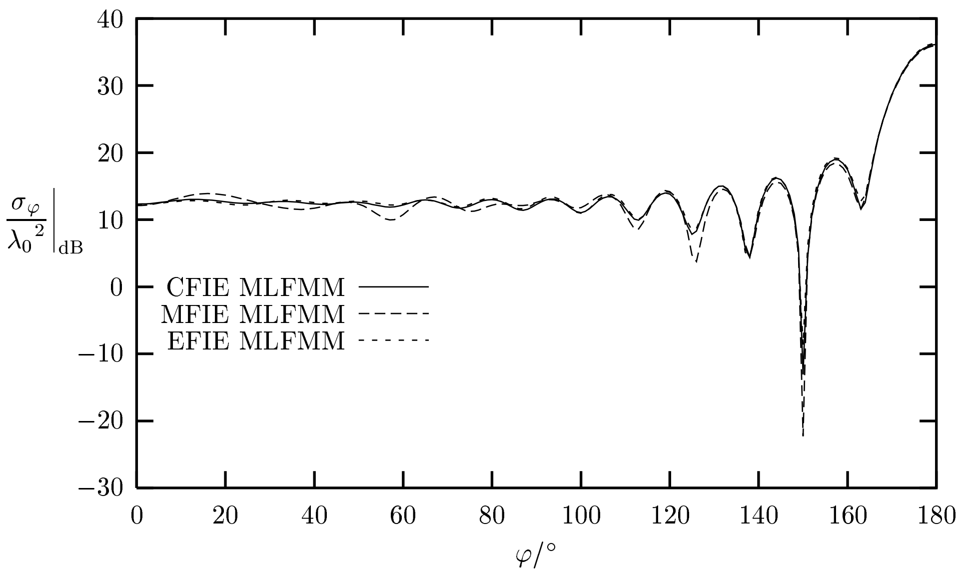

Abbildung 3.6: Bistatischer Streuquerschnitt der Referenzkomponente der großen Kugel aus der Abbildung 3.3; wechselseitiger Vergleich der Lösungen der mehrstufigen Schnellen Multipolmethode (MLFMM) auf der Grundlage der magnetischen (MFIE), der elektrischen (EFIE) und der kombinierten (CFIE) Feldintegralgleichung.

Kapitel 4

Anwendung der Schnellen Multipolmethode auf Hornstrahleranordnungen

Nachdem die Grundlagen der Schnellen Multipolmethode anhand des Streuproblems dargelegt worden sind, erfolgt nun die Übertragung auf Hornstrahleranordnungen. Hierzu werden die vorangegangenen Ausführungen im wesentlichen um die magnetische Flächenstromdichte $\boldsymbol{M}_s$ auf den Aperturflächen ergänzt. Nach der Darstellung dieser Modifikationen der Feldintegralgleichungen wird die erforderliche Impedanzbeziehung der Hohlleiteraperturen samt Anregungsterm aufgezeigt.

4.1 Die elektrische Feldintegralgleichung

Führt man auf einen ideal elektrisch leitenden Körper Aperturen ein, so kann man diese gemäß dem Äquivalenzprinzip mittels magnetischer Flächenstromdichten $\boldsymbol{M}_s$ in den Aperturflächen darstellen. Die elektrische Feldintegralgleichung (3.1) wird dann zu

$$\boldsymbol{M}_s + \hat{n} \times \boldsymbol{E}^J\{\boldsymbol{J}_s\} + \hat{n} \times \boldsymbol{E}^M\{\boldsymbol{M}_s\} = -\hat{n} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}. \tag{4.1}$$

Die elektrische Oberflächenstromdichte $\boldsymbol{J}_s$ wird weiterhin mit dem Summenansatz (3.2) dargestellt. Für die magnetische Oberflächenstromdichte wird der Summenansatz

$$\boldsymbol{M}_s(\vec{r} \in S_{\mathrm{Ap}}) \approx \sum_{i_{\mathrm{Ap}}} b_i \vec{g}_i(\vec{r}) \tag{4.2}$$

verwendet, wobei

$$\vec{g}_i = \boldsymbol{e}_i \times \hat{n} \tag{4.3}$$

als magnetischer Flächenstrom der i-ten rücklaufenden Hohlleiterwelle mit der transversalen elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{e}_i$ definiert worden ist. Die Normierung ist so durchgeführt, daß die i-te Welle bei $b_i = 1\sqrt{\mathrm{W}}$ gerade 0,5W an Leistung transportiert.

Diese elektrische Feldintegralgleichung wird nun einerseits mit $\hat{n} \times \vec{f}_i$ skalarmultipliziert und über den jeweiligen Träger der Basisfunktion integriert und andererseits mit $\vec{g}_i$ skalarmultipliziert und über die betreffende Aperturfläche integriert. Hieraus folgt das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{T}_1 \\ \underline{Z}_2 & \underline{T}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{J} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

mit

$$(\underline{Z}_1)_{ij} = \iint\limits_S \vec{f}_i \cdot \boldsymbol{E}^J\{\vec{f}_j'\}\,\mathrm{d}S, \tag{4.5}$$

$$(\underline{T}_1)_{ij} = -\iint\limits_S \vec{f}_i \cdot \boldsymbol{e}_j\,\mathrm{d}S + \iint\limits_S \vec{f}_i \cdot \boldsymbol{E}^M\{\vec{g}_j'\}\,\mathrm{d}S, \tag{4.6}$$

$$(\underline{Z}_2)_{ij} = -\iint\limits_{S_{\mathrm{Ap}}} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{E}^J\{\vec{f}_j'\}\,\mathrm{d}S, \tag{4.7}$$

$$(\underline{T}_2)_{ij} = \iint\limits_{S_{\mathrm{Ap}}} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j\,\mathrm{d}S - \iint\limits_{S_{\mathrm{Ap}}} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{E}^M\{\vec{g}_j'\}\,\mathrm{d}S, \tag{4.8}$$

$$(\underline{U}_1)_i = -\iint\limits_S \vec{f}_i \cdot \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}\,\mathrm{d}S, \tag{4.9}$$

$$(\underline{U}_2)_i = \iint\limits_{S_{\mathrm{Ap}}} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}\,\mathrm{d}S. \tag{4.10}$$

Die Matrix $\underline{Z}_1$ ist identisch mit der Matrix $\underline{Z}$ in der Gleichung (3.3) und wird genauso behandelt. Für die Elemente der Matrix $\underline{Z}_2$ ergibt sich in analoger Weise zu (3.15) die Mischpotentialform

$$\begin{aligned}(\underline{Z}_2)_{ij} = +\mathrm{j}\omega \iint\limits_{S_{\mathrm{Ap}}} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{A}_J\{\vec{f}_j'\}\,\mathrm{d}S + \frac{1}{\mathrm{j}\omega} \iint\limits_{S_{\mathrm{Ap}}} (\mathrm{div}_s\,\boldsymbol{e}_i)\,\phi_J\left\{\mathrm{div}_s{}'\,\vec{f}_j'\right\}\,\mathrm{d}S \\ - \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_n \oint\limits_{\partial S_{\mathrm{Ap}n}} \left(\boldsymbol{e}_i\phi_J\left\{\mathrm{div}_s{}'\,\vec{f}_j'\right\}\right)\cdot\hat{u}\,\mathrm{d}l.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Man beachte hierbei insbesondere das aus dem Divergenzsatz folgende Randintegral. Der Einheitsvektor $\hat{u}$ stellt den in der Integrationsfläche liegenden äußeren Normalenvektor des Integrationsgebietes dar; der Integrationsweg berandet jeweils einen Stetigkeitsbereich des Integranden. Bei $\underline{Z}_1$ entfällt dieses Linienintegral wegen der Stetigkeit der Rao-Wilton-Glisson-Basisfunktionen in Normalenrichtung.

Im Rahmen der Schnellen Multipolmethode wird die Matrix $\underline{Z}_2$ erneut gemäß

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_2^{\mathrm{MoM}} + \underline{Z}_2^{\mathrm{FMM}} \tag{4.12}$$

aufgeteilt. Der Nahbereichsanteil $\underline{Z}_2^{\mathrm{MoM}}$ wird direkt gemäß (4.11) bestimmt, wobei jeweils nur über die Nahgruppen integriert wird. Für den Fernbereichsanteil $\underline{Z}_2^{\mathrm{FMM}}$ ergibt sich mit der Schnellen Multipolmethode die Darstellung

$$\begin{aligned}(\underline{Z}_2^{\mathrm{FMM}})_{ij} = -\mathrm{j}k\frac{Z_F}{4\pi}\frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\sum_m \iint \underbrace{T_\infty(kR;\hat{k}\cdot\hat{R})}_{T_{mm'}(\hat{k})} \underbrace{\iint\limits_{S_i} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_m}(\underline{I}-\hat{k}\hat{k})\cdot\boldsymbol{e}_{im}\,\mathrm{d}S}_{\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{e}_{im}}(\hat{k})} \\ \cdot \underbrace{\iint\limits_{S_j} \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_{m'}}(\underline{I}-\hat{k}\hat{k})\cdot\vec{f}_j'\,\mathrm{d}S'}_{\boldsymbol{V}_{\vec{f}_j'}(\hat{k})}\,\mathrm{d}A_{\hat{k}}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Die Herleitung verläuft unter Beachtung der Vorzeichen analog zum Streuproblem. Es ist nur zu beachten, daß die Apertur und mithin die transversale elektrische Feldstärke im Hohlleiter gemäß

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_m \boldsymbol{e}_{im} \tag{4.14}$$

in einzelne Gruppen aufgeteilt worden ist.

Die Matrix $\underline{T}_1$ wird ebenso in einen Nah- und einen Fernanteil zerlegt:

$$\underline{T}_1 = \underline{T}_1^{\mathrm{MoM}} + \underline{T}_1^{\mathrm{FMM}}. \tag{4.15}$$

Der Nahanteil $\underline{T}_1^{\mathrm{MoM}}$ ergibt sich unmittelbar durch Ausführen der Integrationen in der Darstellung (4.6) bezüglich der Nahgruppen, sofern man die Singularität gemäß

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{f}_i \cdot \boldsymbol{E}^M\{\vec{g}_j'\}\,\mathrm{d}S &= -\frac{1}{4\pi}\iint_S \iint_S \left(\operatorname{grad}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \times \vec{g}_j'\,\mathrm{d}S' \cdot \vec{f}_i\,\mathrm{d}S \\ &= -\frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\iint\!\!\!\!\!\!-_S \left(\operatorname{grad}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \times \vec{g}_j'\,\mathrm{d}S' - \frac{4\pi}{2}\hat{n}\times\vec{g}_j\right] \cdot \vec{f}_i\,\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{4.16}$$

behandelt. Der Fernanteil ergibt sich ähnlich wie im Falle der Streuprobleme zu

$$\begin{aligned}(\underline{T}_1^{\mathrm{FMM}})_{ij} = -\frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\sum_{m'}\iint \underbrace{T_\infty(kR;\hat{k}\cdot\hat{R})}_{T_{mm'}(\hat{k})} \underbrace{\iint_{S_i} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_m}(\underline{I}-\hat{k}\hat{k})\cdot\vec{f}_i\,\mathrm{d}S}_{\boldsymbol{V}_{\vec{f}_i}(\hat{k})} \\ \cdot \underbrace{\iint_{S_j} \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_{m'}}(\vec{k}\times\vec{g}_{jm'}')\,\mathrm{d}S'}_{\boldsymbol{V}_{\vec{g}_{jm'}'}(\hat{k})}\,\mathrm{d}A_{\hat{k}},\end{aligned} \tag{4.17}$$

sofern man die gruppenweise Aufteilung der magnetischen Oberflächenstromdichte gemäß

$$\vec{g}_j = \sum_{m'} \vec{g}_{jm'} \tag{4.18}$$

beachtet.

Die Matrix $\underline{T}_2$ wird ebenfalls über

$$\underline{T}_2 = \underline{T}_2^{\mathrm{MoM}} + \underline{T}_2^{\mathrm{FFM}} \tag{4.19}$$

in einen Nah- und Fernanteil zerlegt, wobei sich der Nahanteil $\underline{T}_2^{\mathrm{MoM}}$ aus direkter Berechnung der Gleichung (4.8) ergibt, wobei die Singularität gemäß

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{g}_i \cdot (\hat{n}\times\boldsymbol{E}^M\{\vec{g}_j'\})\,\mathrm{d}S &= +\frac{1}{4\pi}\iint_S \iint_S \left(\operatorname{grad}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \times \vec{g}_j'\,\mathrm{d}S' \cdot \boldsymbol{e}_i\,\mathrm{d}S \\ &= +\frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\iint\!\!\!\!\!\!-_S \left(\operatorname{grad}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \times \vec{g}_j'\,\mathrm{d}S' - \frac{4\pi}{2}\hat{n}\times\vec{g}_j\right] \cdot \boldsymbol{e}_i\,\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{4.20}$$

zu behandeln ist. Für den Fernanteil folgt ähnlich wie zuvor

$$(\underline{T}_2^{\mathrm{FMM}})_{ij} = +\frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\sum_{mm'}\iint \underbrace{T_\infty(kR;\hat{k}\cdot\hat{R})}_{T_{mm'}(\hat{k})} \underbrace{\iint_{S_i} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_m}(\underline{I}-\hat{k}\hat{k})\cdot\boldsymbol{e}_{im}\,\mathrm{d}S}_{\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{e}_{im}}(\hat{k})}$$
$$\cdot \underbrace{\iint_{S_j} \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_{m'}}(\vec{k}\times\vec{g}'_{jm'})\,\mathrm{d}S'}_{\boldsymbol{V}_{\vec{g}'_{jm'}}(\hat{k})}\;\mathrm{d}A_{\hat{k}}. \quad (4.21)$$

Die Anregungsterme (4.9) und (4.10) ergeben sich direkt durch numerische Integration aus dem von außen einfallenden elektrischen Feld. Zur vollständigen physikalischen Problembeschreibung ist noch eine Impedanzbeziehung zwischen der elektrischen und der magnetischen Oberflächenstromdichte auf der Apertur zu formulieren. Dieses wird später zusammen mit der modalen Anregung erläutert.

4.2 Die magnetische Feldintegralgleichung

Die magnetische Feldintegralgleichung ergibt sich auf der Oberfläche eines ideal elektrisch leitenden Körpers mit Aperturen zu

$$\boldsymbol{J}_s - \hat{n}\times\boldsymbol{H}^J\{\boldsymbol{J}_s\} - \hat{n}\times\boldsymbol{H}^M\{\boldsymbol{M}_s\} = \hat{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}. \quad (4.22)$$

Setzt man die Summenansätze (3.2) und (4.2) ein und skalarmultipliziert man diese vektorielle Gleichung mit $\vec{f}_i$ und integriert über die gesamte Oberfläche und skalarmultipliziert man diese auch noch mit $\hat{n}\times\vec{g}_i$ und integriert über die Aperturflächen, so erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \underline{T}_3 & \underline{Y}_1 \\ \underline{T}_4 & \underline{Y}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{J} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

mit

$$(\underline{T}_3)_{ij} = \iint_S \vec{f}_i\cdot\vec{f}_j\,\mathrm{d}S + \iint_S (\hat{n}\times\vec{f}_i)\cdot\boldsymbol{H}^J\{\vec{f}_j\}\,\mathrm{d}S, \quad (4.24)$$

$$(\underline{Y}_1)_{ij} = \iint_S (\hat{n}\times\vec{f}_i)\cdot\boldsymbol{H}^M\{\vec{g}'_j\}\,\mathrm{d}S, \quad (4.25)$$

$$(\underline{T}_4)_{ij} = \iint_{S_{\mathrm{Ap}}} \boldsymbol{e}_i\cdot\vec{f}_j\,\mathrm{d}S + \iint_{S_{\mathrm{Ap}}} (\hat{n}\times\boldsymbol{e}_i)\cdot\boldsymbol{H}^J\{\vec{f}_j\}\,\mathrm{d}S, \quad (4.26)$$

$$(\underline{Y}_2)_{ij} = \iint_{S_{\mathrm{Ap}}} (\hat{n}\times\boldsymbol{e}_i)\cdot\boldsymbol{H}^M\{\vec{g}'_j\}\,\mathrm{d}S, \quad (4.27)$$

$$(\underline{V}_1)_i = -\iint_S (\hat{n}\times\vec{f}_i)\cdot\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}\,\mathrm{d}S, \quad (4.28)$$

$$(\underline{V}_2)_i = -\iint_{S_{\mathrm{Ap}}} (\hat{n}\times\boldsymbol{e}_i)\cdot\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}\,\mathrm{d}S. \quad (4.29)$$

Die Matrix $\underline{T}_3$ ist identisch der Matrix (3.27), so daß eine nähere Erläuterung an dieser Stelle entfallen kann. Die Matrix $\underline{T}_4$ wird dem FMM-Formalismus folgend über

$$\underline{T}_4 = \underline{T}_4^{\mathrm{MoM}} + \underline{T}_4^{\mathrm{FMM}} \tag{4.30}$$

in einen Nah- und Fernanteil zerlegt. Die Elementbeiträge der Nahbereichsmatrix $\underline{T}_4^{\mathrm{MoM}}$ ergeben sich durch numerische Integration, sofern man die Singularität gemäß

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S_{\mathrm{Ap}}} (\hat{n} \times \boldsymbol{e}_i) \cdot (\hat{n} \times \boldsymbol{H}^J\{\vec{f}_j'\})\,\mathrm{d}S &= +\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_{\mathrm{Ap}}} \iint\limits_{S} \left(\operatorname{grad} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \times \vec{f}_j'\,\mathrm{d}S' \cdot (\hat{n} \times \boldsymbol{e}_i)\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_{\mathrm{Ap}}} \left[⨏\!\!\!\!⨏_{S} \left(\operatorname{grad} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \times \vec{f}_j'\,\mathrm{d}S' - \frac{4\pi}{2} \hat{n} \times \vec{f}_j \right] \cdot (\hat{n} \times \boldsymbol{e}_i)\,\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{4.31}$$

behandelt. Der Fernanteil ergibt sich ähnlich wie bei den Streuproblemen zu

$$\begin{aligned}(\underline{T}_4^{\mathrm{FMM}})_{ij} = +\frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\frac{\mathrm{j}k}{4\pi} \sum_m \iint \underbrace{T_\infty(kR; \hat{k}\cdot\hat{R})}_{T_{mm'}(\hat{k})} \underbrace{\iint\limits_{S_{im}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_m} (\hat{n} \times \boldsymbol{e}_{im})\,\mathrm{d}S \times \hat{k}}_{\boldsymbol{V}_{\hat{n}\times\boldsymbol{e}_{im}}(\hat{k})} \\ \cdot \underbrace{\iint\limits_{S_j} \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_{m'}} (\underline{I} - \hat{k}\hat{k}) \cdot \vec{f}_j'\,\mathrm{d}S'}_{\boldsymbol{V}_{\vec{f}_j'}(\hat{k})}\,\mathrm{d}A_{\hat{k}}.\end{aligned} \tag{4.32}$$

Die Elemente der Matrix $\underline{Y}_1$ ergeben sich mit dem Mischpotentialansatz zu

$$\begin{aligned}(\underline{Y}_1)_{ij} =& -\frac{\mathrm{j}k}{4\pi Z_F} \iint\limits_{S} \iint\limits_{S_{\mathrm{Ap}}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{g}_j'\mathrm{d}S' \cdot (\hat{n} \times \vec{f}_i)\mathrm{d}S \\ &- \frac{1}{4\pi\mathrm{j}kZ_F} \iint\limits_{S} \operatorname{div}_s(\hat{n} \times \vec{f}_j) \iint\limits_{S_{\mathrm{Ap}}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \operatorname{div}_s{}' \vec{g}_j'\mathrm{d}S'\mathrm{d}S \\ &+ \frac{1}{4\pi\mathrm{j}kZ_F} \iint\limits_{S} \operatorname{div}_s \left((\hat{n} \times \vec{f}_i) \iint\limits_{S_{\mathrm{Ap}}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \operatorname{div}_s{}' \vec{g}_j'\mathrm{d}S' \right) \mathrm{d}S \\ =& -\frac{\mathrm{j}k}{4\pi Z_F} \iint\limits_{S} (\hat{n} \times \vec{f}_i) \cdot \iint\limits_{S_{\mathrm{Ap}}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} (\boldsymbol{e}_j' \times \hat{n}')\mathrm{d}S'\mathrm{d}S \\ &+ \frac{1}{4\pi\mathrm{j}kZ_F} \sum_n \oint\limits_{\partial S_n} (\hat{n} \times \vec{f}_i) \iint\limits_{S_{\mathrm{Ap}}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \hat{n} \cdot \operatorname{rot}_s{}' \boldsymbol{e}_j'\mathrm{d}S' \cdot \hat{u}\mathrm{d}l.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Hierbei ist beachtet worden, daß die Rotation der Rao-Wilton-Glisson-Basisfunktionen verschwindet. Im Rahmen des FMM-Formalismus wird diese Matrix erneut gemäß

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_1^{\mathrm{MoM}} + \underline{Y}_1^{\mathrm{FMM}} \tag{4.34}$$

in einen Nah- und Fernanteil aufgespalten. Der Nahanteil wird wie soeben dargestellt behandelt, wobei zu beachten ist, daß nur noch über die Nahgruppen der Apertur zu integrieren ist. Für den

