

Unidad II. El problema de dos cuerpos

En esta sección asumiremos que las masa involucradas tienen simetría esférica y son homogéneas en cáscaras concéntricas. Las dos masas se asumirán lo suficientemente aisladas de otras masas en el universo para que la única fuerza actuante sea la fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

1. Movimiento del centro de masas:

Sea O el origen de un sistema inercial en donde son válidas las Leyes de Newton. La posición de dos partículas de masas m_1 y m_2 están dadas por los vectores $\vec{\mathbf{r}}_1$ y $\vec{\mathbf{r}}_2$, respectivamente, la posición del centro de masas C del par de partículas viene dado por el vector $\vec{\mathbf{R}}$, y la posición de m_2 respecto m_1 por $\vec{\mathbf{r}}$ (Figura 8).

Por la Ley de Gravitación de Newton, la fuerza actuando sobre m_1 debida a m_2 es:

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \frac{k^2 m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}, \quad (\text{II-1})$$

y aquella actuando sobre m_2 debida a m_1 es:

$$\vec{\mathbf{F}}_2 = -\frac{k^2 m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}, \quad (\text{II-2})$$

donde $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$ es un vector unidad en la dirección de $\vec{\mathbf{r}}$, y $k^2 = G$ es la constante de gravitación. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= +\frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} \vec{\mathbf{r}}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} \vec{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (\text{II-3})$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{0}}. \quad (\text{II-4})$$

Si integramos dos veces:

$$m_1 \vec{\mathbf{r}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{c}}_1 t + \vec{\mathbf{c}}_2, \quad (\text{II-5})$$

donde $\vec{\mathbf{c}}_1$ y $\vec{\mathbf{c}}_2$ son constantes vectoriales. El lado izquierdo de la última ecuación define el centro de masas del sistema de dos partículas $\vec{\mathbf{R}} = (m_1 \vec{\mathbf{r}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{r}}_2) / \mathcal{M}$, donde $\mathcal{M} = m_1 + m_2$. Reemplazando:

$$\vec{\mathbf{R}} = \frac{\vec{\mathbf{c}}_1 t}{\mathcal{M}} + \frac{\vec{\mathbf{c}}_2}{\mathcal{M}}, \quad (\text{II-6})$$

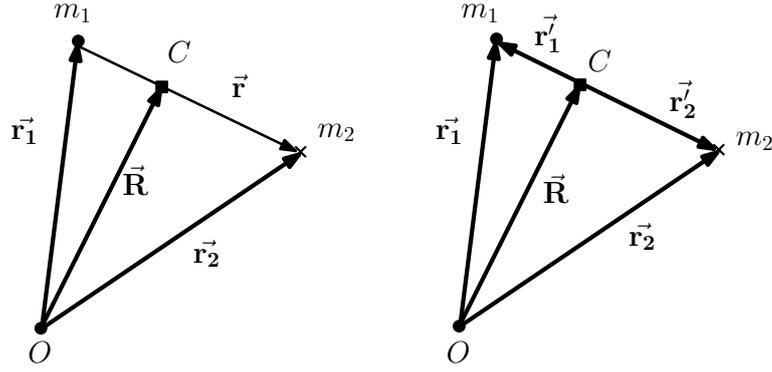


Figura 8:

que nos indica que el centro de masas PERMANECE EN REPOSO O SE MUEVE EN EL ESPACIO CON MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME. El resultado $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ es razonable al no existir por definición fuerzas externas actuando sobre el sistema.

2. Movimiento relativo:

El movimiento de m_1 y m_2 respecto del centro de masas C puede encontrarse definiendo los vectores de posición como $\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}'_1$ y $\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}'_2$, donde \vec{r}'_1 y \vec{r}'_2 son los vectores de posición de m_1 y m_2 respecto del centro de masas C , respectivamente (Figura 8). Entonces, $\vec{r} = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1$ y, ya que $\ddot{\vec{R}} = 0$, $m_1\ddot{\vec{r}}_1 = m_1\ddot{\vec{r}}'_1$ y $m_2\ddot{\vec{r}}_2 = m_2\ddot{\vec{r}}'_2$. Reemplazando en las ecuaciones (II-3):

$$m_1\ddot{\vec{r}}'_1 = +\frac{k^2m_1m_2}{r^3}(\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1), \quad (\text{II-7})$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}'_2 = -\frac{k^2m_1m_2}{r^3}(\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1).$$

Como $m_1\vec{r}'_1 + m_2\vec{r}'_2 = \vec{0}$, podemos eliminar \vec{r}'_2 de la primera ecuación (II-7) y \vec{r}'_1 de la segunda ecuación (II-7), resultando en:

$$m_1\ddot{\vec{r}}'_1 = -k^2m_1m_2 \left[1 + \frac{m_1}{m_2}\right] \frac{\vec{r}'_1}{r^3}, \quad (\text{II-8})$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}'_2 = -k^2m_1m_2 \left[1 + \frac{m_2}{m_1}\right] \frac{\vec{r}'_2}{r^3}.$$

Dado que:

$$r = \frac{\mathcal{M}}{m_2} r'_1 = \frac{\mathcal{M}}{m_1} r'_2, \quad (\text{II-9})$$

podemos escribir:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{k^2 \mathcal{M}}{r^3} \mathbf{r}_1 = -k^2 \left(\frac{m_2^3}{\mathcal{M}^2} \right) \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}, \quad (\text{II-10})$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{k^2 \mathcal{M}}{r^3} \mathbf{r}_2 = -k^2 \left(\frac{m_1^3}{\mathcal{M}^2} \right) \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3},$$

que dan las aceleraciones de m_1 y m_2 respecto del centro de masas. Es importante notar que estas ecuaciones tienen la misma forma que las ecuaciones (II-3).