Fernanteil $\underline{Y}_1^{\mathrm{FMM}}$ erhält man

$$(\underline{Y}_1^{\mathrm{FMM}})_{ij} = \frac{\mathrm{j}k}{4\pi Z_F}\frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\sum_{m'}\iint \underbrace{T_\infty(kR;\hat{k}\cdot\hat{R})}_{T_{mm'}(\hat{k})}\underbrace{\hat{k}\times\iint_{S_i}(\hat{n}\times\vec{f}_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_m}\mathrm{d}S}_{\boldsymbol{V}_{\hat{n}\times\vec{f}_i}(\hat{k})}$$
$$\cdot\underbrace{\iint_{S_{jm'}}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_{m'}}(\vec{k}\times\vec{g}'_{jm'})\,\mathrm{d}S'}_{\boldsymbol{V}_{\vec{g}'_{jm'}}(\hat{k})}\,\mathrm{d}A_{\hat{k}}. \quad (4.35)$$

Die Elemente der Matrix $\underline{Y}_2$ folgen ebenfalls aus dem Mischpotentialansatz in der Form

$$(\underline{Y}_2)_{ij} = -\frac{\mathrm{j}k}{4\pi Z_F}\iint_{S_{\mathrm{Ap}}}\iint_{S_{\mathrm{Ap}}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{g}'_j\mathrm{d}S'\cdot(\hat{n}\times\boldsymbol{e}_i)\mathrm{d}S$$
$$-\frac{1}{4\pi\mathrm{j}kZ_F}\iint_{S_{\mathrm{Ap}}}(-\hat{n}\cdot\mathrm{rot}_s\,\boldsymbol{e}_i)\iint_{S_{\mathrm{Ap}}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{div}_s\,\vec{g}'_j\mathrm{d}S'\mathrm{d}S$$
$$+\frac{1}{4\pi\mathrm{j}kZ_F}\sum_n\oint_{\partial S_{\mathrm{Ap}n}}(\hat{n}\times\boldsymbol{e}_i)\iint_{S_{\mathrm{Ap}}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\hat{n}\cdot\mathrm{rot}_s{}'\,\boldsymbol{e}'_j)\mathrm{d}S'\cdot\hat{u}\mathrm{d}l. \quad (4.36)$$

Die FMM-Darstellung ergibt sich wieder über eine Zerlegung der Art

$$\underline{Y}_2 = \underline{Y}_2^{\mathrm{MoM}} + \underline{Y}_2^{\mathrm{FMM}}. \quad (4.37)$$

Der Nahbereichsanteil $\underline{Y}_2^{\mathrm{MoM}}$ ergibt sich aus der Formel (4.36) indem man die Integration auf die nahen Gruppen beschränkt. Für die Matrixelemente des Fernbereichsanteils erhält man

$$(\underline{Y}_2^{\mathrm{FMM}})_{ij} = -\frac{\mathrm{j}k}{4\pi Z_F}\frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\sum_{m}\iint \underbrace{T_\infty(kR;\hat{k}\cdot\hat{R})}_{T_{mm'}(\hat{k})}\underbrace{\iint_{S_{im}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_m}(\hat{n}\times\boldsymbol{e}_{im})\,\mathrm{d}S\times\hat{k}}_{\boldsymbol{V}_{\hat{n}\times\boldsymbol{e}_{im}}(\hat{k})}$$
$$\cdot\underbrace{\iint_{S_{jm'}}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k\hat{k}\cdot\vec{r}_{m'}}(\vec{k}\times\vec{g}'_{jm'})\,\mathrm{d}S'}_{\boldsymbol{V}_{\vec{g}'_{jm'}}(\hat{k})}\,\mathrm{d}A_{\hat{k}}. \quad (4.38)$$

4.3 Die kombinierte Feldintegralgleichung

Die kombinierte Feldintegralgleichung ergibt sich durch die Linearkombination der Feldgleichungen (4.4) und (4.23) zu

$$\left(-\frac{4\pi\alpha}{\mathrm{j}kZ_F}\begin{pmatrix}\underline{Z}_1 & \underline{T}_1\\ \underline{Z}_2 & \underline{T}_2\end{pmatrix}+\frac{4\pi(1-\alpha)}{\mathrm{j}k}\begin{pmatrix}\underline{T}_3 & \underline{Y}_1\\ \underline{T}_4 & \underline{Y}_2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}\underline{J}\\ \underline{b}\end{pmatrix}$$
$$= -\frac{4\pi\alpha}{\mathrm{j}kZ_F}\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix}+\frac{4\pi(1-\alpha)}{\mathrm{j}k}\begin{pmatrix}\underline{V}_1\\ \underline{V}_2\end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Bei der Anwendung der Schnellen Multipolmethode wird diese Linearkombination in den $\boldsymbol{V}(\hat{k})$ der Testintegrale durchgeführt, da diejenigen der Quellintegrale für die elektrische und magnetische Feldintegralgleichung bereits identisch sind.

4.4 Die Impedanzbeziehung und der modale Anregungsterm

Zusätzlich zu den Feldintegralgleichungen ist noch eine Impedanzbeziehung einzuführen, um das Verhalten der Hohlleiter darzustellen. Die Wirkung der Hohlleiter ist gerade dadurch charakterisiert, daß auf der Apertur ein bestimmter Zusammenhang zwischen der elektrischen und der magnetischen Oberflächenstromdichte besteht.

Dieser Zusammenhang läßt sich aus der Stetigkeit der tangentialen magnetischen Feldstärke ableiten. Auf den Aperturen gilt

$$2\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{inc}} + \boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{r}}\{\boldsymbol{M}_s\} = \boldsymbol{J}_s \times \hat{n} \tag{4.40}$$

woraus sich nach Einsetzen der Summenansätze

$$2a_i\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{p}} + \sum_j b_j\boldsymbol{h}_j^{\mathrm{r}} = \sum_k J_k\vec{f}_k \times \hat{n} \tag{4.41}$$

ergibt. Skalarmultipliziert man diese Gleichung mit $\vec{g}_l = \boldsymbol{e}_l^{\mathrm{r}} \times \hat{n}$ und integriert über die zugehörigen Aperturflächen, so erhält man

$$2a_i\iint(\boldsymbol{e}_l^{\mathrm{r}} \times \hat{n}) \cdot \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{p}}\mathrm{d}S + \sum_j b_j \iint(\boldsymbol{e}_l^{\mathrm{r}} \times \hat{n}) \cdot \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{r}}\mathrm{d}S = \sum_k J_k \iint \boldsymbol{e}_l^{\mathrm{r}} \cdot \vec{f}_k\mathrm{d}S. \tag{4.42}$$

Beachtet man, daß $\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{p}} = -\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{r}}$ gilt, so erhält man schließlich

$$\sum_k J_k \iint \boldsymbol{e}_l^{\mathrm{r}} \cdot \vec{f}_k\mathrm{d}S - \sum_j b_j \iint(\boldsymbol{e}_l^{\mathrm{r}} \times \hat{n}) \cdot \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{r}}\mathrm{d}S = -2a_i\iint(\boldsymbol{e}_l^{\mathrm{r}} \times \hat{n}) \cdot \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{r}}\mathrm{d}S. \tag{4.43}$$

Diese Impedanzbeziehung enthält sogleich den modalen Anregungsterm für eine Anregung mit dem i-ten Hohlleitermodus. Diese Gleichung wird nun gewichtet zum unteren Teil des Gleichungssystems (4.4) hinzuaddiert, um insgesamt ein lösbares lineares Gleichungssystem zu erhalten. Diese Addition ist auch unter dem FMM-Formalismus möglich, da sie ausschließlich den Nahanteil betrifft.

4.5 Numerische Beispiele

Zur Demonstration des zuvor erläuterten Verfahrens werden im folgenden Abschnitt einige Rechenbeispiele betrachtet. Daran anschließend wird auf die Aspekte der parallelen Implementation der mehrstufigen Schnellen Multipolmethode eingegangen.

4.5.1 Rechenbeispiele

Als erstes Beispiel sei ein Rundhohlleiterstrahler mit Stirnrille betrachtet, wie in der Abbildung 4.1 dargestellt. Das in der Abbildung 4.2 gezeigte Fernfeld ist über die kombinierte Feldintegralgleichung mit der mehrstufigen Schnellen Multipolmethode ermittelt und der Lösung der rotationssymmetrischen Momentenmethode gegenübergestellt worden. Die Multipolmethode basiert dabei auf zwei Stufen, 370 Gruppen und 4.500 Kanten bzw. Unbekannte der elektrischen Oberflächenstromdichte. Dies entspricht einem Speicherbedarf von zirka 150 Megabyte. Da in der Multipoldarstellung eine Genauigkeit von etwa zwei Dezimalstellen verwendet worden ist, ist mit Abweichungen unterhalb von $-30\,\mathrm{dB}$ zu rechnen, ansonsten stimmen die Fernfelder im Hauptstrahlungsbereich gut überein.

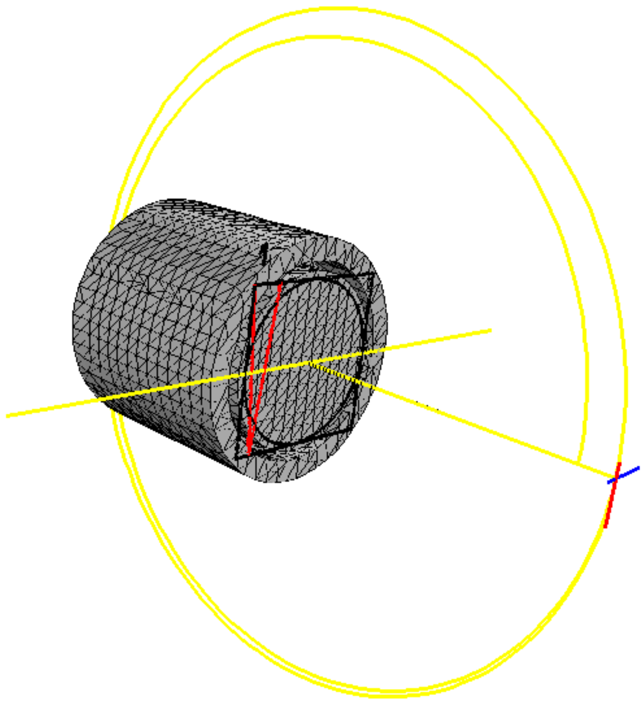

Abbildung 4.1: Hohlleiterstrahler mit Stirnrille; Innendurchmesser 23,0 mm, Außendurchmesser 34,0 mm, Hohlleiterlänge 29,0 mm, Rillentiefe 7,5 mm, Rillenbreite 1,5 mm, Rillenabstand von innen 1,0 mm und Wellenlänge 1,917 cm.

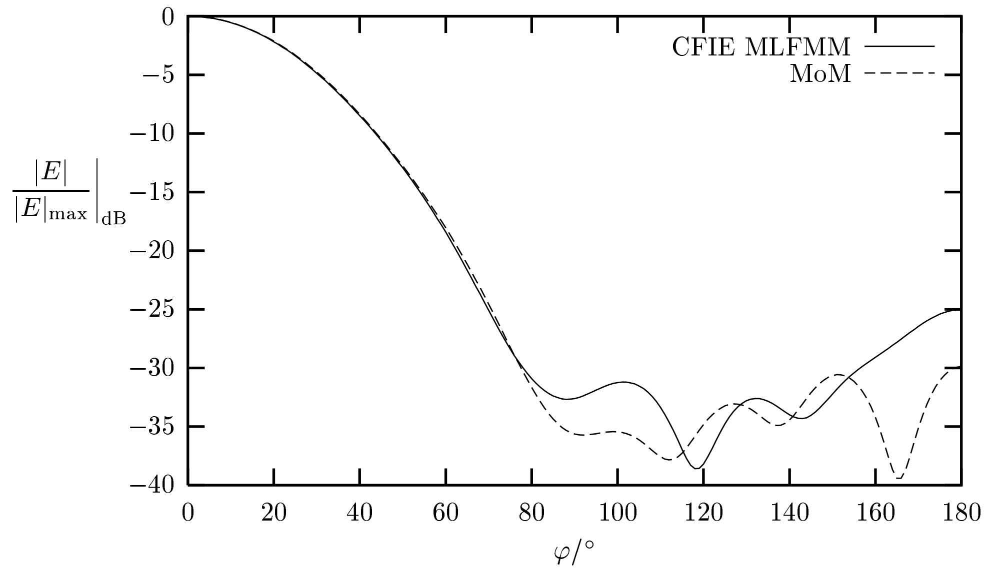

Abbildung 4.2: Fernfeld des Hohlleiterstrahlers mit Stirnrille gerechnet mit der mehrstufigen Schnellen Multipolmethode (CFIE MLFMM) und der Momentenmethode für rotationssymmetrische Körper (MoM).

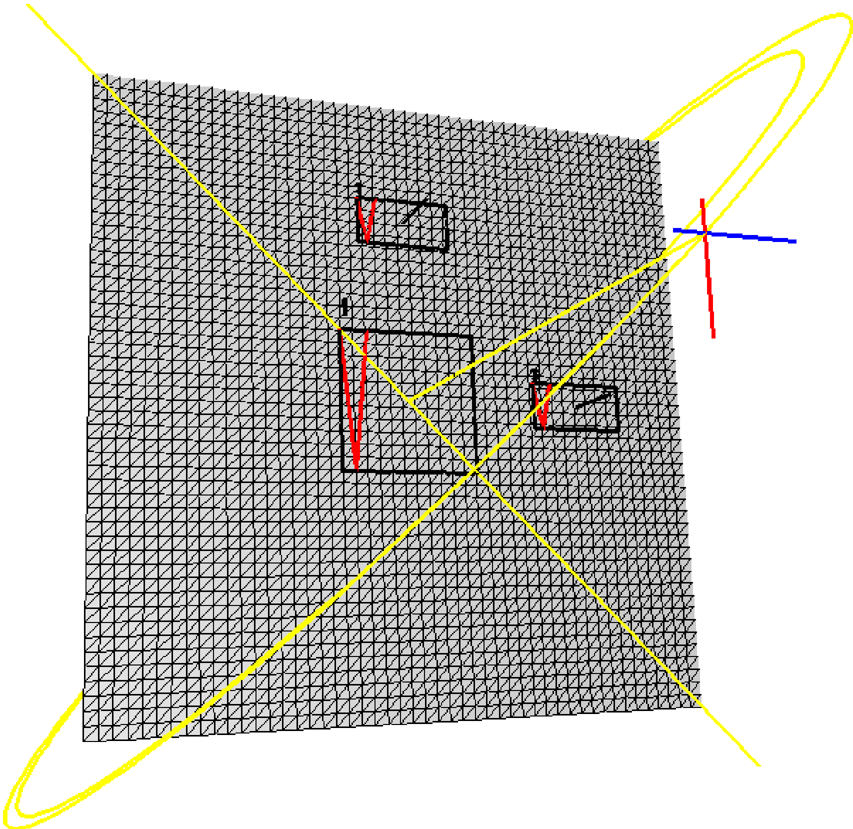

Abbildung 4.3: Quadratische Platte mit drei Rechteckaperturen ähnlich wie in [5] jedoch mit einer Kantenlänge von 0,1 m.

Als nächstes Beispiel wird eine verkleinerte Gruppenanordnung gemäß Bird [5] betrachtet, die in der Abbildung 4.3 dargestellt ist. Die Kantenlänge der verkleinerten quadratischen Platte beträgt 10 cm, die erste quadratische Apertur in der Mitte besitzt eine Kantenlänge von 22,8 mm, die beiden Rechteckaperturen besitzen beide Kantenlängen von 15,7 bzw. 7,7 mm und sind jeweils um 30 mm aus der Mitte fort verschoben. Die Platte besteht aus 10.325 inneren Kanten bzw. Unbekannten der elektrischen Oberflächenstromdichte, die in 336 Gruppen auf drei Stufen unterteilt sind. Die mittlere Apertur enthält 14 Moden und die anderen jeweils fünf. Daraus ergibt sich bei einer Profilbreite des Cholesky-Vorkonditionierers von 500 ein Speicherbedarf von etwa 450 Megabyte. In der Abbildung 4.4 ist das Fernfeld dargestellt. Die Abbildung 4.5 zeigt die Beträge der Streuparameter zusammen mit den Meßwerten von Bird [5]. Die Tatsache, daß die Platte in diesem Beispiel kleiner ist als bei Bird [5], sollte keine große Auswirkung auf die Streuparameter haben. Die erkennbaren Abweichungen setzen sich vor allem aus der Meßungenauigkeit und der begrenzten Genauigkeit der Multipolmethode zusammen, wobei hier eine Genauigkeit von etwa drei Dezimalstellen in der Fernfelddarstellung der Multipole gewählt worden ist. Auf dieser Grundlage ist die Übereinstimmung akzeptabel.

Im nächsten Beispiel wird das Konzept einer Cassegrain-Antenne mit einer Speisegruppe betrachtet, welches im Rahmen einer Studie für die DaimlerChrysler Aerospace AG [3] vorgeschlagen worden ist. Die Gesamtstruktur bestehend aus Hauptreflektor, Subreflektor und Speiseanordnung ist in der Abbildung 4.6 dargestellt. Der Durchmesser des parabolischen Hauptreflektors beträgt 647,4 mm mit einer Brennweite von 196,7 mm, der Durchmesser des hyperbolischen Subreflektors

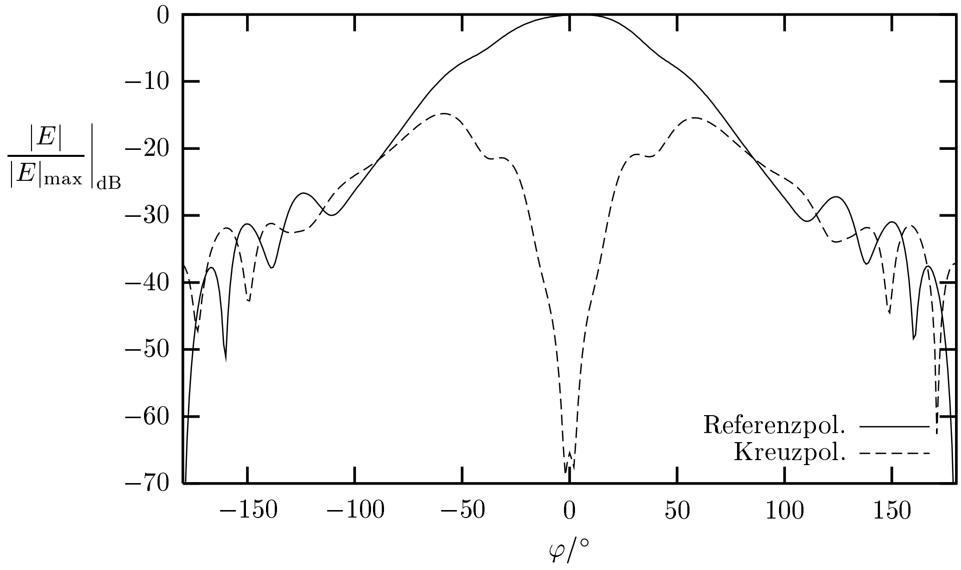

Abbildung 4.4: Fernfeld der quadratischen Platte mit den Rechteckaperturen gemäß der Abbildung 4.3 bei 12,5 GHz.

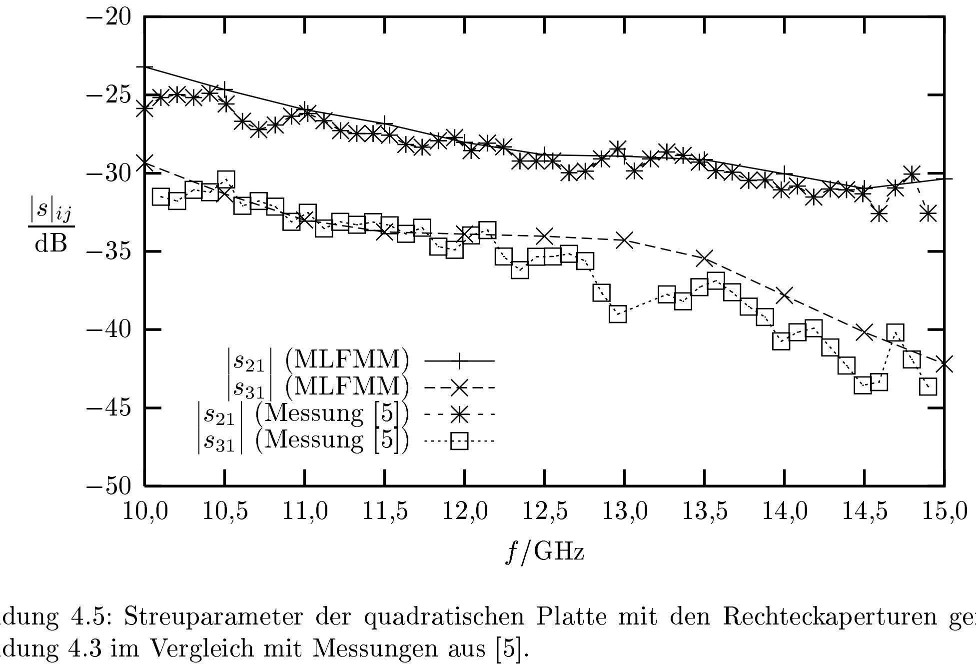

Abbildung 4.5: Streuparameter der quadratischen Platte mit den Rechteckaperturen gemäß der Abbildung 4.3 im Vergleich mit Messungen aus [5].

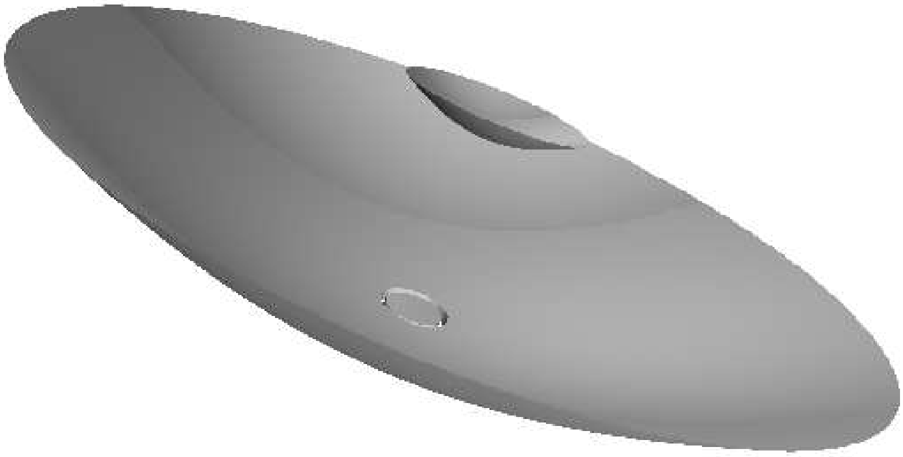

Abbildung 4.6: Konzept einer Cassegrain-Antenne, deren Subreflektor untersucht werden soll.

beträgt 147,7 mm mit den Brennweiten 250,0 mm und 40,0 mm und der Durchmesser der kreiszylindrischen Speiseanordnung beträgt 50,0 mm bei einer Höhe von 10,0 mm. Die Speiseanordnung bestehend aus vier Rundhohlleitern ist in der Abbildung 4.7 zusammen mit der Ebene des Fernfeldes dargestellt. Die Rundhohlleiteraperturen haben einen Durchmesser von 15,0 mm und einen Mittelpunktabstand von 17,5 mm voneinander. Die Abbildung 4.8 zeigt das Fernfeld der Speiseanordnung bei gleichartiger Speisung aller Aperturen mit dem Grundmodus bei einer Frequenz von 24 GHz. Die Berechnung ist sowohl mit der elektrischen als auch mit der kombinierten Feldintegralgleichung durchgeführt worden. Im Hauptstrahlungsbereich ergibt sich eine gute Übereinstimmung beider, im rückwärtigen Bereich ist zu beachten, daß die Rechnung mit der elektrischen Feldintegralgleichung ohne Rückwand erfolgt ist, um innere Resonanzen zu vermeiden.

In der Abbildung 4.9 ist die Speiseanordnung zusammen mit dem hyperbolischen Subreflektor dargestellt, was Gegenstand der nächsten Untersuchung sein soll. Diese Geometrie besteht aus insgesamt 12.772 Kanten bzw. Oberflächenstromvariablen verteilt auf 1.616 Gruppen in vier Stufen. Je Apertur sind sechs Moden angesetzt worden. Der Speicherbedarf liegt hiermit bei zirka 365 Megabyte. Das Fernfeld dieser Anordnung bei gleichartiger Speisung aller Aperturen mit dem Grundmodus bei 24 GHz ist in der Abbildung 4.10 wiedergegeben. Im Vergleich mit der Abbildung 4.8 ist zum einen bei $\varphi = 0°$ die Reflexionswirkung und zum anderen bei $\varphi = \pm 140°$ die Überstrahlung zu erkennen. Die starke Überstrahlung resultiert vor allem aus den recht hohen Nebenkeulen der Speiseanordnung. Dieses ergibt sich in erster Linie daraus, daß es sich hierbei um ein nicht optimiertes Konzept auf der Grundlage der Geometrischen Optik handelt.

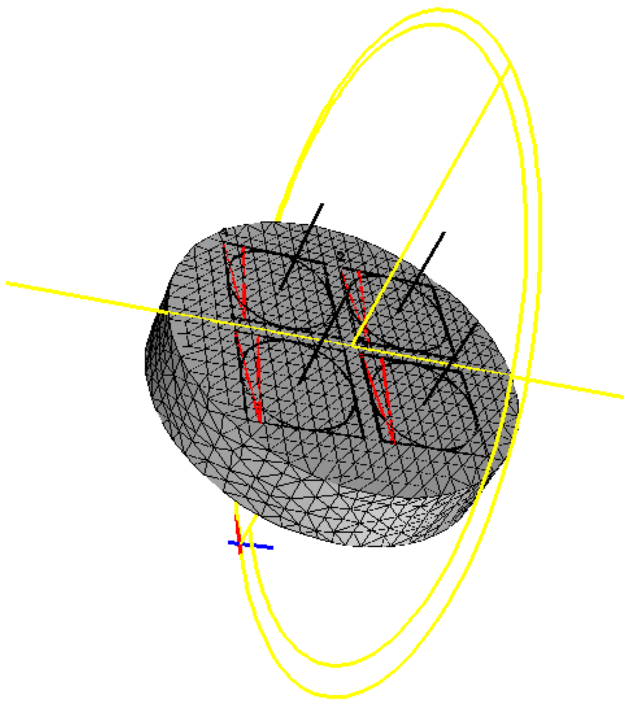

Abbildung 4.7: Speiseanordnung im Konzept der Cassegrain-Antenne aus der Abbildung 4.6 bestehend aus vier Rundhohlleiteraperturen.

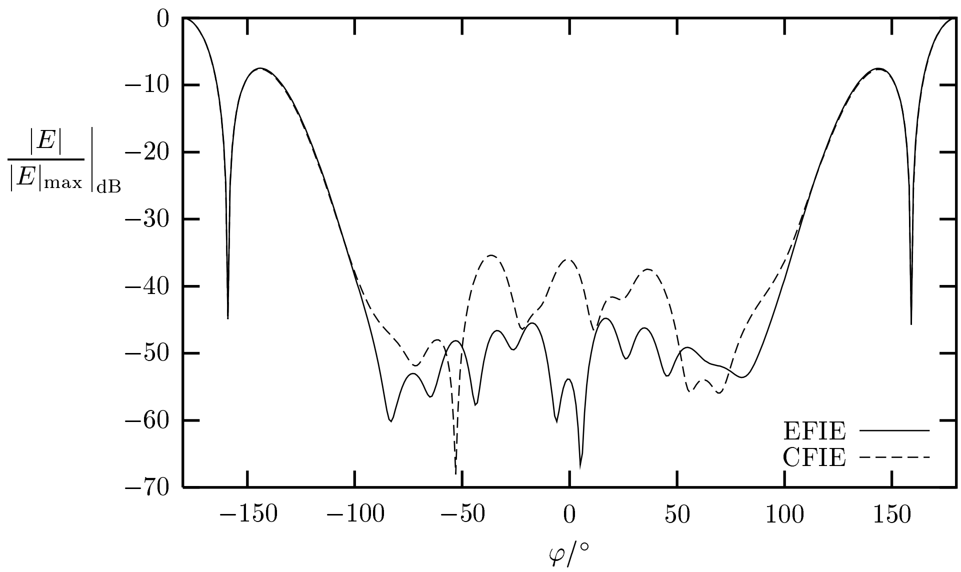

Abbildung 4.8: Fernfeld der Speiseanordnung aus der Abbildung 4.7 gerechnet mit der kombinierten (CFIE) und der elektrischen (EFIE) Feldintegralgleichung, wobei die Rückseite geschlossen oder offen ist.

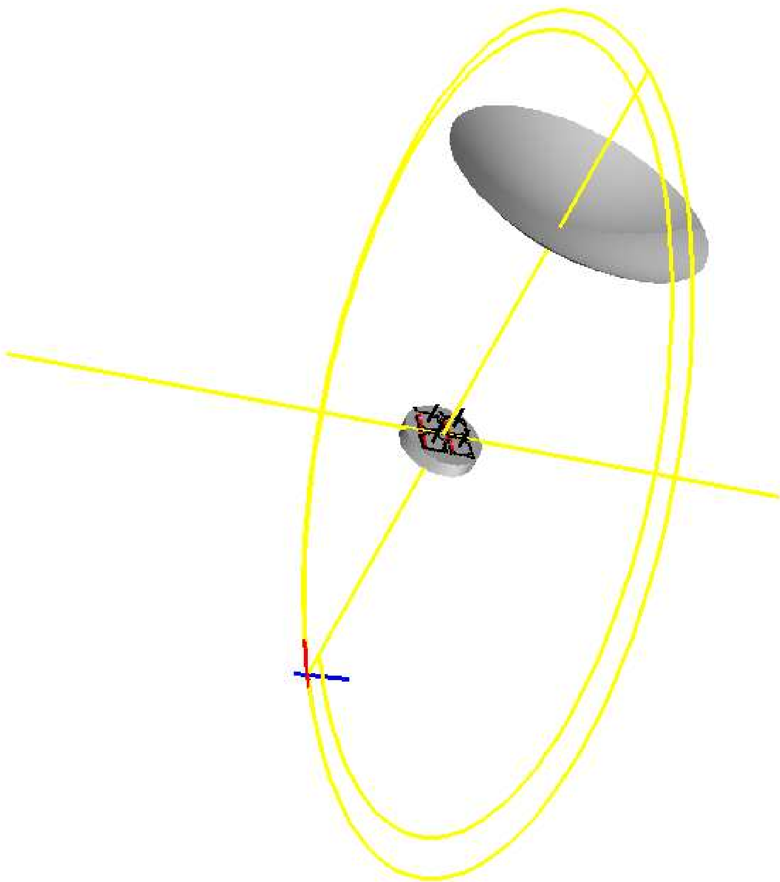

Abbildung 4.9: Speiseanordnung und Subreflektor im Konzept der Cassegrain-Antenne aus der Abbildung 4.6.

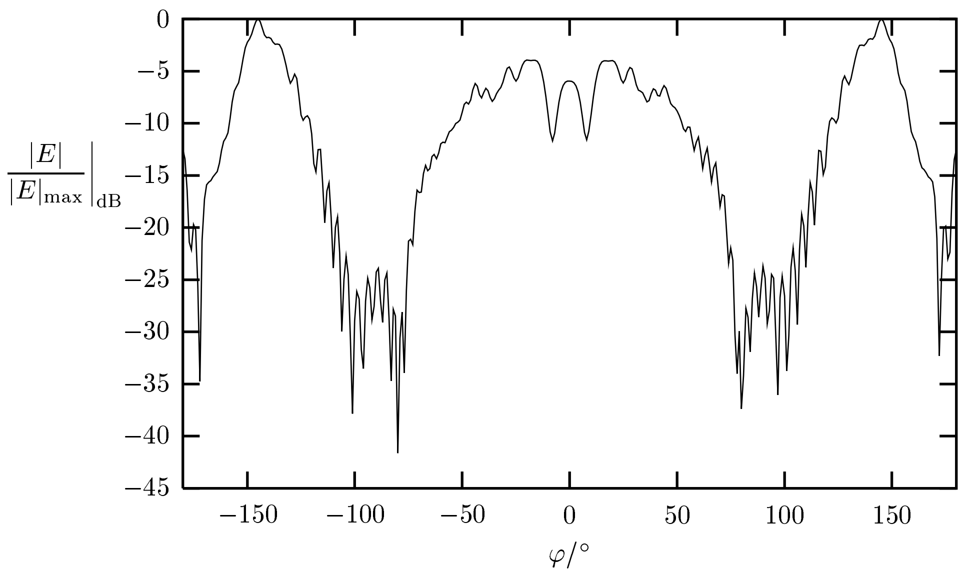

Abbildung 4.10: Fernfeld der Speiseanordnung mit Subreflektor gemäß der Abbildung 4.9.

4.5.2 Anmerkungen zur parallelen Implementation

Die parallele Implementation der zuvor dargestellten mehrstufigen Schnellen Multipolmethode ist mit der MPI-Programmbibliothek[1] erfolgt, um über verschiedene Architekturen hinweg mit maximaler Kompatibilität arbeiten zu können. Die parallelen Rechnungen wurden zunächst in einer LAM-Umgebung[2] bestehend aus Pentium-III-Rechnern mit Linux-Betriebssystem und einer Silicon Graphics Origin 200 mit zwei Prozessoren und IRIX-Betriebssystem durchgeführt. Spätere Rechnungen sind auf einem IBM-Rechner mit 32 Powerpc-Prozessoren und AIX-Betriebssystem erfolgt.

Bei Parallelisierungen ist grundsätzlich darauf zu achten, daß der Datenaustausch zwischen den Prozessen möglichst klein bleibt, um den zusätzlichen Rechenzeitbedarf für die Verwaltung möglichst klein zu halten. Hierzu ist eine Selbstorganisation auf der Grundlage der Prozeßnummern angewandt worden: In jedem Prozeß läuft das gleiche Programm und es sind die gleichen Daten soweit benötigt vorhanden. Aufgrund der Prozeßnummer entscheidet sich dann implizit, welche Teildaten und -aufgaben je Prozeß zu bearbeiten sind. Am Ende eines Parallelblocks sind die Resultate dann zusammenzuführen und allen Prozessen zur Verfügung zu stellen. Dies geschieht mit den MPI-Routinen zur Akkumulation oder zum blockweisen Datentausch.

Das Gesamtprogramm gliedert sich grob in drei Teilbereiche mit unterschiedlichen Parallelisierungsmöglichkeiten: Berechnung der Matrizen und Hilfsgrößen, iterative Lösung des Gleichungssystems und Extraktion der relevanten Ergebnisse. Bei der Berechnung der Matrizen werden den einzelnen Prozessen gemäß der Prozeßnummern direkt einzelne Matrixzeilen zugewiesen. Am Ende des ersten Teilabschnitts sind dann die Matrizen zwecks Synchronisation der Daten über alle Prozesse zu akkumulieren. Um den Synchronisationsbedarf gering zu halten, werden diverse Zwischenwerte asynchron parallel und somit eigentlich mehrfach berechnet.

Im zweiten Teilabschnitt dem iterativen Lösen des Gleichungssystems liegt der wesentliche Rechenaufwand in der Bestimmung des Matrix-Vektor-Produkts. Der Nahbereichsanteil wird wieder zeilenweise auf die Prozesse verteilt. Die Parallelisierung des Fernbereichsanteils setzt hierbei auf der Stufe der gröbsten Gruppeneinteilung an: Gemäß Definition sind alle Kindgruppen zweier verschiedener Elterngruppen ferngekoppelt. Sowohl die Inter- als auch die Anterpolation können also unabhängig voneinander und somit parallel bezüglich der Gruppen auf der gröbsten Stufe durchgeführt werden. Nach der Interpolation über alle Stufen müssen jedoch alle Raumrichtungswerte durch Austausch synchronisiert werden, damit anschließend die Translation ebenfalls gruppenbezogen parallel erfolgen kann. Die nach der Anterpolation über alle Stufen und der Integration über alle Raumrichtungen notwendige Synchronisation erfolgt zusammen mit der abschließenden Akkumulation nach der zeilenweise parallelisierten Berechnung des Nahanteils.

Im letzten Teilabschnitt der Extraktion der relevanten Ergebnisgrößen wird vor allem das Fernfeld berechnet. Hierbei erfolgt die Parallelisierung direkt blockweise über die einzelnen Raumrichtungen. Die Aufteilung erfolgt erneut automatisch anhand der Prozeßnummern und die Ergebnisse werden nur zum Basisprozeß zwecks Ausgabe übertragen. Hierin zeigt sich die einzige Abweichung vom Prinzip der homogenen Parallelisierung, denn zur Datenein- und ausgabe wird ein Prozeß zum Basisprozeß erklärt, wohingegen ansonsten alle Prozesse das gleiche Programm durchlaufen.

Die Rechenlast wird durch das geschilderte Vorgehen zwar gut verteilt, der Speicherbedarf ist jedoch für alle Prozesse gleich dem eines einzelnen. Die wechselnde Reihenfolge bei den Akkumulationsvorgängen führt ferner mitunter zu einer Erhöhung der benötigten Iterationszahl des Gleichungssystemlösers.

[1] MPI = Message Passing Interface, siehe bspw. [23].
[2] LAM = Local Area Multicomputer, siehe http://www.lam-mpi.org.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit ist die mehrstufige Schnelle Multipolmethode zur Berechnung von Aperturgruppen zur Anwendung gebracht worden. Zunächst ist mit dem Gegenbauerschen Additionstheorem die mathematische Grundlage der Schnellen Multipolmethode dargelegt worden. Anschließend ist die prinzipielle Funktionsweise zunächst der einstufigen und dann der mehrstufigen Schnellen Multipolmethode anhand von Streuproblemen erläutert worden. Diese Methode ist darauffolgend unter Einführung magnetischer Oberflächenstromdichten auf Aperturgruppen erweitert worden. Abschließend ist die mehrstufige Schnelle Multipolmethode auch in parallelisierter Form auf einige Beispielprobleme angewandt worden.

Der Vorteil der dargestellten mehrstufigen Schnellen Multipolmethode liegt vor allem in einem reduzierten Bedarf an Arbeitsspeicher und Rechenzeit verglichen mit der Momentenmethode begründet. Während die aufgeführten Beispiele weniger als ein Gigabyte an Arbeitsspeicher benötigen, wären bei Nutzung der Momentenmethode jeweils mehrere Gigabyte notwendig. Bei der mehrstufigen Schnellen Multipolmethode sind jedoch etliche Parameter zu wählen, wie beispielsweise Stufenzahl, Gruppenzahl oder Anzahl der Richtungen in der Fernfelddarstellung der Multipole. Die Wahl dieser Parameter hat große Auswirkungen auf den Speicherbedarf. Da eine geeignete Parameterwahl in nicht vorhersehbarer Weise von der Geometrie abhängt, kann sie letztlich nur aus mehreren Testläufen bestimmt werden.

Das sich ergebende lineare Gleichungssystem ist bereits für die reinen Streuprobleme schlecht konditioniert und diese Problematik wird durch die Einführung der Aperturen noch weiter verschärft, so daß in allen Fällen ein vorkonditioniertes Verfahren der bikonjugierten Gradienten verwendet wird. Die Bestimmung des Vorkonditionierers ist jedoch problematisch, da nur der Nahanteil der Matrix a priori bekannt ist. Die in dieser Arbeit eingesetzte unvollständige Band-Cholesky-Zerlegung benötigt mitunter eine zu große Profilbreite, um akzeptable Iterationszahlen zu erreichen. Verschiedene LU-basierte Ansätze haben sich aber als untauglich erwiesen.

Die vorgestellte Art der Parallelisierung führt zu einer Steigerung der Rechenleistung, wobei jedoch jeder parallele Prozeß über die volle Speicherkapazität verfügen muß. Die Problematik der schlechten Konditionierung des linearen Gleichungssystems wird bei der Parallelisierung durch die wechselnde Additionsreihenfolge weiter verschärft. Der Datenabgleich nach der Interpolation im Matrix-Vektor-Produkt bedarf eines schnellen Datentransfers, um nicht zum Engpaß zu werden.

Während Streuprobleme mit der mehrstufigen Schnellen Multipolmethode gut gelöst werden können, ergeben sich bei der Berücksichtigung von Aperturen deutliche Probleme wie oben ausgeführt worden ist. Diese resultieren neben einem erhöhten Bedarf an Rechenzeit und Arbeitsspeicher vor allem in einer zu geringen Genauigkeit insbesondere für Aussagen bezüglich des Kreuzpolarisationsverhaltens. Auch wenn sich die Kondition mit neuartigen Vorkonditionierern verbessern ließe und der Speicherbedarf durch eine Modifizierung der Fernfelddarstellung der Multipole reduzierbar wäre, so würde das Genauigkeitsproblem weiterhin bestehen bleiben. Der signifikante Vorteil der mehrstufigen Schnellen Multipolmethode gegenüber der Momentenmethode kommt nur zum Tragen, falls man in der Fernfelddarstellung der Multipole mit einer Genauigkeit von zirka zwei Dezimalstellen rechnet. Diese ist jedoch für präzise Aussagen über das Kreuzpolarisationsverhalten von Aperturgruppen zu gering. Somit läßt sich die mehrstufige Schnelle Multipolmethode zur Berechnung von Aperturgruppen nur einsetzen, wenn eine Genauigkeit von einigen Prozent in der Leistungsbilanz, zirka zwei Dezimalstellen in den Reflexionsfaktoren bezogen auf den Speisemodus und 20 dB im Fernfeld der Referenzpolarisation ausreichend sind.

Anhang A

Legendre-Polynome

Legendre-Polynome sind die einfachsten Kugelfunktionen erster Art. Für die Kugelfunktionen erster Art gilt die rekursive Definition

$$(\nu - \mu + 1)P^{\mu}_{\nu+1}(z) = (2\nu + 1)zP^{\mu}_{\nu}(z) - (\nu + \mu)P^{\mu}_{\nu-1}(z).$$

Ein Legendre-Polynom vom Grade ν ist hiermit als

$$P_{\nu}(z) = P^{0}_{\nu}(z)$$

definiert. Somit ergibt sich für die Legendre-Polynome die rekursive Darstellung

$$(\nu + 1)P_{\nu+1}(z) = (2\nu + 1)zP_{\nu}(z) - \nu P_{\nu-1}(z) \tag{A.1}$$

mit den Anfangswerten

$$P_0(z) = 1, \tag{A.2}$$

$$P_1(z) = z. \tag{A.3}$$

Anhang B

Sphärische Hankelfunktionen

Die sphärischen Hankelfunktionen erster und zweiter Art sind über die sphärischen Bessel- und Neumannfunktionen definiert:

$$\mathrm{h}_n^{(1)}(z) = \mathrm{j}_n(z) + \mathrm{j}\,\mathrm{y}_n(z), \tag{B.1}$$

$$\mathrm{h}_n^{(2)}(z) = \mathrm{j}_n(z) - \mathrm{j}\,\mathrm{y}_n(z). \tag{B.2}$$

Die sphärische Neumannfunktion läßt sich mit dem rekursiven Schema

$$\mathrm{y}_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{z}\mathrm{y}_n(z) - \mathrm{y}_{n-1}(z). \tag{B.3}$$

mit

$$\mathrm{y}_{-2}(z) = -\left(\frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z}\right), \tag{B.4}$$

$$\mathrm{y}_{-1}(z) = \frac{\sin z}{z} \tag{B.5}$$

für ein Argument und alle Ordnungen ab null bestimmen.[1]

Für die sphärische Besselfunktion gilt zunächst ein ähnliches Schema, wobei die Vorwärtsrekursion jedoch instabil ist. Für die Rückwärtsrekursion gilt die Beziehung

$$\mathrm{j}_{n-1}(z) = \frac{2n+1}{z}\mathrm{j}_n(z) - \mathrm{j}_{n+1}(z). \tag{B.6}$$

Um die Anfangswerte für die Rückwärtsrekursion zu erzeugen, ist eine genügend lange Rückwärtsrekursion bis zum Anfangspunkt der eigentlichen mit beliebigen Startwerten vorweg durchzuführen. Hierbei muß laufend normiert werden, damit die Funktionswerte nicht zu groß werden. Die eigentliche Rückwärtsrekursion liefert dann eine Folge von Werten der Besselfunktionen fallender Ordnung bis zur Ordnung null. Diese gesamte Folge muß dann abschließend noch bezüglich

$$\mathrm{j}_0(z) = \mathrm{y}_{-1}(z) \tag{B.7}$$

oder

$$\mathrm{j}_1(z) = -\mathrm{y}_{-2}(z) \tag{B.8}$$

normiert werden.

[1] Siehe [24].

Anhang C

Anzahl der Multipole für eine spezifizierte Genauigkeit

Wie von Song und Chew [30] dargestellt, erhält man eine Abschätzung für die obere Summengrenze L in der Multipoldarstellung aus einer Betrachtung des Abbruchfehlers im Gegenbauerschen Additionstheorem (2.23):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{R}+\vec{d}|}}{|\vec{R}+\vec{d}|} &= -\mathrm{j}k\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l(2l+1)\mathrm{j}_l(kd)\mathrm{h}_l^{(2)}(kR)P_l(\hat{d}\cdot\hat{R}) \quad \text{mit} \quad 0<d<R \\ &\approx -\mathrm{j}k\sum_{l=0}^{L}(-1)^l(2l+1)\mathrm{j}_l(kd)\mathrm{h}_l^{(2)}(kR)P_l(\hat{d}\cdot\hat{R}) \quad \text{mit} \quad 0<d<R.\end{aligned}$$

Der relative Fehler dieses Abbruchs ergibt sich somit zu

$$\epsilon = k|\vec{R}+\vec{d}|\left|\sum_{l=L+1}^{\infty}(-1)^l(2l+1)\mathrm{j}_l(kd)\mathrm{h}_l^{(2)}(kR)P_l(\hat{d}\cdot\hat{R})\right|.$$

Der maximale Fehler ergibt sich, wenn $\vec{d}$ und $\vec{R}$ kollinear sind und somit $|P_l|=1$ gilt und d seinen maximalen Wert annimmt. Hiervon wird im folgenden ausgegangen. Da R groß sein soll, läßt sich ferner die asymptotische Darstellung

$$\mathrm{h}_l^{(2)}(z\to\infty)\to\frac{\mathrm{j}^{l+1}}{z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}$$

zur Anwendung bringen, so daß sich die Abschätzung

$$\epsilon \approx \frac{|\vec{R}+\vec{d}|}{R}\left|\sum_{l=L+1}^{\infty}(-1)^l(2l+1)\mathrm{j}_l(kd)\right| \approx (2L+3)\mathrm{j}_{L+1}(kd)$$

ergibt, sofern man sich auf den größten Fehlerterm beschränkt. Für große Ordnungen und große Argumente ergibt sich durch Umformung von Formel 9.3.2 in [1] für die sphärische Besselfunktion die Darstellung

$$\mathrm{j}_{L+1}(kd) \approx \frac{1}{2\sqrt{f(L;x)x}}\,\mathrm{e}^{f(L;x)-(L+3/2)\ln[(L+3/2+f(L;x))/x]}$$

wobei $x = kd$ und $f(L; x) = \sqrt{(L + 3/2)^2 - x^2}$ gelten. Ein Wechsel der unbekannten Variablen L nach δ gemäß

$$L + \frac{3}{2} = x(1 + \delta)$$

führt über eine Potenzreihendarstellung des Logarithmus bis zur dritten Ordnung auf einen relativen Fehler von

$$\epsilon \approx \frac{\mathrm{e}^{-x(2\delta)^{3/2}/3}}{\sqrt[4]{2\delta}},$$

sofern man L bezüglich des maximalen d so wählt, daß δ genügend klein ist. Löst man dies nach einem kleinen δ auf, so ergibt sich

$$\delta \approx \frac{1}{2}\left[\frac{3\ln(1/\epsilon)}{x}\right]^{2/3} \approx 1{,}8\left[\frac{\log(1/\epsilon)}{x}\right]^{2/3},$$

woraus dann schließlich

$$L \approx kd + 1{,}8 \log^{2/3}(1/\epsilon)(kd)^{1/3} \tag{C.1}$$

folgt. Hiermit läßt sich die obere Summengrenze L im Gegenbauerschen Additionstheorem für eine gewünschte relative Genauigkeit ϵ abschätzen.

Anhang D

Die Rao-Wilton-Glisson-Basisfunktion

Für die elektrische Flächenstromdichte wird die Rao-Wilton-Glisson-Basisfunktion[1]

$$\vec{f}_i(\vec{r}) = \begin{cases} \pm \frac{l_i}{2A_i^\pm}(\vec{r} - \vec{r}_i^\pm) & \forall\, \vec{r} \in D_i^\pm \\ \vec{0} & \text{sonst} \end{cases} \tag{D.1}$$

verwendet, die in der Abbildung D.1 verdeutlicht wird. Hierbei werden mit $D_i^\pm$ die beiden einer Kante i mit der Länge l_i zugeordneten Oberflächendreiecke mit den Flächen $A_i^\pm$ bezeichnet. Mit $\vec{r}_i^\pm$ werden die jeweiligen der Kante gegenüber liegenden Scheitelpunkte benannt. Diese Basisfunktionen zeichnen sich durch einen besonders einfachen Ausdruck für die tangentiale Divergenz aus:

$$\mathrm{div}_s\, \vec{f}_i(\vec{r}) = \begin{cases} \pm \frac{l_i}{A_i^\pm} & \forall\, \vec{r} \in D_i^\pm \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \tag{D.2}$$

was sich leicht in Zylinderkoordinaten zeigen läßt. Ferner ist der Zu- und Abfluß des Flächenstromes durch die Kante gleich, so daß keine Linienladung existiert.

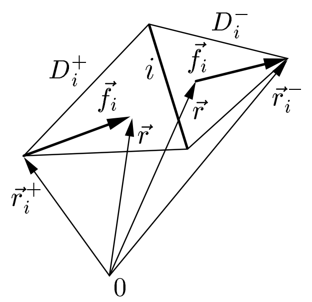

Abbildung D.1: Definition der Rao-Wilton-Glisson-Basisfunktion bezüglich der Kante i.

[1] Siehe [25].

Anhang E

Behandlung der Singularitäten

E.1 Singularitäten in den Greenschen Funktionen der Potentiale

Die Integranden in den Quellintegralen der Potentiale besitzen jeweils eine Singularität der Form R^{-1}. Um diese numerisch integrieren zu können, wird die Singularität extrahiert: Sie wird vom ursprünglichen Integranden subtrahiert, so daß der modifizierte Integrand nicht mehr singulär ist und numerisch integriert werden kann. Die extrahierte Singularität wird dann analytisch integriert und das Ergebnis zum numerischen Integral hinzuaddiert.

An dieser Stelle soll nun die analytische Integration des Flächenintegrals der extrahierten Singularität entwickelt werden. Die grundsätzliche Vorgehensweise ist dabei folgende:[1]

1. Das Integral über die Dreiecksfläche D wird in zwei Integrale über $(D-S_\epsilon)$ und S_ϵ aufgespalten. Der singuläre Punkt liegt dabei in S_ϵ. Das eigentliche Integral erhält man dann durch den Grenzübergang $S_\epsilon \to 0$, sofern die Summe der Teilintegrale dabei konstant bleibt.

2. Der Integrand über $(D - S_\epsilon)$ wird nun mit Hilfe des zweidimensionalen Nablaoperators ∇_s ausgedrückt. Da der Integrand in $(D - S_\epsilon)$ nicht singulär ist, kann dort der Greensche Satz angewendet werden, der in Operatorschreibweise

$$\iint\limits_{D-S_\epsilon} \mathrm{d}S' \nabla'_s = \oint\limits_{\partial(D-S_\epsilon)} \mathrm{d}l' \hat{u} \tag{E.1}$$

   lautet. Dabei ist $\hat{u}$ der Einheitsnormalenvektor auf dem Rand $\partial(D - S_\epsilon)$, der aus dem Gebiet $(D - S_\epsilon)$ herauszeigt. Hiermit ist es möglich, das Integral über die Fläche $(D - S_\epsilon)$ durch ein Integral über den Rand $\partial(D - S_\epsilon)$ zu ersetzen.

3. Als nächstes ist der Grenzwert des Integrals über S_ϵ zu ermitteln. Dieser verschwände nur, wenn der Integrand endlich wäre. Bei einem singulären Integranden kann sich ein endlicher Wert ergeben.

4. Nun wird der Grenzwert des Integrals über $\partial(D-S_\epsilon)$ ermittelt. Dabei ist zu beachten, daß der Beitrag von ∂S_ϵ nicht verschwindet, weil der Integrand nicht endlich bleibt. Der Grenzwert muß also explizit ermittelt werden.

[1] Siehe [34].

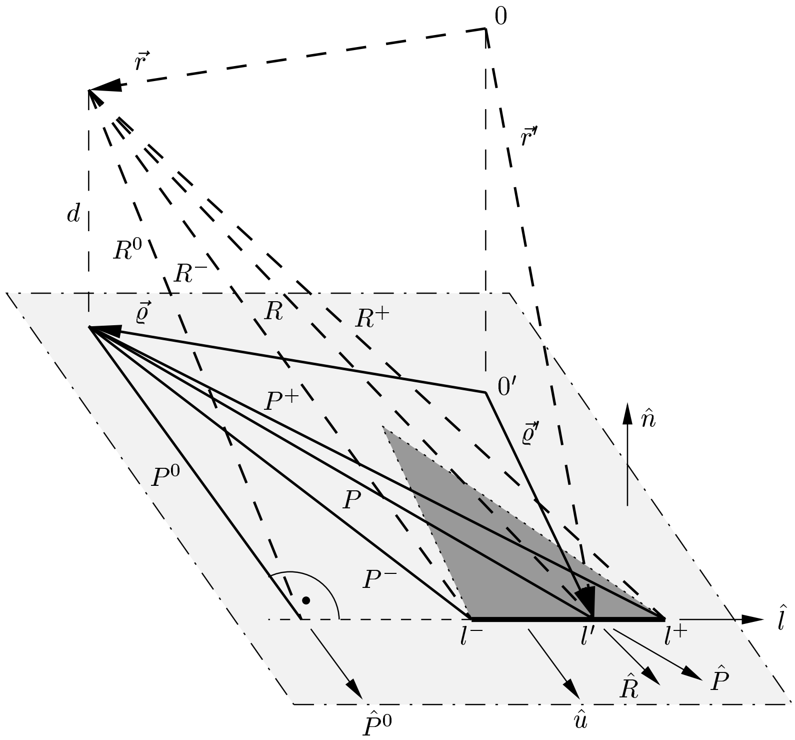

Abbildung E.1: Die einer Kante zugeordneten Größen, [34].

5. Das Integral ergibt sich schließlich als Summe des Flächenintegrals über S_ϵ, des Linienintegrals über ∂S_ϵ und des Linienintegrals über ∂D. Letzteres läßt sich im hier betrachteten Falle in eine Summe von Linienintegralen über die Dreieckskanten zerlegen: $\partial D = l_1 \cup l_2 \cup l_3$.

Den folgenden Berechnungen wird die Geometrie in Abbildung E.1 zugrunde gelegt. Hierbei handelt es sich um eine Darstellung der Ebene, in der das Dreieck liegt, über dessen Fläche integriert werden soll. Der Aufpunkt befindet sich dabei im allgemeinen im Abstand d über dieser Ebene. Die Länge der direkten Verbindungslinie zwischen Aufpunkt und Integrationspunkt ist demnach $R = \sqrt{P^2 + d^2}$. Dementsprechend gelten ferner $R_i^0 = \sqrt{(P_i^0)^2 + d^2}$ und $R_i^\pm = \sqrt{(P_i^\pm)^2 + d^2}$. Unter Beachtung dieser Nomenklatur soll nun das Integral

$$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}S'}{R}$$

berechnet werden. Dabei steht D für die Fläche des Dreiecks. Dieser Integrand besitzt am Aufpunkt eine Singularität, wenn dieser in das Integrationsgebiet fällt. Die Aufteilung des Integrationsbereiches ist trivial, deshalb wird gleich mit der Einführung des Nablaoperators begonnen. Sei $\hat{P}$ der von der Projektion des Aufpunktes zum Integrationspunkt zeigende Einheitsvektor, dann gilt bei der Verwendung von Polarkoordinaten in der Ebene von D mit der Projektion des Aufpunktes als Ursprung:

$$\begin{aligned}\nabla_s' \cdot \left(\frac{R}{P}\hat{P}\right) &= \nabla_s' \left(\frac{\sqrt{P^2+d^2}}{P}\hat{P}\right) \\ &= \frac{1}{P}\frac{\partial}{\partial P} P \frac{\sqrt{P^2+d^2}}{P}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{P} 2P \frac{1}{2\sqrt{P^2+d^2}} \\
&= \frac{1}{R}.
\end{aligned}
$$

Das zu berechnende Integral läßt sich nun wie folgt umschreiben:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D} \frac{\mathrm{d}S'}{R} &= \lim_{S_\epsilon \to 0} \iint\limits_{D-S_\epsilon} \nabla'_s \cdot \left(\frac{R}{P} \hat{P} \right) \mathrm{d}S' + \lim_{S_\epsilon \to 0} \iint\limits_{S_\epsilon} \frac{\mathrm{d}S'}{R} \\
&= \lim_{S_\epsilon \to 0} \oint\limits_{\partial(D-S_\epsilon)} \frac{R}{P} \hat{P} \cdot \hat{u} \mathrm{d}l' + \lim_{S_\epsilon \to 0} \iint\limits_{S_\epsilon} \frac{\mathrm{d}S'}{R},
\end{aligned}
$$

wobei für die letzte Zeile der zweidimensionale Gaußsche Satz verwendet worden ist. Für S_ϵ sei ein Kreissegment mit dem Radius ϵ und dem Winkel α_{AP} angenommen. α_{AP} ist dabei der Winkel des Kreisbogens, der um den Aufpunkt geschlagen wird, um diesen von der restlichen Dreiecksfläche abzutrennen. Wenn der Aufpunkt im Dreieck liegt, ist $\alpha_{\mathrm{AP}} = 2\pi$; wenn der Aufpunkt in einer Kante liegt, ist $\alpha_{\mathrm{AP}} = \pi$ und in den Ecken ist α_{AP} gleich den entsprechenden Eckwinkeln. Unter Verwendung von Polarkoordinaten für das zweite Integral ergibt sich dann:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D} \frac{\mathrm{d}S'}{R} &= \lim_{S_\epsilon \to 0} \oint\limits_{\partial(D-S_\epsilon)} \frac{R}{P} \hat{P} \cdot \hat{u} \mathrm{d}l' + \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_0^\epsilon \int\limits_0^{\alpha_{\mathrm{AP}}} \frac{P \mathrm{d}P \mathrm{d}\alpha}{\sqrt{P^2+d^2}} \\
&= \lim_{S_\epsilon \to 0} \oint\limits_{\partial(D-S_\epsilon)} \frac{R}{P} \hat{P} \cdot \hat{u} \mathrm{d}l' + \lim_{\epsilon \to 0} \alpha_{\mathrm{AP}} \left[\sqrt{P^2+d^2} \right]_0^\epsilon \\
&= \lim_{S_\epsilon \to 0} \oint\limits_{\partial(D-S_\epsilon)} \frac{R}{P} \hat{P} \cdot \hat{u} \mathrm{d}l' + \lim_{\epsilon \to 0} \alpha_{\mathrm{AP}} \left(\sqrt{\epsilon^2+d^2} - |d| \right) \\
&= \lim_{S_\epsilon \to 0} \int\limits_{\partial S_\epsilon} \frac{R}{P} \hat{P} \cdot \hat{u} \mathrm{d}l' + \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{l_i} \frac{R}{P} \hat{P} \cdot \hat{u}_i \mathrm{d}l'.
\end{aligned}
$$

Dabei ist in der letzten Zeile der äußere Rand in die einzelnen Dreieckskanten aufgeteilt worden. Das erneute Einführen von Polarkoordinaten mit der Projektion des Aufpunktes als Ursprung führt für das verbliebene Linienintegral um die Singularität zu:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D} \frac{\mathrm{d}S'}{R} &= \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_0^{\alpha_{\mathrm{AP}}} \frac{\sqrt{P^2+d^2}}{P} \hat{P} \cdot \hat{u} \epsilon \mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{l_i} \frac{R}{P} \hat{P} \cdot \hat{u}_i \mathrm{d}l' \\
&= -\lim_{\epsilon \to 0} \sqrt{1+\frac{d^2}{\epsilon^2}}\, \epsilon \int\limits_0^{\alpha_{\mathrm{AP}}} \mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{l_i} \frac{R}{P} \hat{P} \cdot \hat{u}_i \mathrm{d}l' \\
&= -\lim_{\epsilon \to 0} \sqrt{\epsilon^2+d^2} \int\limits_0^{\alpha_{\mathrm{AP}}} \mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{l_i} \frac{R}{P} \hat{P} \cdot \hat{u}_i \mathrm{d}l' \\
&= -\alpha_{\mathrm{AP}} \lim_{\epsilon \to 0} \sqrt{\epsilon^2+d^2} + \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{l_i} \frac{R}{P} \hat{P} \cdot \hat{u}_i \mathrm{d}l' \\
&= -\alpha_{\mathrm{AP}} |d| + \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{l_i} \frac{R}{P} \hat{P} \cdot \hat{u}_i \mathrm{d}l'.
\end{aligned}
$$

Dabei ist zu beachten, daß der Normaleneinheitsvektor $\hat{u}$ in das Innere von S_ϵ zeigt. Die verbleibenden Integrale werden jetzt wie folgt umgeschrieben:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}S'}{R} &= -\alpha_{\mathrm{AP}}|d| + \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{l_i} \frac{R}{P}\hat{P}\cdot\hat{u}_i \mathrm{d}l' \\
&= -\alpha_{\mathrm{AP}}|d| + \sum_{i=1}^{3} \vec{P_i^0}\cdot\hat{u}_i \int\limits_{l_i} \left(\frac{1}{R} + \frac{d^2}{P^2 R}\right)\mathrm{d}l' \\
&= -\alpha_{\mathrm{AP}}|d| + \sum_{i=1}^{3} \vec{P_i^0}\cdot\hat{u}_i \int\limits_{l_i^-}^{l_i^+} \left(\frac{1}{\sqrt{(P_i^0)^2 + l'^2 + d^2}} + \frac{d^2}{((P_i^0)^2 + l'^2)\sqrt{(P_i^0)^2 + l'^2 + d^2}}\right)\mathrm{d}l'.
\end{aligned}$$

Dies ist möglich, weil der Integrationspunkt in der i-ten Kante liegt und dort immer

$$P\hat{P}\cdot\hat{u}_i = \vec{P_i^0}\cdot\hat{u}_i$$

gilt, wobei $\vec{P_i^0} = P_i^0\hat{P}_i^0$ ist. Der erste Term des Integranden wird hierbei aus

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \tag{E.2}$$

gemäß [6] mit $a^2 = (P_i^0)^2 + d^2$ und $x = l'$ ermittelt. Der zweite Term ergibt sich aus

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2 + b)\sqrt{fx^2 + g}} = \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt{ag - bf}} \arctan \frac{x\sqrt{ag - bf}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2 + g}} + C \tag{E.3}$$

gemäß [6] mit $x = l'$, $a = 1$, $b = (P_i^0)^2$, $f = 1$ und $g = (P_i^0)^2 + d^2$. Nach dem Einsetzen der Grenzen ergibt sich unter Beachtung, daß $\sqrt{(P_i^0)^2 + d^2 + (l_i^\pm)^2} = R_i^\pm$ ist:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}S'}{R} = -\alpha_{\mathrm{AP}}|d| + \sum_{i=1}^{3} \hat{P}_i^0\cdot\hat{u}_i \Bigg[& P_i^0 \ln\frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} \\
& + |d|\left(\arctan\frac{|d|l_i^+}{P_i^0 R_i^+} - \arctan\frac{|d|l_i^-}{P_i^0 R_i^-}\right)\Bigg].
\end{aligned} \tag{E.4}$$

Nun soll noch die Winkelgröße α_{AP} in den Summenausdruck involviert werden. Aus geometrischen Betrachtungen ergibt sich unmittelbar, daß

$$\alpha_{\mathrm{AP}} = \sum_{i=1}^{3} \hat{P}_i^0\cdot\hat{u}_i \left(\arctan\frac{l_i^+}{P_i^0} - \arctan\frac{l_i^-}{P_i^0}\right)$$

ist. Ferner ergibt sich aus

$$\arctan x - \arctan y = \arctan\frac{x - y}{1 + xy}$$

mit $x = \frac{l_i^\pm}{P_i^0}$ und $y = \frac{|d|l_i^\pm}{P_i^0 R_i^\pm}$ unter der Berücksichtigung, daß $(l_i^\pm)^2 = (R_i^\pm)^2 - (R_i^0)^2$ und $(P_i^0)^2 = (R_i^0)^2 - d^2$ sind:

$$\arctan\frac{l_i^\pm}{P_i^0} - \arctan\frac{|d|l_i^\pm}{P_i^0 R_i^\pm} = \arctan\frac{P_i^0 l_i^\pm}{(R_i^0)^2 + |d|R_i^\pm}.$$

Hiermit wird nun schließlich die Gleichung (E.4) zu

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}S'}{R} = \sum_{i=1}^{3} \hat{P}_i^0 \cdot \hat{u}_i \Bigg[& P_i^0 \ln \frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} \\
& -|d| \left(\arctan \frac{P_i^0 l_i^+}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^+} - \arctan \frac{P_i^0 l_i^-}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^-} \right) \Bigg] . \qquad \text{(E.5)}
\end{aligned}
$$

Als nächstes wird nun das Integral

$$
\iint\limits_D \frac{\vec{\varrho}' - \vec{\varrho}}{R} \mathrm{d}S'
$$

berechnet. Die Bezeichnungen entsprechen hierbei denen in der Abbildung E.1: $\vec{\varrho}'$ ist der in die Ebene von D projizierte Vektor, der vom Ursprung zum Integrationspunkt zeigt. Der Vektor $\vec{\varrho}$ stellt den in die Ebene von D projizierten Vektor vom Ursprung zum Aufpunkt dar. Die Vorgehensweise entspricht derjenigen im vorherigen Fall. Zunächst wird eine Darstellung des Integranden mittels des Nablaoperators gesucht. Hierbei werden erneut Polarkoordinaten in der Ebene von D mit dem Ursprung im Aufpunkt angesetzt. Damit ergibt sich

$$
\nabla'_s R = \nabla'_s \sqrt{P^2 + d^2} = \hat{P} \frac{\partial}{\partial P} \sqrt{P^2 + d^2} = 2P \frac{1}{2\sqrt{P^2 + d^2}} \hat{P} = \frac{P}{R} \hat{P},
$$

wobei zu beachten ist, daß $\vec{\varrho}' - \vec{\varrho} = P\hat{P}$ ist. Das Integral ergibt sich damit zu:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{\vec{\varrho}' - \vec{\varrho}}{R} \mathrm{d}S' &= \lim_{S_\epsilon \to 0} \iint\limits_{D - S_\epsilon} \nabla'_s R \mathrm{d}S' + \lim_{S_\epsilon \to 0} \iint\limits_{S_\epsilon} \frac{\vec{\varrho}' - \vec{\varrho}}{R} \mathrm{d}S' \\
&= \lim_{S_\epsilon \to 0} \oint\limits_{\partial(D - S_\epsilon)} R \hat{u} \mathrm{d}l' + \lim_{S_\epsilon \to 0} \iint\limits_{S_\epsilon} \frac{P}{R} \hat{P} \mathrm{d}S' \\
&= \sum_{i=1}^{3} \hat{u}_i \int\limits_{l_i} R \mathrm{d}l'.
\end{aligned}
$$

Dabei wird hier der zweidimensionale Greensche Satz angewendet und die Randkurve ∂D in die einzelnen Dreieckskanten l_i zerlegt. Das Flächenintegral über S_ϵ und das Linienintegral über ∂S_ϵ verschwinden. Der Integrand dieses Linienintegrals ist überhaupt nicht singulär und somit wird letzteres beim Grenzübergang zu null. Die Singularität im Integranden dieses Flächenintegrals hebt sich mit dem Flächendifferential auf, sofern S_ϵ erneut als Kreissegment angesetzt wird. Für die verbleibenden Integrale ergibt sich mit

$$
\int \sqrt{x^2 + a^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \right] + C \qquad \text{(E.6)}
$$

gemäß [6] schließlich:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{\vec{\varrho}' - \vec{\varrho}}{R} \mathrm{d}S' &= \sum_{i=1}^{3} \hat{u}_i \int\limits_{l_i^-}^{l_i^+} \sqrt{l'^2 + (R_i^0)^2} \mathrm{d}l' \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \hat{u}_i \left((R_i^0)^2 \ln \frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} + l_i^+ R_i^+ - l_i^- R_i^- \right), \qquad \text{(E.7)}
\end{aligned}
$$

wobei beachtet wurde, daß $R_i^{\pm} = \sqrt{(l_i^{\pm})^2 + (R_i^0)^2}$ ist.

Eine Veränderung des Bezugsvektors, zum Beispiel vom projizierten Aufpunktvektor $\vec{\varrho}$ zu einem Scheitelpunktvektor $\vec{\varrho}_{\mathrm{SP}}$, ist über die Beziehung

$$\iint\limits_D \frac{\vec{\varrho}\,' - \vec{\varrho}_{\mathrm{SP}}}{R} \mathrm{d}S' = \iint\limits_D \frac{\vec{\varrho}\,' - \vec{\varrho}}{R} \mathrm{d}S' - (\vec{\varrho}_{\mathrm{SP}} - \vec{\varrho}) \iint\limits_D \frac{\mathrm{d}S'}{R} \tag{E.8}$$

einfach möglich. Dieser Zusammenhang wird für die Singularitäten bei den vektoriellen Potentialen benötigt, da die Vektoren $(\vec{\varrho}\,' - \vec{\varrho}_{\mathrm{SP}})$ den Vektoren $\vec{\varrho}_n^{\,+}$ bzw. $-\vec{\varrho}_n^{\,-}$ in den Basisfunktionen (D.1) entsprechen.

E.2 Singularitäten in den Greenschen Funktionen der Feldstärken

Bei der Berechnung der elektrischen Feldstärke aus der magnetischen Flächenstromdichte oder der magnetischen Feldstärke aus der elektrischen Flächenstromdichte sind Terme der Art

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi R}\right) \times \underline{I} = -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi R}\left(\frac{1}{R} + \mathrm{j}k\right) \hat{R} \times \underline{I}$$

über deren Singularität bei $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,' = \vec{0}$ zu integrieren. Hierzu bildet man einen Kreis mit dem Radius ϵ um die Singularität. Das Integral über die äußere Fläche enthält somit keine Singularität mehr. Im Falle des nun folgenden Grenzübergangs $\epsilon \to 0$ wird das äußere Integral zu einem Hauptwertintegral. Dieses läßt sich direkt numerisch ermitteln. Das andere Integral über den inneren singulären Bereich erfordert dagegen eine genauere analytische Betrachtung.

Zur Auswertung dieses Integrals wird der Aufpunkt um das Stück h in Richtung des Normalenvektors $\hat{n}$ angehoben. Danach wird über die Kreisfläche integriert und der Grenzwert bezüglich ϵ und h gebildet. Bildet man das Integral stattdessen über eine halbkugelförmige Ausbuchtung mit dem Radius ϵ um den Aufpunkt herum, wie zum Beispiel Eibert und Hansen [9], so gelangt man zwar zum gleichen Ergebnis, obwohl die Richtigkeit dieses Vorgehens im Vergleich mit dem zweidimensionalen Fall bezweifelt werden muß: Bei einem entsprechenden Vorgehen im zweidimensionalen Fall ergibt sich nämlich ein falsches Ergebnis; dort ist der Aufpunkt also in jedem Fall vom Integrationsbereich abzuheben, so daß es nahe liegt, dieses Vorgehen auch im dreidimensionalen Fall zu verwenden. Der eigentliche Integrationsbereich muß dann hierbei nicht abgewandelt werden.

Das Integral über die infinitesimale Kreisfläche S_ϵ ergibt sich somit bei Ansatz der Basisfunktion $\vec{f}$ für die Flächenstromdichte zu

$$\lim_{\epsilon\to 0} \iint\limits_{S_\epsilon} \mathrm{grad}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi R}\right) \times \vec{f} \mathrm{d}A = \frac{1}{4\pi}\vec{f} \times \lim_{\epsilon\to 0} \iint\limits_{S_\epsilon} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{\mathrm{j}k}{R}\right) \hat{R} \mathrm{d}A,$$

sofern man den Grenzwert bezüglich der Exponentialfunktion und der Basisfunktion bildet. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Basisfunktion sich innerhalb der Kreisfläche nicht ändert und durch ihren Wert in der Singularität dargestellt werden kann. Hebt man nun den Aufpunkt um h in Richtung $\hat{n}$ von der Kreisfläche S_ϵ ab, wie in der Abbildung E.2 dargestellt, so ergeben sich die Beziehungen

$$\hat{R} = \hat{n} \cos\vartheta + \hat{\varrho} \sin\vartheta = \hat{n}\frac{h}{R} + \hat{\varrho}\frac{\varrho}{R}$$

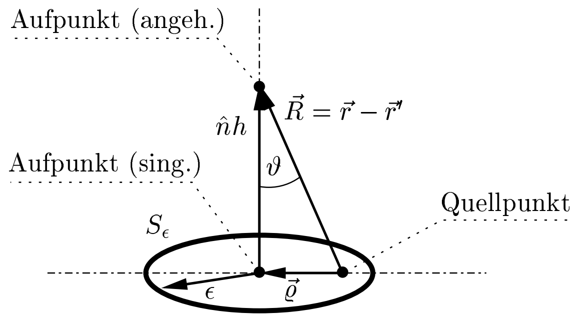

Abbildung E.2: Infinitesimale Kreisfläche zur Integration der Singularität mittels Anhebung des singulären Aufpunktes.

und

$$R^2 = \varrho^2 + h^2.$$

Berücksichtigt man, daß die ϱ-Komponente wegen der Zylindersymmetrie bei der Integration verschwindet, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon;h\to 0} \iint\limits_{S_\epsilon} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{\mathrm{j}k}{R}\right) \hat{R}\mathrm{d}A &= \hat{n} \lim_{\epsilon;h\to 0} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\epsilon} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{\mathrm{j}k}{R}\right) \frac{h}{R} \varrho \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi\hat{n} \lim_{\epsilon;h\to 0} h \int\limits_0^{\epsilon} \left(\frac{\varrho}{R^3} + \frac{\mathrm{j}k\varrho}{R^2}\right) \mathrm{d}\varrho \\
&= 2\pi\hat{n} \lim_{\epsilon;h\to 0} \left(\frac{h}{|h|} - \frac{h}{\sqrt{\epsilon^2 + h^2}} + \frac{\mathrm{j}k}{2} \ln(\epsilon^2 + h^2)^h - \mathrm{j}k \ln|h|^h\right) \\
&= 2\pi\hat{n}.
\end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, daß $\lim_{\epsilon;h\to 0} = \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{h\to 0}$ bedeutet. Dabei kommt es auf die Reihenfolge der Grenzwertbildung entscheidend an: Der Aufpunkt muß bereits in der Kreisfläche S_ϵ liegen, wenn der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ erfolgt, da sonst überhaupt keine Singularität vorläge.

Zusammengefaßt ergibt sich aus der Integration der betrachteten Singularität also ein Beitrag von

$$\lim_{\epsilon\to 0} \iint\limits_{S_\epsilon} \mathrm{grad}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \times \vec{f}'\mathrm{d}A' = -\frac{1}{2}\hat{n} \times \vec{f}(\vec{r}). \tag{E.9}$$

Dieser ist zum Wert des restlichen Hauptwertintegrals hinzuzuaddieren. Dieses ist bei der Aufstellung der Matrix bereits vorweggenommen worden.

Anhang F

Die Hohlleitermoden als Basisfunktionen

Da die Basisfunktionen der magnetischen Oberflächenstromdichte wegen

$$\boldsymbol{M}_s = \boldsymbol{E} \times \hat{n}$$

aus dem transversalen elektrischen Feld der Hohlleitermoden gebildet werden, sollen diese der Vollständigkeit halber an dieser Stelle explizit angegeben werden.

F.1 Die Rechteckapertur

Für eine rechteckige Apertur mit den Kantenlängen a und b seien zunächst einmal

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{F.1}$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{F.2}$$

sowie

$$k_z = -\mathrm{j}\sqrt{{k_x}^2 + {k_y}^2 - k^2} \tag{F.3}$$

definiert.

Für die in positiver z-Richtung laufende E-Welle gilt damit

$$e_x = k_x k_z C_E^{\mathrm{rect}} \cos(k_x x)\sin(k_y y), \tag{F.4}$$

$$e_y = k_y k_z C_E^{\mathrm{rect}} \sin(k_x x)\cos(k_y y), \tag{F.5}$$

$$\hat{z} \cdot \mathrm{rot_t}\, \boldsymbol{e} = 0, \tag{F.6}$$

$$\mathrm{div_t}\, \boldsymbol{e} = (-{k_x}^2 - {k_y}^2) k_z C_E \sin(k_x x)\sin(k_y y), \tag{F.7}$$

$$h_x = -k Y_F k_y C_E^{\mathrm{rect}} \sin(k_x x)\cos(k_y y), \tag{F.8}$$

$$h_y = k Y_F k_x C_E^{\mathrm{rect}} \cos(k_x x)\sin(k_y y), \tag{F.9}$$

$$\hat{z} \cdot \mathrm{rot_t}\, \boldsymbol{h} = k Y_F k_x C_E^{\mathrm{rect}} (-k_x \sin(k_x x))\sin(k_y y) + k Y_F k_y C_E^{\mathrm{rect}} \sin(k_x x)(-k_y \sin(k_y y)) \tag{F.10}$$

Hierbei gilt $m > 0$, $n > 0$ und $Y_F = 1/Z_F$. Das C_E^{rect} folgt aus der Normierung auf 0,5W.

Für die in positiver z-Richtung laufende H-Welle entsprechend

$$\begin{aligned} e_x &= -kZ_F k_y C_H^{\mathrm{rect}} \cos(k_x x) \sin(k_y y), && \text{(F.11)} \\ e_y &= kZ_F k_x C_H^{\mathrm{rect}} \sin(k_x x) \cos(k_y y), && \text{(F.12)} \\ \hat{z} \cdot \mathrm{rot_t}\, \boldsymbol{e} &= kZ_F k_x C_H^{\mathrm{rect}} k_x \cos(k_x x) \cos(k_y y) + kZ_F k_y C_H^{\mathrm{rect}} \cos(k_x x) k_y \cos(k_y y), && \text{(F.13)} \\ \mathrm{div_t}\, \boldsymbol{e} &= 0, && \text{(F.14)} \\ h_x &= -k_x k_z C_H^{\mathrm{rect}} \sin(k_x x) \cos(k_y y), && \text{(F.15)} \\ h_y &= -k_y k_z C_H^{\mathrm{rect}} \cos(k_x x) \sin(k_y y), && \text{(F.16)} \\ \hat{z} \cdot \mathrm{rot_t}\, \boldsymbol{h} &= 0. && \text{(F.17)} \end{aligned}$$

Hierbei gilt $m \geq 0$ und $n \geq 0$, jedoch ohne $m = n = 0$. Das C_H^{rect} ergibt sich ebenfalls aus der Normierung auf 0,5W.

F.2 Die Kreisapertur

Bei einer kreisrunden Apertur mit dem Radius a gelte

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_m(k_{mn}^E a) &= 0, && \text{(F.18)} \\ \mathrm{J}'_m(k_{mn}^H a) &= 0 && \text{(F.19)} \end{aligned}$$

sowie

$$k_z = -\mathrm{j}\sqrt{{k_{mn}}^2 - k^2}. \tag{F.20}$$

Für die in positiver z-Richtung laufende E-Welle ergibt sich hiermit

$$\begin{aligned} e_r^{\cos} &= -k_z k_{mn}^E C_E^{\mathrm{circ}} \mathrm{J}'_m(k_{mn}^E r) \cos m\varphi, && \text{(F.21)} \\ e_\varphi^{\cos} &= \frac{k_z m}{r} C_E^{\mathrm{circ}} \mathrm{J}_m(k_{mn}^E r) \sin m\varphi, && \text{(F.22)} \\ \hat{z} \cdot \mathrm{rot_t}\, \boldsymbol{e}^{\cos} &= 0, && \text{(F.23)} \\ \mathrm{div_t}\, \boldsymbol{e}^{\cos} &= \frac{e_r^{\cos}}{r} - k_z (k_{mn}^E)^2 C_E^{\mathrm{circ}} \mathrm{J}''_m(k_{mn}^E r) \cos m\varphi \\ &\quad + \frac{k_z m}{r^2} C_E^{\mathrm{circ}} \mathrm{J}_m(k_{mn}^E r)(m \cos m\varphi), && \text{(F.24)} \\ h_r^{\cos} &= -\frac{kY_F m}{r} C_E^{\mathrm{circ}} \mathrm{J}_m(k_{mn}^E r) \sin m\varphi, && \text{(F.25)} \\ h_\varphi^{\cos} &= -kY_F k_{mn}^E C_E^{\mathrm{circ}} \mathrm{J}'_m(k_{mn}^E r) \cos m\varphi, && \text{(F.26)} \\ \hat{z} \cdot \mathrm{rot_t}\, \boldsymbol{h}^{\cos} &= \frac{h_\varphi^{\cos}}{r} - kY_F (k_{mn}^E)^2 C_E^{\mathrm{circ}} \mathrm{J}''_m(k_{mn}^E r) \cos m\varphi \\ &\quad + \frac{kY_F m}{r^2} C_E^{\mathrm{circ}} \mathrm{J}_m(k_{mn}^E r)(m \cos m\varphi), && \text{(F.27)} \end{aligned}$$

wobei $m \geq 0$, $n > 0$ und $Y_F = 1/Z_F$ sind. Das C_E^{circ} folgt erneut aus der Normierung auf 0,5W. Man beachte, daß alle Größen für $r \to 0$ verschwinden mit den folgenden Ausnahmen bei $m = 1$:

$$\begin{aligned} e_r^{\cos}(r=0) &= -\frac{k_z k_{1n}^E C_E^{\mathrm{circ}}}{2}, && \text{(F.28)} \\ h_\varphi^{\cos}(r=0) &= -\frac{kY_F k_{1n}^E C_E^{\mathrm{circ}}}{2}. && \text{(F.29)} \end{aligned}$$

Für die in positiver z-Richtung laufende H-Welle ergibt sich hiermit

$$e_r^{\cos} = \frac{kZ_F m}{r} C_H^{\mathrm{circ}} \mathrm{J}_m(k_{mn}^H r) \sin m\varphi, \tag{F.30}$$

$$e_\varphi^{\cos} = kZ_F k_{mn}^H C_H^{\mathrm{circ}} \mathrm{J}_m'(k_{mn}^H r) \cos m\varphi, \tag{F.31}$$

$$\begin{aligned}\hat{z} \cdot \mathrm{rot_t}\, \boldsymbol{e}^{\cos} = \frac{e_\varphi^{\cos}}{r} &+ kZ_F (k_{mn}^H)^2 C_H^{\mathrm{circ}} \mathrm{J}_m''(k_{mn}^H r) \cos m\varphi \\ &- \frac{kZ_F m}{r^2} C_H^{\mathrm{circ}} \mathrm{J}_m(k_{mn}^H r)(m \cos m\varphi),\end{aligned} \tag{F.32}$$

$$\mathrm{div_t}\, \boldsymbol{e}^{\cos} = 0, \tag{F.33}$$

$$h_r^{\cos} = -k_z k_{mn}^H C_H^{\mathrm{circ}} \mathrm{J}_m'(k_{mn}^H r) \cos m\varphi, \tag{F.34}$$

$$h_\varphi^{\cos} = \frac{k_z m}{r} C_H^{\mathrm{circ}} \mathrm{J}_m(k_{mn}^H r) \sin m\varphi, \tag{F.35}$$

$$\hat{z} \cdot \mathrm{rot_t}\, \boldsymbol{h}^{\cos} = 0, \tag{F.36}$$

wobei $m \geq 0$ und $n > 0$ sind. Das C_H^{circ} folgt wieder aus der Normierung auf 0,5W. Man beachte, daß auch hier alle Größen für $r \to 0$ verschwinden mit den folgenden Ausnahmen bei $m = 1$:

$$e_\varphi^{\cos}(r = 0) = \frac{kZ_F k_{1n}^H C_H^{\mathrm{circ}}}{2}, \tag{F.37}$$

$$h_r^{\cos}(r = 0) = -\frac{k_z k_{1n}^H C_H^{\mathrm{circ}}}{2}. \tag{F.38}$$

Diese Darstellung gilt zunächst für die Kosinus-Polarisation. Die orthogonale Sinus-Polarisation ergibt sich durch den vorzeichenrichtigen Austausch der trigonometrischen Funktionen.

Zur Bestimmung der Ableitungen der Besselfunktionen wird ausschließlich die Rekursionsbeziehung

$$\mathrm{J}_m'(x) = \mathrm{J}_{m-1}(x) - \frac{m}{x}\mathrm{J}_m(x) \tag{F.39}$$

verwendet.

Um die Normierung analytisch durchführen zu können, sind die Integrale

$$\int_0^a \mathrm{J}_m{}^2(k_c r)\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{1}{2m}\left(1 - \mathrm{J}_0{}^2(k_c a) - \mathrm{J}_m{}^2(k_c a) - 2\sum_{i=1}^{m-1} \mathrm{J}_i{}^2(k_c a)\right) \tag{F.40}$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_0^a \mathrm{J}_m'{}^2(k_c r) r\, \mathrm{d}r = \frac{a^2}{4}&\left[\mathrm{J}_{m-1}{}^2(k_c a) - \mathrm{J}_m(k_c a)\left(\mathrm{J}_{m-2}(k_c a) + \mathrm{J}_{m+2}(k_c a)\right) + \mathrm{J}_{m+1}{}^2(k_c a)\right] \\ &- \frac{m}{2k_c{}^2}\left(1 - \mathrm{J}_0{}^2(k_c a) - \mathrm{J}_m{}^2(k_c a) - 2\sum_{i=1}^{m-1} \mathrm{J}_i{}^2(k_c a)\right)\end{aligned} \tag{F.41}$$

vonnöten. Die Herleitung des ersten Integrals beruht auf der Rekursionsrelation der Besselfunktion[1], dem Integral

$$\int_0^\xi \mathrm{J}_\nu(x)\mathrm{J}_{\nu+1}(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{J}_{\nu+i+1}{}^2(\xi), \qquad \mathrm{Re}\,\nu > -1 \qquad \text{([12]: 6.512 Nr. 7)}$$

[1] Siehe bspw. Nr. 9.1.27 in [1].

und der Normierungsrelation der Besselfunktion[2]. Das zweite Integral folgt entsprechend, wenn man je einmal die Beziehungen (F.39) und

$$\mathrm{J}_{m-1}(x) - \mathrm{J}_{m+1}(x) = 2\mathrm{J}'_m(x)$$

einsetzt und zusätzlich das Integral

$$\int x \mathrm{J}_\nu{}^2(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\left(\mathrm{J}_\nu{}^2(\alpha x) - \mathrm{J}_{\nu-1}(\alpha x)\mathrm{J}_{\nu+1}(\alpha x)\right) \qquad \text{([12]: 5.54 Nr. 2)}$$

anwendet.

[2]Siehe bspw. Nr. 9.1.76 in [1].

Anhang G

Numerische Flächenintegration

An dieser Stelle werden die verwendeten Integrationsregeln nach Hammer, Marlowe und Stroud [15] für die numerische Integration über eine Dreiecksfläche angegeben. Ein Polynom zweiten Grades ist dabei mit der Drei-Punkte-Regel und ein Polynom fünften Grades mit der Sieben-Punkte-Regel exakt integrierbar.

$\iint_D f(\vec{r})\mathrm{d}A \approx \sum_{i=1}^{3} g_i f(\vec{r}_i)$		
i	$\vec{r}_i$	g_i
1;2;3	$\frac{1}{2}\left(\vec{r}^{1;2;3} + \vec{r}^{c}\right)$	$\frac{1}{3}D$
$\vec{r}^{1;2;3}$: Eckpunkte des Dreiecks $\vec{r}^{c}$: Schwerpunkt des Dreiecks D: Fläche des Dreiecks		

Tabelle G.1: Drei-Punkte-Regel für die Integration über eine Dreiecksfläche.

$\iint_D f(\vec{r})\mathrm{d}A \approx \sum_{i=1}^{7} g_i f(\vec{r}_i)$		
i	$\vec{r}_i$	g_i
1;2;3	$\frac{1+\sqrt{15}}{7}\vec{r}^{1;2;3} + \frac{6-\sqrt{15}}{7}\vec{r}^{c}$	$\frac{155-\sqrt{15}}{1200}D$
4;5;6	$\frac{1-\sqrt{15}}{7}\vec{r}^{1;2;3} + \frac{6+\sqrt{15}}{7}\vec{r}^{c}$	$\frac{155+\sqrt{15}}{1200}D$
7	$\vec{r}^{c}$	$\frac{9}{40}D$
$\vec{r}^{1;2;3}$: Eckpunkte des Dreiecks $\vec{r}^{c}$: Schwerpunkt des Dreiecks D: Fläche des Dreiecks		

Tabelle G.2: Sieben-Punkte-Regel für die Integration über eine Dreiecksfläche.

Anhang H

Iteratives Lösen von dünn besetzten linearen Gleichungssystemen

An dieser Stelle wird die Methode der bikonjugierten Gradienten dargestellt, die mitunter zur iterativen Lösung der teilweise dünn besetzten linearen Gleichungssysteme verwendet worden ist. Die Methode der bikonjugierten Gradienten geht auf die als nächstes erläuterte Methode der konjugierten Gradienten zurück, die von M. R. Hestenes und E. Stiefel [17] entwickelt worden ist. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, daß es theoretisch immer auf die exakte Lösung führt, spätestens wenn die Anzahl der Iterationen die Anzahl der Unbekannten erreicht. Da sich die Methode der konjugierten Gradienten jedoch nur auf Gleichungssysteme mit hermiteschen und positiv definiten Matrizen anwenden läßt, ist ihre allgemeine Anwendbarkeit eingeschränkt. Mit der Abwandlung zur Methode der bikonjugierten Gradienten wird dieses Problem jedoch behoben. Die folgenden Darstellungen resultieren aus einer Verallgemeinerung der Ausführungen von T. K. Sarkar [27] mit Hilfe der Darlegungen von W. Hackbusch [14].

H.1 Die Methode der konjugierten Gradienten

Bei der Methode der konjugierten Gradienten wird das Problem des Lösens eines linearen Gleichungssystems der Form

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b} \tag{H.1}$$

auf das Minimieren eines Funktionals zurückgeführt. Je nach Art dieses Funktionals ergeben sich verschiedene Verfahren. Bei der Wahl des Funktionals ist darauf zu achten, daß eine effektive Minimierung desselben ermöglicht wird.

Als Funktional wird hierbei

$$\begin{aligned} F(\underline{x}) &= \underline{x}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} - \underline{b}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{x} - \underline{x}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{b} \\ &= \langle \underline{x}, \underline{A} \cdot \underline{x} \rangle - \langle \underline{b}, \underline{x} \rangle - \langle \underline{x}, \underline{b} \rangle \end{aligned} \tag{H.2}$$

verwendet, wobei das Skalarprodukt zweier Spaltenvektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ in diesem Sinne zu

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \underline{a}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{b} \tag{H.3}$$

definiert worden ist. Desweiteren sei $\underline{A}$ hermitesch

$$\underline{A}^{\mathrm{H}} = \underline{A} \tag{H.4}$$

und positiv definit

$$\underline{x}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} > 0 \qquad \forall\, \underline{x} \neq \underline{0}, \tag{H.5}$$

so daß das Funktional rein reell wird. Aus der formalen Definition des Funktionals über Skalarprodukte kann man ersehen, daß sich die folgenden Überlegungen auch auf die Lösung einer allgemeinen linearen Operatorgleichung übertragen lassen. Dabei würde dem Begriff hermitesch dann der Begriff der Selbstadjungiertheit entsprechen, da hierbei auch

$$\langle \underline{u}, \underline{A} \cdot \underline{v} \rangle = \langle \underline{A} \cdot \underline{u}, \underline{v} \rangle \tag{H.6}$$

gilt, sofern man vom möglichen Randterm absieht.

Die Tatsache, daß dieses Funktional genau und ausschließlich für die exakte Lösung $\underline{x}_\infty$ minimal wird, ergibt sich aus den folgenden Umformungen:

$$\begin{aligned} F(\underline{x}) &= \langle \underline{x}, \underline{A} \cdot \underline{x} \rangle - \langle \underline{b}, \underline{x} \rangle - \langle \underline{x}, \underline{b} \rangle \\ &= \langle \underline{x}, \underline{A} \cdot \underline{x} \rangle - \langle \underline{A} \cdot \underline{x}_\infty, \underline{x} \rangle - \langle \underline{x}, \underline{A} \cdot \underline{x}_\infty \rangle \\ &= \langle \underline{x}, \underline{A} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_\infty) \rangle - \langle \underline{A} \cdot \underline{x}_\infty, \underline{x} - \underline{x}_\infty \rangle - \langle \underline{A} \cdot \underline{x}_\infty, \underline{x}_\infty \rangle \\ &= \langle \underline{x} - \underline{x}_\infty, \underline{A} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_\infty) \rangle - \langle \underline{x}_\infty, \underline{A} \cdot \underline{x}_\infty \rangle \,, \end{aligned}$$

wobei die letzte Umformung laut Gleichung (H.6) nur bei hermitescher Koeffizientenmatrix möglich ist. Wenn die Koeffizientenmatrix positiv definit ist, sind beide Skalarproduktterme reell und niemals negativ, wobei der zweite Term sogar konstant ist. Das Funktional erreicht also ausschließlich bei $\underline{x} = \underline{x}_\infty$ sein Minimum. Im Falle einer nicht definiten Matrix kann man über die Variation des Vektors[1] $\underline{x}$ die folgende Relation gewinnen:

$$\delta F(\underline{x}) = \langle \delta\underline{x}, \underline{A} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_\infty) \rangle + \langle \underline{x} - \underline{x}_\infty, \underline{A} \cdot \delta\underline{x} \rangle \,.$$

Hieraus ergibt sich also, daß

$$\delta F(\underline{x}_\infty) = 0$$

ist und somit F bei *beliebigen* Variationen $\delta\underline{x}$ genau bei $\underline{x} = \underline{x}_\infty$ zumindest stationär wird. Ein Extremum kann im allgemeinen hier nicht mehr vorliegen, da das Funktional nun auch komplexwertig sein kann. Ein stationärer Punkt kann jedoch mit Extremalstrategien nicht immer erreicht werden, so daß die Iterationsverfahren in diesem Falle nicht mehr unbedingt konvergieren müssen, wie dies bei der Minimumsuche der Fall sein muß.

Die Lösung wird nun gesucht, indem man von der letzten Approximation $\underline{x}_i$ ausgehend in die Richtung $\underline{p}_i$ gemäß

$$\underline{x}_{i+1} = \underline{x}_i + \alpha_i \underline{p}_i, \tag{H.7}$$

solange fortschreitet, bis ein stationärer Punkt erreicht wird. Um das geeignete α_i zu ermitteln, setzt man diesen Ansatz in das Funktional (H.2) ein, wobei man die Zerlegung $\alpha_i = \alpha' + \mathrm{j}\alpha''$ verwendet. Der stationäre Punkt ergibt sich dann aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha'} &= 0 \Rightarrow \alpha' = \frac{\underline{p}_i^{\mathrm{H}} \cdot \underline{r}_i + \underline{r}_i^{\mathrm{H}} \cdot \underline{p}_i}{2\underline{p}_i^{\mathrm{H}} \cdot \underline{A} \cdot \underline{p}_i}, \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha''} &= 0 \Rightarrow \alpha'' = \mathrm{j}\frac{\underline{r}_i^{\mathrm{H}} \cdot \underline{p}_i - \underline{p}_i^{\mathrm{H}} \cdot \underline{r}_i}{2\underline{p}_i^{\mathrm{H}} \cdot \underline{A} \cdot \underline{p}_i} \end{aligned}$$

[1] Quasi als Funktion der Dimensionsnummern betrachtet.

durch die Addition beider Anteile zu

$$\alpha_i = \frac{\underline{p}_i^{\mathrm{H}} \cdot \underline{r}_i}{\underline{p}_i^{\mathrm{H}} \cdot \underline{A} \cdot \underline{p}_i} = \frac{\left\langle \underline{p}_i, \underline{r}_i \right\rangle}{\left\langle \underline{p}_i, \underline{A} \cdot \underline{p} \right\rangle}, \tag{H.8}$$

wobei das Residuum $\underline{r}_i$ durch

$$\begin{aligned} \underline{r}_i &= \underline{b} - \underline{A} \cdot \underline{x}_i \\ &= \underline{r}_{i-1} - \alpha_{i-1} \underline{A} \cdot \underline{p}_{i-1} \end{aligned} \tag{H.9}$$

definiert wird. Es ist zu berücksichtigen, daß hierbei nur die hermitesche Eigenschaft vorausgesetzt wird.

Nun soll die Suchrichtung $\underline{p}_i$ genauer untersucht werden. Hierzu beachtet man, daß für ein optimales $\underline{x}$

$$\begin{aligned} \delta F(\underline{x}) &= \langle \delta \underline{x}, \underline{A} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_\infty) \rangle + \langle \underline{x} - \underline{x}_\infty, \underline{A} \cdot \delta \underline{x} \rangle \\ &= - \langle \delta \underline{x}, \underline{r} \rangle - \langle \underline{r}, \delta \underline{x} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

gelten muß, wobei hier die hermitesche Eigenschaft in Form der Selbstadjungiertheit zur Anwendung kommt. Es folgt somit, daß entweder $\underline{r} = \underline{0}$ ist, was nur für den Fall $\underline{x} = \underline{x}_\infty$ gilt, oder daß die Variation orthogonal zum Residuum sein muß. Im Iterationsprozeß findet die Variation des Funktionals jeweils nur in Suchrichtung statt, um den stationären Punkt bezüglich dieser Richtung zu finden. Damit muß im optimalen Punkt bezüglich einer Suchrichtung das entsprechende Residuum orthogonal zu dieser Suchrichtung sein:

$$\left\langle \underline{r}_{i+1}, \underline{p}_i \right\rangle = \left\langle \underline{p}_i, \underline{r}_{i+1} \right\rangle = 0. \tag{H.10}$$

Die Problematik besteht nun darin, daß die Iterierte $\underline{x}_{i+1}$ nicht nur optimal bezüglich der Suchrichtung $\underline{p}_i$ sondern auch weiterhin bezüglich aller vorherigen Suchrichtungen sein soll. Denn nur in dieser Weise ist es möglich, mehrfache Suchvorgänge bezüglich gleicher Richtungen zu vermeiden. Es sei nun $\underline{x}_i$ optimal bezüglich aller $\underline{p}_k$ mit $k < i$, so ergibt sich mit

$$\underline{r}_i = \underline{r}_{k+1} - \sum_{l=k+1}^{i-1} \alpha_l \underline{A} \cdot \underline{p}_l$$

über

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \underline{r}_i, \underline{p}_k \right\rangle \qquad \forall k : 0 \le k < i \\ &= \underbrace{\left\langle \underline{r}_{k+1}, \underline{p}_k \right\rangle}_{=0} - \sum_{l=k+1}^{i} \alpha_l \left\langle \underline{A} \cdot \underline{p}_l, \underline{p}_k \right\rangle \end{aligned}$$

schließlich

$$\left\langle \underline{A} \cdot \underline{p}_l, \underline{p}_k \right\rangle = \left\langle \underline{p}_l, \underline{A} \cdot \underline{p}_k \right\rangle = 0 \qquad \forall k, l : i \ge l > k \ge 0.$$

Da $\underline{A}$ hermitesch sein soll, ergibt sich letztlich

$$\left\langle \underline{A} \cdot \underline{p}_l, \underline{p}_k \right\rangle = \left\langle \underline{p}_l, \underline{A} \cdot \underline{p}_k \right\rangle = 0 \qquad \forall\, l \ne k. \tag{H.11}$$

Diese Eigenschaft nennt man $\underline{A}$-Orthogonalität oder man sagt auch, daß $\underline{p}_k$ und $\underline{p}_l$ konjugiert zueinander seien. Darauf ist auch die Bezeichnung des Verfahrens zurückzuführen. Im folgenden ist also eine Vorschrift anzugeben, die auf möglichst einfache Weise einen Satz von konjugierten Suchvektoren liefert.

Rein formal läßt sich ein solcher Satz von konjugierten Suchvektoren mittels

$$\underline{p}_0 = \underline{r}_0 \qquad \text{und}$$

$$\underline{p}_{i+1} = \underline{r}_{i+1} - \sum_{l=0}^{i} \frac{\left\langle \underline{\underline{A}} \cdot \underline{r}_{i+1}, \underline{p}_l \right\rangle}{\left\langle \underline{\underline{A}} \cdot \underline{p}_l, \underline{p}_l \right\rangle} \underline{p}_l \tag{H.12}$$

erstellen, wie man durch vollständige Induktion leicht sieht. Sollte $\underline{r}_{i+1} = \underline{0}$ sein, so ist die exakte Lösung erreicht und die Iteration wird abgebrochen. Dies ist jedoch äußerst ineffizient, da der Suchvektor jedesmal bezüglich aller vorheriger Suchrichtungen vektoriell konjugiert wird.

Es ist zunächst notwendig, einige Relationen zwischen den Vektoren zu untersuchen. Hierfür soll über

$$U_i = \text{span}(\underline{p}_0, \ldots, \underline{p}_i) \tag{H.13}$$

der Raum definiert werden, der über die Suchvektoren aufgespannt wird. Aus der Definition (H.12) folgt dann direkt

$$U_i = \text{span}(\underline{r}_0, \ldots, \underline{r}_i), \tag{H.14}$$

wie sich durch vollständige Induktion zeigen läßt. Von fundamentaler Bedeutung ist hingegen, daß es sich bei U_i um einen Krylov-Raum handelt:

$$U_i = \text{span}(\underline{r}_0, \underline{\underline{A}} \cdot \underline{r}_0, \ldots, \underline{\underline{A}}^i \cdot \underline{r}_0). \tag{H.15}$$

Dies läßt sich mittels vollständiger Induktion zeigen: Die Induktionsannahme ist trivialerweise per definitionem für $i = 0$ erfüllt. Sei (H.15) nun für $i = (m-1)$ richtig, dann ergibt sich aus

$$\underline{p}_{m-1} \in U_{m-1} = \text{span}(\underline{r}_0, \ldots, \underline{\underline{A}}^{m-1} \cdot \underline{r}_0)$$

unmittelbar

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{p}_{m-1} \in \text{span}(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{r}_0, \ldots, \underline{\underline{A}}^m \cdot \underline{r}_0) \subset \text{span}(\underline{r}_0, \ldots, \underline{\underline{A}}^m \cdot \underline{r}_0).$$

Unter der Beachtung von (H.9) ergibt sich, daß

$$\underline{r}_m \in \text{span}(\underline{r}_0, \ldots, \underline{\underline{A}}^m \cdot \underline{r}_0)$$

ist. Der komplette Induktionsschluß führt deshalb dazu, daß

$$\text{span}(\underline{r}_0, \ldots, \underline{r}_m) \subseteq \text{span}(\underline{r}_0, \underline{\underline{A}} \cdot \underline{r}_0, \ldots, \underline{\underline{A}}^m \cdot \underline{r}_0)$$

gilt. Da der Unterraum seine maximale Dimension besitzt, muß ferner die Gleichheit gelten, woraus sofort (H.15) folgt; q.e.d.

Aus der Tatsache, daß U_i ein Krylov-Raum ist, folgt

$$\left\langle \underline{\underline{A}} \cdot \underline{r}_{i+1}, \underline{p}_l \right\rangle = 0 \quad \text{mit} \quad 0 \leq l \leq i-1. \tag{H.16}$$

Dies ergibt sich daraus, daß zunächst einmal bei hermitescher Matrix

$$\left\langle \underline{\underline{A}} \cdot \underline{r}_{i+1}, \underline{p}_l \right\rangle = \left\langle \underline{r}_{i+1}, \underline{\underline{A}} \cdot \underline{p}_l \right\rangle$$

gilt und ferner aus

$$\underline{p}_l \in U_{i-1}$$

unter Beachtung der Eigenschaft des Krylov-Raumes

$$\underline{A} \cdot \underline{p}_l \in U_i$$

folgt. Dabei erklärt sich das Verschwinden des Skalarproduktes aus der Orthogonalität von $\underline{r}_{i+1}$ zu U_i, die durch die optimale Wahl der Suchvektoren gegeben ist. Bei einer numerischen Umsetzung geht die dem zugrunde liegende $\underline{A}$-Orthogonalität der Suchrichtungen jedoch nach einigen Iterationen verloren, und muß gegebenenfalls zusätzlich erzwungen werden.

Aus der Eigenschaft (H.16) folgt unmittelbar eine erhebliche Vereinfachung von (H.12), da alle Summenterme bis auf einem verschwinden:

$$\begin{aligned} \underline{p}_0 &= \underline{r}_0 \qquad \text{und} \\ \underline{p}_{i+1} &= \underline{r}_{i+1} + \beta_i \underline{p}_i \qquad \text{mit} \\ \beta_i &= -\frac{\left\langle \underline{A} \cdot \underline{r}_{i+1}, \underline{p}_i \right\rangle}{\left\langle \underline{A} \cdot \underline{p}_i, \underline{p}_i \right\rangle}. \end{aligned} \tag{H.17}$$

Ferner ergibt sich aus der Optimalität von $\underline{r}_i$ bezüglich der Suchvektoren aus U_{i-1}, daß

$$\begin{aligned} \left\langle \underline{p}_i, \underline{r}_i \right\rangle &= \langle \underline{r}_i, \underline{r}_i \rangle - \left\langle \beta_{i-1} \underline{p}_{i-1}, \underline{r}_i \right\rangle \\ &= \|\underline{r}_i\|^2 \end{aligned}$$

ist. Damit vereinfacht sich (H.8) zu

$$\alpha_i = \frac{\|\underline{r}_i\|^2}{\left\langle \underline{p}_i, \underline{A} \cdot \underline{p} \right\rangle}. \tag{H.18}$$

Setzt man dies in (H.17) ein, so ergibt sich zunächst bei einer hermiteschen Matrix

$$\beta_i = -\frac{\left\langle \underline{r}_{i+1}, \alpha_i \underline{A} \cdot \underline{p}_i \right\rangle}{\|\underline{r}_i\|^2},$$

woraus sich dann wegen

$$\begin{aligned} \left\langle \underline{r}_{i+1}, \alpha_i \underline{A} \cdot \underline{p}_i \right\rangle &= \langle \underline{r}_{i+1}, \underline{r}_i - \underline{r}_{i+1} \rangle \\ &= - \left\| \underline{r}_{i+1} \right\|^2 + \langle \underline{r}_{i+1}, \underline{r}_i \rangle \\ &= - \left\| \underline{r}_{i+1} \right\|^2 \end{aligned}$$

schließlich

$$\beta_i = \frac{\left\| \underline{r}_{i+1} \right\|^2}{\|\underline{r}_i\|^2} \tag{H.19}$$

ergibt.

Zusammenfassend ergibt sich nun der folgende Algorithmus:

1. $\underline{x}_0$ wählen $\Rightarrow \quad \underline{r}_0 = \underline{b} - \underline{A} \cdot \underline{x}_0, \quad \underline{p}_0 = \underline{r}_0;$
2. solange die Lösung nicht hinreichend genau erreicht worden ist, sind die nun folgenden Schritte laufend zu wiederholen:

3. nächste Iterierte berechnen gemäß

$$\alpha_i = \frac{\|\underline{r}_i\|^2}{\left\langle \underline{p}_i, \underline{A} \cdot \underline{p}_i \right\rangle},$$
$$\underline{x}_{i+1} = \underline{x}_i + \alpha_i \underline{p}_i,$$
$$\underline{r}_{i+1} = \underline{r}_i - \alpha_i \underline{A} \cdot \underline{p}_i;$$

4. neuen Suchvektor bestimmen gemäß

$$\beta_i = \frac{\|\underline{r}_{i+1}\|^2}{\|\underline{r}_i\|^2}$$
$$\underline{p}_{i+1} = \underline{r}_{i+1} + \beta_i \underline{p}_i.$$

Es bleibt anzumerken, daß das Verfahren der konjugierten Gradienten bei hermiteschen und positiv definiten $n \times n$-Matrizen immer zu der exakten Lösung führt, spätestens nach n Iterationen. Es handelt sich also eigentlich um ein exaktes Lösungsverfahren, was jedoch vorzeitig beendet werden kann, sofern eine hinreichende Genauigkeit der Lösung erreicht worden ist. Man beachte, daß in diesem Falle die α_i und β_i rein reell sind.

Rein formal kann man jedes Gleichungssystem

$$\underline{B} \cdot \underline{x} = \underline{c}$$

mit beliebiger Koeffizientenmatrix in ein Gleichungssystem mit hermitescher positiv definiter Koeffizientenmatrix überführen:

$$\underbrace{(\underline{B}^{\mathrm{H}} \underline{B})}_{=\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underbrace{\underline{B}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{c}}_{=\underline{b}}.$$

Dieses Vorgehen ist jedoch nicht ratsam, da hierbei die Konditionszahl der Matrix quadriert wird und sich das Lösungsverhalten deutlich verschlechtert. In diesem Falle ist also ein anderes Verfahren zu wählen, wie zum Beispiel die Methode der bikonjugierten Gradienten.

H.2 Die Methode der bikonjugierten Gradienten

Das Verfahren der bikonjugierten Gradienten bietet die Möglichkeit, das Gleichungssystem

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

iterativ zu lösen, wobei an die komplexwertige reguläre Matrix $\underline{A}$ keine weiteren Anforderungen gestellt werden müssen. Das Verfahren beruht nun darauf, daß das adjungierte Gleichungssystem

$$\underline{A}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{y} = \underline{c} \tag{H.20}$$

gleichzeitig gelöst werden soll. Dabei kann $\underline{c} \neq \underline{0}$ beliebig gewählt werden. In diesem Falle kann man beide Gleichungssysteme zu

$$\begin{pmatrix} 0 & \underline{A}^{\mathrm{H}} \\ \underline{A} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{c} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \tag{H.21}$$

zusammenfassen. Die Matrix dieses zusammengesetzten Gleichungssystems ist offensichtlich hermitesch. Dessen Lösung ergibt sich deshalb im stationären Punkt des Funktionals (H.2), falls man die entsprechenden neuen Größen einsetzt. Durch das Auswerten der Ausdrücke erhält man dann

$$\begin{aligned} F(\underline{x}, \underline{y}) &= \underline{x}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{A}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{y} + \underline{y}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{A} \cdot \underline{x} - \underline{x}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{c} - \underline{y}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{b} - \underline{c}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{x} - \underline{b}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{y} \\ &= \left\langle \underline{A} \cdot \underline{x}, \underline{y} \right\rangle + \left\langle \underline{A} \cdot \underline{y}, \underline{x} \right\rangle - \left\langle \underline{x}, \underline{c} \right\rangle - \left\langle \underline{y}, \underline{b} \right\rangle - \left\langle \underline{c}, \underline{x} \right\rangle - \left\langle \underline{b}, \underline{y} \right\rangle . \end{aligned}$$

Dabei ist anzumerken, daß das Funktional rein reellwertig ist. Der stationäre Punkt dieses Funktionals bleibt natürlich unverändert, wenn man die bezüglich $\underline{x}$ und $\underline{y}$ konstante reelle Zahl $(\left\langle \underline{b}, \underline{y}_\infty \right\rangle + \left\langle \underline{y}_\infty, \underline{b} \right\rangle)$ hinzuaddiert, um ein neues Funktional zu erhalten:

$$\begin{aligned} G(\underline{x},\underline{y}) &= \left\langle \underline{A}\cdot\underline{x},\underline{y} \right\rangle + \left\langle \underline{y},\underline{A}\cdot\underline{x} \right\rangle - \left\langle \underline{x},\underline{c} \right\rangle - \left\langle \underline{y},\underline{b} \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \underline{c},\underline{x} \right\rangle - \left\langle \underline{b},\underline{y} \right\rangle + \left\langle \underline{b},\underline{y}_\infty \right\rangle + \left\langle \underline{y}_\infty,\underline{b} \right\rangle \\ &= \left\langle \underline{A}\cdot(\underline{x}-\underline{x}_\infty),\underline{y} \right\rangle + \left\langle \underline{y},\underline{A}\cdot(\underline{x}-\underline{x}_\infty) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \underline{A}\cdot\underline{x}_\infty,\underline{y}_\infty \right\rangle - \left\langle \underline{x},\underline{A}^{\mathrm{H}}\cdot\underline{y}_\infty \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \underline{y}_\infty,\underline{A}\cdot\underline{x}_\infty \right\rangle - \left\langle \underline{A}^{\mathrm{H}}\cdot\underline{y}_\infty,\underline{x} \right\rangle . \end{aligned}$$

Es gilt dabei zu beachten, daß

$$\underline{A}\cdot\underline{x}_\infty = \underline{b} \qquad \text{und} \qquad \underline{A}^{\mathrm{H}}\cdot\underline{y}_\infty = \underline{c}$$

sind und daß die Matrix $\underline{A}$ nicht unbedingt hermitesch ist. Schließlich ergibt sich hiermit dann

$$G(\underline{x},\underline{y}) = \left\langle \underline{A}\cdot(\underline{x}-\underline{x}_\infty),(\underline{y}-\underline{y}_\infty) \right\rangle + \left\langle (\underline{y}-\underline{y}_\infty),\underline{A}\cdot(\underline{x}-\underline{x}_\infty) \right\rangle . \tag{H.22}$$

H.2.1 Der allgemeine Fall

Im folgenden werden zunächst die Lösungen für das ursprüngliche und das ergänzte Gleichungssystem bei einer allgemeinen Matrix $\underline{A}$ gesucht. Für beide Gleichungssysteme werden hierzu gemäß

$$\underline{x}_{i+1} = \underline{x}_i + \alpha_i \underline{p}_i , \tag{H.23}$$

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + a_i \underline{w}_i \tag{H.24}$$

Suchrichtungen definiert, wobei die *komplexen* Zahlen α_i und a_i nun geeignet zu bestimmen sind. Zerlegt man die komplexen Zahlen α_i und a_i in Realteil und Imaginärteil,

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i' + \mathrm{j}\alpha_i'' , \\ a_i &= a_i' + \mathrm{j}a_i'' , \end{aligned}$$

so wird das Funktional G zu einer reellwertigen Funktion der reellen Variablen α_i', α_i'', a_i' und a_i'', deren stationärer Punkt gesucht wird. Hierzu berechnet man die dazugehörigen partiellen Ableitungen für α_i' und α_i'':

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \alpha_i'} &= \left\langle \underline{A}\cdot\underline{p}_i,\underline{y}_i-\underline{y}_\infty+a_i\underline{w}_i \right\rangle + \left\langle \underline{y}_i-\underline{y}_\infty+a_i\underline{w}_i,\underline{A}\cdot\underline{p}_i \right\rangle , \\ \frac{\partial G}{\partial \alpha_i''} &= -\mathrm{j}\left\langle \underline{A}\cdot\underline{p}_i,\underline{y}_i-\underline{y}_\infty+a_i\underline{w}_i \right\rangle + \mathrm{j}\left\langle \underline{y}_i-\underline{y}_\infty+a_i\underline{w}_i,\underline{A}\cdot\underline{p}_i \right\rangle . \end{aligned}$$

Indem man die zweite Gleichung durch $(-\mathrm{j})$ dividiert, beide Ableitungen zu null setzt und addiert, erhält man

$$a_i = \frac{\left\langle \underline{p}_i,\underline{q}_i \right\rangle}{\left\langle \underline{A}\cdot\underline{p}_i,\underline{w}_i \right\rangle} , \tag{H.25}$$

wobei das Residuum des adjungierten Gleichungssystems durch

$$\underline{q}_i = \underline{A}^{\mathrm{H}}\cdot(\underline{y}_\infty-\underline{y}_i) = \underline{c}-\underline{A}^{\mathrm{H}}\cdot\underline{y}_i \tag{H.26}$$

eingeführt worden ist. Aus den Ableitungen bezüglich a_i' und a_i'', die sich zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial a_i'} &= \left\langle \underline{A}\cdot(\underline{x}_i-\underline{x}_\infty+\alpha_i\underline{p}_i),\underline{w}_i\right\rangle + \left\langle \underline{w}_i,\underline{A}\cdot(\underline{x}_i-\underline{x}_\infty+\alpha_i\underline{p}_i)\right\rangle\\ \frac{\partial G}{\partial a_i''} &= \mathrm{j}\left\langle \underline{A}\cdot(\underline{x}_i-\underline{x}_\infty+\alpha_i\underline{p}_i),\underline{w}_i\right\rangle - \mathrm{j}\left\langle \underline{w}_i,\underline{A}\cdot(\underline{x}_i-\underline{x}_\infty+\alpha_i\underline{p}_i)\right\rangle\end{aligned}$$

ergeben, folgt in ähnlicher Art und Weise entsprechend

$$\alpha_i = \frac{\langle \underline{w}_i,\underline{r}_i\rangle}{\left\langle \underline{w}_i,\underline{A}\cdot\underline{p}_i\right\rangle} \tag{H.27}$$

wobei das Residuum des ursprünglichen Gleichungssystems

$$\underline{r}_i = \underline{A}\cdot(\underline{x}_\infty-\underline{x}_i)$$

verwendet worden ist. Aus

$$\underline{r}_{i+1} = \underline{r}_i - \alpha_i\underline{A}\cdot\underline{p}_i, \tag{H.28}$$

$$\underline{q}_{i+1} = \underline{q}_i - a_i\underline{A}^{\mathrm{H}}\cdot\underline{w}_i \tag{H.29}$$

folgt durch unmittelbares Einsetzen

$$\langle \underline{w}_i,\underline{r}_{i+1}\rangle = 0, \tag{H.30}$$

$$\left\langle \underline{p}_i,\underline{q}_{i+1}\right\rangle = 0. \tag{H.31}$$

Die Residuen sind in den optimalen Punkten jetzt orthogonal zu den jeweiligen Suchrichtungen des adjungierten Gleichungssystems. Um jede Suchrichtung nur einmal untersuchen zu müssen, soll dieses für alle vorherigen Suchrichtungen zutreffen.

In Analogie zum Verfahren der konjugierten Gradienten, siehe hierzu die Herleitung der Formel (H.11), müssen daher die Suchrichtungen für die beiden Gleichungssysteme selbst jeweils kreuzweise konjugiert, das heißt bikonjugiert, zueinander sein,

$$\left\langle \underline{w}_i,\underline{A}\cdot\underline{p}_j\right\rangle = \left\langle \underline{A}^{\mathrm{H}}\cdot\underline{w}_i,\underline{p}_j\right\rangle = 0 \qquad \forall\, i\neq j, \tag{H.32}$$

falls man die Optimalität einer Iterierten zu *allen* früheren Suchrichtungen fordert. Bei einer numerischen Implementation geht diese Eigenschaft wegen der endlichen Rechengenauigkeit jedoch nach einigen Iterationen verloren, so daß diese gegebenenfalls zusätzlich erzwungen werden muß.

In Abwandlung der Methode der konjugierten Gradienten führt man nun über

$$\underline{p}_{i+1} = \underline{r}_{i+1} + \beta_i\underline{p}_i, \tag{H.33}$$

$$\underline{w}_{i+1} = \underline{q}_{i+1} + b_i\underline{w}_i \tag{H.34}$$

die neuen Suchrichtungen ein. Damit ergeben sich

$$\alpha_i = \frac{\left\langle \underline{q}_i + b_{i-1}\underline{w}_{i-1},\underline{r}_i\right\rangle}{\left\langle \underline{w}_i,\underline{A}\cdot\underline{p}_i\right\rangle} = \frac{\left\langle \underline{q}_i,\underline{r}_i\right\rangle}{\left\langle \underline{w}_i,\underline{A}\cdot\underline{p}_i\right\rangle}$$

beziehungsweise

$$a_i = \frac{\left\langle \underline{r}_i + \beta_{i-1}\underline{p}_{i-1},\underline{q}_i\right\rangle}{\left\langle \underline{A}\cdot\underline{p}_i,\underline{w}_i\right\rangle} = \frac{\left\langle \underline{r}_i,\underline{q}_i\right\rangle}{\left\langle \underline{A}\cdot\underline{p}_i,\underline{w}_i\right\rangle},$$

woraus sofort

$$\alpha_i = a_i^* \tag{H.35}$$

folgt. Die Faktoren in Suchrichtung für die beiden Gleichungssysteme sind also komplex konjugiert zueinander.

Aus den Gleichungen (H.34) und (H.33) folgt ferner, daß

$$\left\langle \underline{q}_i, \underline{r}_{i+1} \right\rangle = 0, \tag{H.36}$$

$$\left\langle \underline{r}_i, \underline{q}_{i+1} \right\rangle = 0 \tag{H.37}$$

gilt. Hierbei ist zu beachten, daß die Orthogonalitäten (H.30) und (H.31) als Ausdruck der Optimalität bezüglich einer Suchrichtung für *alle* früheren Suchrichtungen gelten sollen. Somit sind die Residuen aufeinander folgender Iterationen bei optimaler Parameterwahl zueinander kreuzweise orthogonal.

Für die Konstante β_i zur Ermittlung der neuen Suchrichtung ergibt sich

$$\beta_i = -\frac{\left\langle \underline{A}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{w}_i, \underline{r}_{i+1} \right\rangle}{\left\langle \underline{A}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{w}_i, \underline{p}_i \right\rangle},$$

indem man die Gleichung (H.33) der Operation $\left\langle \underline{A}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{w}_i, \bullet \right\rangle$ unterwirft und dabei die Beziehung (H.32) berücksichtigt. Mit der kreuzweisen Orthogonalität (H.36) und der Beziehung (H.29) ergibt sich ferner:

$$\begin{aligned}
\beta_i &= -\frac{\left\langle \frac{\underline{q}_i - \underline{q}_{i+1}}{a_i}, \underline{r}_{i+1} \right\rangle}{\left\langle \underline{A}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{w}_i, \underline{r}_i + \beta_{i-1} \underline{p}_{i-1} \right\rangle} \\
&= \frac{\left\langle \frac{\underline{q}_{i+1}}{a_i}, \underline{r}_{i+1} \right\rangle}{\left\langle \frac{\underline{q}_i - \underline{q}_{i+1}}{a_i}, \underline{r}_i \right\rangle} \\
&= \frac{\left\langle \underline{q}_{i+1}, \underline{r}_{i+1} \right\rangle}{\left\langle \underline{q}_i, \underline{r}_i \right\rangle}.
\end{aligned} \tag{H.38}$$

Auf analoge Art und Weise ergibt sich der Parameter b_i für die neue Suchrichtung des adjungierten Gleichungssystems dann ausgehend von der Gleichung (H.34) mit Hilfe der kreuzweisen Orthogonalität (H.37) zu

$$b_i = \frac{\left\langle \underline{r}_{i+1}, \underline{q}_{i+1} \right\rangle}{\left\langle \underline{r}_i, \underline{q}_i \right\rangle}; \tag{H.39}$$

es gilt also:

$$b_i = \beta_i^*. \tag{H.40}$$

Zusammenfassend ergibt sich der Algorithmus für das Verfahren der bikonjugierten Gradienten zu:

1. $\underline{x}_0$ wählen $\Rightarrow$ $\underline{r}_0 = \underline{b} - \underline{A} \cdot \underline{x}_0$, $\underline{p}_0 = \underline{r}_0$,
   ferner setzen: $\underline{q}_0 = \underline{b}^* - \underline{A}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{x}_0^*$, $\underline{w}_0 = \underline{q}_0$;
2. solange die Lösung nicht hinreichend genau erreicht wurde, sind die nun folgenden Schritte laufend zu wiederholen:

3. nächste Iterierte berechnen gemäß

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \frac{\left\langle \underline{q}_i, \underline{r}_i \right\rangle}{\left\langle \underline{w}_i, \underline{A} \cdot \underline{p}_i \right\rangle}, \\
\underline{x}_{i+1} &= \underline{x}_i + \alpha_i \underline{p}_i, \\
\underline{r}_{i+1} &= \underline{r}_i - \alpha_i \underline{A} \cdot \underline{p}_i, \\
\underline{q}_{i+1} &= \underline{q}_i - \alpha_i^* \underline{A}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{w}_i;
\end{aligned}$$

4. neue Suchvektoren bestimmen gemäß

$$\begin{aligned}
\beta_i &= \frac{\left\langle \underline{q}_{i+1}, \underline{r}_{i+1} \right\rangle}{\left\langle \underline{q}_i, \underline{r}_i \right\rangle}, \\
\underline{p}_{i+1} &= \underline{r}_{i+1} + \beta_i \underline{p}_i, \\
\underline{w}_{i+1} &= \underline{q}_{i+1} + \beta_i^* \underline{w}_i.
\end{aligned}$$

Man beachte, daß der Anregungsvektor des adjungierten Gleichungssystems vollkommen willkürlich zu $\underline{b}^*$ gesetzt worden ist und die Iterierten dieses Gleichungssystems gar nicht zu berechnen sind. Es bleibt anzumerken, daß das Verfahren der bikonjugierten Gradienten zusammenbrechen kann, falls ein Skalarprodukt im Nenner plötzlich null ergibt.

H.2.2 Der symmetrische Fall

Im symmetrischen Fall, also falls $\underline{A} = \underline{A}^{\mathrm{T}}$ gilt, vereinfacht sich die obige Methode der bikonjugierten Gradienten derart, daß nur noch ein Matrix-Vektor-Produkt pro Iteration erforderlich ist. Stellt man die Tatsache in Rechnung, daß nun $\underline{A}^{\mathrm{H}} = \underline{A}^*$ ist, so wird das ergänzte Gleichungssystem einfach zum konjugiert komplexen des ursprünglichen und kann mithin entfallen.

Zusammenfassend ergibt sich der Algorithmus für das symmetrische Verfahren der bikonjugierten Gradienten zu:

1. $\underline{x}_0$ wählen $\Rightarrow$ $\underline{r}_0 = \underline{b} - \underline{A} \cdot \underline{x}_0$, $\underline{p}_0 = \underline{r}_0$;
2. solange die Lösung nicht hinreichend genau erreicht wurde, sind die nun folgenden Schritte laufend zu wiederholen:
3. nächste Iterierte berechnen gemäß

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \frac{\left\langle \underline{r}_i^*, \underline{r}_i \right\rangle}{\left\langle \underline{p}_i^*, \underline{A} \cdot \underline{p}_i \right\rangle}, \\
\underline{x}_{i+1} &= \underline{x}_i + \alpha_i \underline{p}_i, \\
\underline{r}_{i+1} &= \underline{r}_i - \alpha_i \underline{A} \cdot \underline{p}_i;
\end{aligned}$$

4. neue Suchvektor bestimmen gemäß

$$\begin{aligned}
\beta_i &= \frac{\left\langle \underline{r}_{i+1}^*, \underline{r}_{i+1} \right\rangle}{\left\langle \underline{r}_i^*, \underline{r}_i \right\rangle}, \\
\underline{p}_{i+1} &= \underline{r}_{i+1} + \beta_i \underline{p}_i.
\end{aligned}$$

H.3 Vorkonditionierung

Die Vorkonditionierung eines Gleichungssystems beruht darauf, daß man das Gleichungssystem mit der Inversen einer Vorkonditionierungsmatrix $\underline{M}$ von links multipliziert, um die Konditionszahl des Gleichungssystems zu verbessern und eine Lösung mit weniger Iterationsschritten zu erzielen:

$$\underbrace{\underline{M}^{-1} \cdot \underline{A}}_{=\tilde{\underline{A}}} \cdot \underline{x} = \underbrace{\underline{M}^{-1} \cdot \underline{b}}_{=\tilde{\underline{b}}} . \tag{H.41}$$

Es ist also ein neues Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix $\tilde{\underline{A}}$ und dem Anregungsvektor $\tilde{\underline{b}}$ zu lösen. Offensichtlich beruht dieses Vorgehen darauf, daß $\underline{M}$ eine möglichst gute Schätzung von $\underline{A}$ sein muß, so daß sich durch die Multiplikation mit deren Inversen eine gute Approximation für die Lösung ergibt. Diese Schätzung muß sich jedoch leicht invertieren lassen, damit kein großer zusätzlicher Aufwand entsteht.

Eine einfache Wahl ist beispielsweise die des Jacobi-Vorkonditionierers:

$$\underline{M} = \mathrm{diag}(m_1; \ldots; m_n) \quad \text{mit} \quad m_i = \begin{cases} a_{ii} & \forall a_{ii} \neq 0 \\ 1 & \forall a_{ii} = 0 \end{cases} . \tag{H.42}$$

Im Falle einer pivotisierten Koeffizientenmatrix besteht die Jacobi-Vorkonditionierungsmatrix also einfach aus deren Hauptdiagonalen. Somit läßt sich die Inverse einfach durch Kehrwertbildung bestimmen. Diese Approximation ist um so besser, je dominanter die Hauptdiagonale der Koeffizientenmatrix ist.

Neben der linksseitigen Vorkonditionierung ist auch eine rechtsseitige möglich:

$$\underbrace{\underline{A} \cdot \underline{M}^{-1}}_{=\tilde{\underline{A}}} \cdot \underbrace{\underline{M} \cdot \underline{x}}_{=\tilde{\underline{x}}} = \underline{b}. \tag{H.43}$$

Hierbei wird also erst eine Zwischenlösung $\tilde{\underline{x}}$ bestimmt, aus der dann die eigentliche Lösung $\underline{x}$ berechnet werden kann.

H.3.1 Vorkonditionierte Methode der bikonjugierten Gradienten

Bei der Anwendung der Methode der bikonjugierten Gradienten ist es zweckmäßig, die Vorkonditionierung in den iterativen Algorithmus mit einzubeziehen.[2] Hierzu betrachte man die *symmetrische* Vorkonditionierungsmatrix $\underline{C}$ und führe mit selbiger eine links- und rechtsseitige Vorkonditionierung durch:

$$\underbrace{\underline{C}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{C}^{-1}}_{\tilde{\underline{A}}} \cdot \underbrace{\underline{C} \cdot \underline{x}}_{\tilde{\underline{x}}} = \underbrace{\underline{C}^{-1} \cdot \underline{b}}_{\tilde{\underline{b}}} .$$

Unterzieht man dieses vorkonditionierte Gleichungssystem dem Verfahren der bikonjugierten Gradienten, so ergeben sich einige Modifikationen.

Anfangswerte: Für einen gewählten Startwert $\underline{x}_0$ ergibt sich zunächst

$$\tilde{\underline{r}}_0 = \tilde{\underline{b}} - \tilde{\underline{A}} \cdot \tilde{\underline{x}}_0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\underline{r}}_0 = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{b} - \underline{C}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{C}^{-1} \cdot \underline{C} \cdot \underline{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{C} \cdot \tilde{\underline{r}}_0 = \underline{b} - \underline{A} \cdot \underline{x}_0 = \underline{r}_0$$

und

$$\tilde{\underline{p}}_0 = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{r}_0 .$$

[2] Siehe [10].

Für das adjungierte Gleichungssystem folgt ebenso

$$\underline{\tilde{q}}_0 = \underline{\tilde{b}}^* - \underline{\tilde{A}}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{\tilde{x}}_0^* \quad \Rightarrow \quad \underline{\tilde{q}}_0 = \underline{C}^{-1*} \cdot \underline{b}^* - \underline{C}^{-\mathrm{H}} \cdot \underline{A}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{C}^{-\mathrm{H}} \cdot \underline{C}^* \cdot \underline{x}_0^* \quad \Rightarrow \quad \underline{C}^* \cdot \underline{\tilde{q}}_0 = \underline{b}^* - \underline{A}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{x}_0^* = \underline{q}_0$$

und

$$\underline{\tilde{w}}_0 = \underline{C}^{-1*} \underline{q}_0,$$

wobei die Symmetrie von $\underline{C}$ zu berücksichtigen ist.

Iterationsschritt: Das vorkonditionierte Gleichungssystem führt zu

$$\alpha_i = \frac{\underline{\tilde{q}}_i^{\mathrm{H}} \cdot \underline{\tilde{r}}_i}{\underline{\tilde{w}}_i^{\mathrm{H}} \cdot \underline{\tilde{A}} \cdot \underline{\tilde{p}}_i} = \frac{(\underline{C}^{-1*} \cdot \underline{q}_i)^{\mathrm{H}} \cdot \underline{C}^{-1} \cdot \underline{r}_i}{(\underline{C}^* \cdot \underline{w}_i)^{\mathrm{H}} \cdot \underline{C}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{C}^{-1} \cdot \underline{\tilde{p}}_i} = \frac{\underline{q}_i^{\mathrm{H}} \cdot \underline{z}_i}{\underline{w}_i^{\mathrm{H}} \cdot \underline{A} \cdot \underline{p}_i}$$

sofern man den neuen Spaltenvektor $\underline{z}_i$ mit

$$\underline{C}^{-2} \cdot \underline{r}_i = \underline{z}_i$$

einführt und die Symmetrie von $\underline{C}$ beachtet. Ferner wird konsistent zu den Anfangswerten

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{q}}_i &= \underline{C}^{-1*} \cdot \underline{q}_i, \\ \underline{C}^{-1} \cdot \underline{\tilde{p}}_i &= \underline{p}_i, \\ \underline{\tilde{w}}_i &= \underline{C}^* \cdot \underline{w}_i \end{aligned}$$

gesetzt. Hiermit ergeben sich die weiteren Iterationsformeln direkt durch einsetzen zu:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{x}}_{i+1} &= \underline{\tilde{x}}_i + \alpha_i \underline{\tilde{p}}_i \Rightarrow \underline{x}_{i+1} = \underline{x}_i + \alpha_i \underline{p}_i, \\ \underline{\tilde{r}}_{i+1} &= \underline{\tilde{r}}_i - \alpha_i \underline{C}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{C}^{-1} \cdot \underline{\tilde{p}}_i \Rightarrow \underline{r}_{i+1} = \underline{r}_i - \alpha_i \underline{A} \cdot \underline{p}_i, \\ \underline{\tilde{q}}_{i+1} &= \underline{\tilde{q}}_i - \alpha_i^* \underline{C}^{-1*} \cdot \underline{A}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{C}^{-1*} \cdot \underline{\tilde{w}}_i \Rightarrow \underline{q}_{i+1} = \underline{q}_i - \alpha_i^* \underline{A}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{w}_i. \end{aligned}$$

Suchrichtungen: Zur Ermittlung der Suchrichtungen erhält man in gleicher Weise durch Einsetzen des vorkonditionierten Gleichungssystems:

$$\beta_i = \frac{\underline{\tilde{q}}_{i+1}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{\tilde{r}}_{i+1}}{\underline{\tilde{q}}_i^{\mathrm{H}} \cdot \underline{\tilde{r}}_i} = \frac{\underline{q}_{i+1}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{z}_{i+1}}{\underline{q}_i^{\mathrm{H}} \cdot \underline{z}_i}.$$

Die restlichen Iterationsformeln ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{p}}_{i+1} &= \underline{\tilde{r}}_{i+1} + \beta_i \underline{\tilde{p}}_i \Rightarrow \underline{p}_{i+1} = \underline{z}_{i+1} + \beta_i \underline{p}_i, \\ \underline{\tilde{w}}_{i+1} &= \underline{\tilde{q}}_{i+1} + \beta_i^* \underline{\tilde{w}}_i \Rightarrow \underline{w}_{i+1} = \underline{y}_{i+1} + \beta_i^* \underline{w}_i, \end{aligned}$$

wobei der neue Spaltenvektor

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{C}^{-2*} \cdot \underline{q}_{i+1}$$

eingeführt worden ist.

Mit einer *symmetrischen* Vorkonditionierungsmatrix $\underline{M} = \underline{C}^2$ ergibt sich hieraus das vorkonditionierte Verfahren der bikonjugierten Gradienten für allgemeine Matrizen zu:

1. $\underline{x}_0$ wählen $\Rightarrow$ $\underline{r}_0 = \underline{b} - \underline{A} \cdot \underline{x}_0$,
   vorkonditionieren durch das Lösen von $\underline{M} \cdot \underline{z}_0 = \underline{r}_0$ bezüglich $\underline{z}_0$, $\underline{p}_0 = \underline{z}_0$;
   ferner setzen: $\underline{q}_0 = \underline{b}^* - \underline{A}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{x}_0^*$,
   vorkonditionieren durch das Lösen von $\underline{M}^* \cdot \underline{y}_0 = \underline{q}_0$ bezüglich $\underline{y}_0$, $\underline{w}_0 = \underline{y}_0$;

2. solange die Lösung nicht hinreichend genau erreicht wurde, sind die nun folgenden Schritte laufend zu wiederholen:

3. nächste Iterierte berechnen gemäß

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\left\langle \underline{q}_i, \underline{z}_i \right\rangle}{\left\langle \underline{w}_i, \underline{A} \cdot \underline{p}_i \right\rangle}, \\ \underline{x}_{i+1} &= \underline{x}_i + \alpha_i \underline{p}_i, \\ \underline{r}_{i+1} &= \underline{r}_i - \alpha_i \underline{A} \cdot \underline{p}_i, \\ \underline{q}_{i+1} &= \underline{q}_i - \alpha_i^* \underline{A}^{\mathrm{H}} \cdot \underline{w}_i; \end{aligned}$$

4. vorkonditionieren durch das Lösen von $\underline{M} \cdot \underline{z}_{i+1} = \underline{r}_{i+1}$ bezüglich $\underline{z}_{i+1}$ und von $\underline{M}^* \cdot \underline{y}_{i+1} = \underline{q}_{i+1}$ bezüglich $\underline{y}_{i+1}$;

5. neue Suchvektoren bestimmen gemäß

$$\begin{aligned} \beta_i &= \frac{\left\langle \underline{q}_{i+1}, \underline{z}_{i+1} \right\rangle}{\left\langle \underline{q}_i, \underline{z}_i \right\rangle}, \\ \underline{p}_{i+1} &= \underline{z}_{i+1} + \beta_i \underline{p}_i, \\ \underline{w}_{i+1} &= \underline{y}_{i+1} + \beta_i^* \underline{w}_i. \end{aligned}$$

Die Anfangswerte sind genau wie angegeben zu bestimmen, um die Anzahl der Iterationen zu minimieren. In diesem Falle nämlich ergibt sich für $\underline{A} = \underline{M}$ die exakte Lösung bereits im ersten Iterationsschritt.

H.3.2 Vorkonditionierte Methode der bikonjugierten Gradienten im symmetrischen Fall

Im Falle einer symmetrischen Matrix $\underline{A}$ ergibt sich auch im vorkonditionierten Fall eine deutliche Vereinfachung des Verfahrens, da auch hierbei das adjungierte Gleichungssystem lediglich das komplex konjugierte des ursprünglichen darstellt. Die vorkonditionierte Methode der bikonjugierten Gradienten für symmetrische Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{M}$ lautet folglich:

1. $\underline{x}_0$ wählen $\quad \Rightarrow \quad \underline{r}_0 = \underline{b} - \underline{A} \cdot \underline{x}_0$,
   vorkonditionieren durch das Lösen von $\underline{M} \cdot \underline{z}_0 = \underline{r}_0$ bezüglich $\underline{z}_0$, $\quad \underline{p}_0 = \underline{z}_0$;

2. solange die Lösung nicht hinreichend genau erreicht wurde, sind die nun folgenden Schritte laufend zu wiederholen:

3. nächste Iterierte berechnen gemäß

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\langle \underline{r}_i^*, \underline{z}_i \rangle}{\left\langle \underline{p}_i^*, \underline{A} \cdot \underline{p}_i \right\rangle}, \\ \underline{x}_{i+1} &= \underline{x}_i + \alpha_i \underline{p}_i, \\ \underline{r}_{i+1} &= \underline{r}_i - \alpha_i \underline{A} \cdot \underline{p}_i; \end{aligned}$$

4. vorkonditionieren durch das Lösen von $\underline{M} \cdot \underline{z}_{i+1} = \underline{r}_{i+1}$ bezüglich $\underline{z}_{i+1}$;
5. neuen Suchvektor bestimmen gemäß

$$\beta_i = \frac{\langle \underline{r}^*_{i+1}, \underline{z}_{i+1} \rangle}{\langle \underline{r}^*_i, \underline{z}_i \rangle},$$

$$\underline{p}_{i+1} = \underline{z}_{i+1} + \beta_i \underline{p}_i.$$

Literaturverzeichnis

[1] Abramowitz, Milton und Stegun, Irene A.: „Handbook of Mathematical Functions“, Dover Publications, Inc., New York, 9. Auflage, 1972.

[2] Arfken, George B. und Weber, Hans J.: „Mathematical Methods for Physicists“, Academic Press, 5. Auflage, 2001.

[3] Arndt, F.; Rullhusen, Ingo D.; Larhzal-Gramberg, Jamal und Kless, Jürgen: „Data Communication Terminal DCT“, Abschlußbericht, Universität Bremen, Institut für Hochfrequenz- und Nachrichtentechnik, Mai 2000.

[4] Balanis, Constantine A.: „Antenna Theory: Analysis and Design“, John Wiley & Sons, Inc., 2. Auflage, 1997.

[5] Bird, Trevor S.: „Analysis of Mutual Coupling in Finite Arrays of Different-Sized Rectangular Waveguides“, IEEE Trans. Antennas Propagat., Bd. 38, Nr. 2, S. 166–172, Februar 1990.

[6] Bronstein, I. N. und Semendjajew, K. A.: „Taschenbuch der Mathematik“, Verlag Harri Deutsch, Thun, 24. Auflage, 1989.

[7] Coifman, Ronald; Rokhlin, Vladimir und Wandzura, Stephen: „The Fast Multipole Method for the Wave Equation: A Pedestrian Prescription“, IEEE Antennas Propagat. Mag., Bd. 35, Nr. 3, S. 7–12, Juni 1993.

[8] Collin, Robert E.: „Field Theory of Guided Waves“, The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2. Auflage, 1991.

[9] Eibert, Thomas F. und Hansen, Volkert: „3D FEM/BEM-Hybrid Approach for Planar Layered Media“, EM, Bd. 16, S. 253–272, 1996.

[10] Golub, Gene H. und Loan, Charles F. Van: „Matrix Computations“, The Johns Hopkins University Press, 3. Auflage, 1996.

[11] Gradstein, I. S. und Ryshik, I. M.: „Summen-, Produkt- und Integral-Tafeln“, Band 1, Verlag Harri Deutsch, Thun, 1. Auflage, 1981.

[12] Gradstein, I. S. und Ryshik, I. M.: „Summen-, Produkt- und Integral-Tafeln“, Band 2, Verlag Harri Deutsch, Thun, 1. Auflage, 1981.

[13] Gyure, Mark F. und Stalzer, Mark A.: „A Prescription for the Multilevel Helmholtz FMM“, IEEE Computational Science and Engineering, Bd. 5, Nr. 3, S. 39–47, Juli – September 1998.

[14] Hackbusch, Wolfgang: „Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme“, B. G. Teubner Stuttgart, 2. Auflage, 1993.

[15] Hammer, P. C.; Marlowe, O. P. und Stroud, A. H.: „Numerical Integration over Simplexes and Cones“, Math. Tables Aids Comp., Bd. 10, S. 130–136, 1956.

[16] Harrington, Roger F.: „Field Computation by Moment Methods“, The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 1993.

[17] Hestenes, Magnus R. und Stiefel, Eduard: „Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems“, J. of Res. of the Nat. Bureau of Standards, Bd. 49, S. 409–436, 1952.

[18] Kratzer, Adolf und Franz, Walter: „Transzendente Funktionen“, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1960.

[19] Lehner, Günther: „Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker“, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 3. Auflage, 1996.

[20] Lu, Cai-Cheng und Chew, Weng Cho: „A Multilevel Algorithm for Solving a Boundary Integral Equation of Wave Scattering“, Microwave and Optical Technology Letters, Bd. 7, Nr. 10, S. 466–470, Juli 1994.

[21] Mautz, Joseph R. und Harrington, Roger F.: „H-Field, E-Field, and Combined-Field Solutions for Conducting Bodies of Revolution“, Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik, Bd. 32, Nr. 4, S. 157–164, 1978.

[22] Michalski, K. A.: „Formulation of Mixed-Potential Integral Equations for Arbitrarily Shaped Microstrip Structures with Uniaxial Substrates“, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, Bd. 7, Nr. 7, S. 899–917, 1993.

[23] Pacheco, Peter S.: „Parallel Programming with MPI“, Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1997.

[24] Press, William H.; Teukolsky, Saul A.; Vetterling, William T. und Flannery, Brian P.: „Numerical Recipes in FORTRAN“, Cambridge University Press, 2. Auflage, 1992.

[25] Rao, Sadasiva M.; Wilton, Donald R. und Glisson, Allen W.: „Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape“, IEEE Trans. Antennas Propagat., Bd. 30, Nr. 3, S. 409–417, Mai 1982.

[26] Rullhusen, Ingo D.: „Hybride Finite-Elemente-Integralgleichungsmethode im Ortsbereich zur flexiblen Berechnung dreidimensionaler Strukturen der Antennen- und MMIC-Technik“, Logos Verlag Berlin, 2000.

[27] Sarkar, T. K.: „On the Application of the Generalized BiConjugate Gradient Method“, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, Bd. 1, Nr. 3, S. 223–242, 1987.

[28] Song, J. M. und Chew, W. C.: „Fast Multipole Method Solution Using Parametric Geometry“, Microwave and Optical Technology Letters, Bd. 7, Nr. 16, S. 760–765, November 1994.

[29] Song, J. M. und Chew, W. C.: „Multilevel Fast-Multipole Algorithm for Solving Combined Field Integral Equations of Electromagnetic Scattering“, Microwave and Optical Technology Letters, Bd. 10, Nr. 1, S. 14–19, September 1995.

[30] Song, Jiming und Chew, Weng Cho: „Error Analysis for the Truncation of Multipole Expansion of Vector Green's Functions“, IEEE Microwave Wireless Compon. Lett. Bd. 11, Nr. 7, S. 311–313, Juli 2001.

[31] Stratton, Julius Adams: „Electromagnetic Theory“, International Series in Pure and Applied Physics, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1941.

[32] Stutzman, Warren L. und Thiele, Gary A.: „Antenna Theory and Design“, John Wiley & Sons, Inc., 2. Auflage, 1998.

[33] Watson, G. N.: „A Treatise on the Theory of Bessel Functions“, Cambridge University Press, 2. Auflage, 1962.

[34] Wilton, Donald R.; Rao, S. M.; Glisson, Allen W.; Schaubert, Daniel H.; Al-Bundak, O. M. und Butler, Chalmers M.: „Potential Integrals for Uniform and Linear Source Distributions on Polygonal and Polyhedral Domains“, IEEE Trans. Antennas Propagat., Bd. 32, Nr. 3, S. 276–281, März 1984.