Para encontrar las posiciones de m_1 y m_2 en cualquier instante es suficiente resolver las ecuaciones (II-10) y, luego de conocer las constantes $\vec{\mathbf{c}}_1$ y $\vec{\mathbf{c}}_2$, la ecuación (II-6). Lamentablemente, en este último caso no hay posibilidades de determinar estas constantes de forma absoluta dado que están definidas respecto de un origen fijo en el espacio. Por lo tanto, en lo que sigue nos limitaremos a encontrar la solución del movimiento relativo de una partícula respecto de la otra.

Si consideramos m_1 como el origen del sistema de dos cuerpos, de las ecuaciones (II-10) obtenemos:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2 \mathcal{M}}{r^3} \mathbf{r}, \quad (\text{II-11})$$

donde $\vec{\mathbf{r}}$ es el radio vector relativo de m_2 respecto de m_1 . La solución de las ecuaciones diferenciales de movimiento originales (ecuaciones II-3) introducen 6 constantes cada una, lo que implica que se requiere encontrar 12 constantes en total para solucionar el sistema. Al ignorar el movimiento del centro de masas este número se reduce a solo 6 constantes. Si se conocen en un instante dado la posición y la velocidad de m_2 respecto a m_1 , es posible encontrar estas 6 constantes y resolver el sistema.

3. La ecuación de Kepler:

Dado que el movimiento en una órbita elíptica es el más importante en el Sistema Solar, en esta sección consideraremos el problema de encontrar las coordenadas polares [el valor de su radio vector r y el ángulo $\theta - \theta_0$ de la ecuación (I-56) y Figura 7] para una partícula que se mueve en una órbita elíptica conocida, dejando para más adelante los casos parabólico e hiperbólico.

Definamos el ángulo $f = \theta - \theta_0$, el cual se denomina ANOMALÍA VERDADERA, y consideremos un círculo auxiliar con radio igual al semieje de la elipse (Figura 9). La masa m_1 está en el foco F y la masa m_2 se mueve en su órbita elíptica en sentido inverso al de las agujas del reloj. Sea el segmento \overline{BA} perpendicular a \overline{CD} y que incluye la posición de m_2 . Entonces,

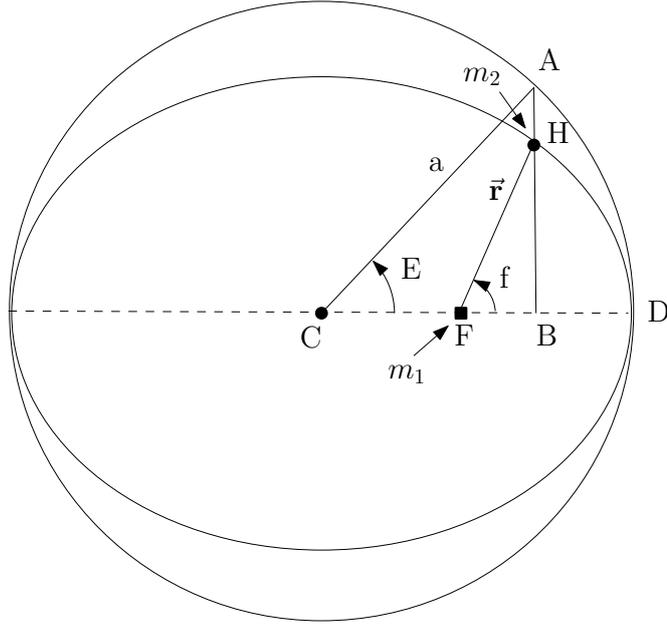


Figura 9:

definimos una variable auxiliar E , denominada ANOMALÍA EXCÉNTRICA, y que varía igual que el ángulo f .

Por las propiedades de la elipse, tenemos que:

$$\begin{aligned} r \cos f &= a \cos E - ae, \\ r \sin f &= a \sin E - \overline{HA}. \end{aligned} \quad (\text{II-12})$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BH}}{\overline{BA}} &= \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}, \\ \overline{HA} &= \overline{BA} - \overline{BH} = a \sin E (1 - \sqrt{1 - e^2}), \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

donde b es el semieje menor de la elipse, y $\overline{BA} = a \sin E$. Por lo tanto, la segunda ecuación (II-12) puede escribirse como $r \sin f = a \sin E \sqrt{1 - e^2}$. Elevándola al cuadrado y sumándola al cuadrado de la primera ecuación (II-12) obtenemos:

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (\text{II-14})$$

En el momento que se encuentre el valor de E se puede determinar el valor de r mediante esta última ecuación. Para encontrar E en función de t usaremos un argumento geométrico. Por cálculo elemental tenemos que:

$$\frac{\text{área } BDH}{\text{área } BDA} = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}, \quad (\text{II-15})$$

pero el área BDH es igual a la diferencia entre las áreas DFH y BFH , y el área BDA es igual a la diferencia entre las áreas DCA y BCA . Además, por la segunda Ley de Kepler [ecuaciones (I-39) y (I-73)] tenemos:

$$\text{área } DFH = \frac{1}{2}na^2\sqrt{1-e^2}(t-T), \quad (\text{II-16})$$

donde $n = 2\pi/P = \sqrt{GM/a^3}$ es el MOVIMIENTO DIURNO MEDIO de una partícula en su órbita (siendo P el período), T es el instante de paso por el perihelio, y t es el instante en consideración. Entonces, la ecuación (II-15) puede escribirse como:

$$\sqrt{1-e^2} = \frac{\frac{1}{2}na^2\sqrt{1-e^2}(t-T) - \frac{1}{2}r^2 \sin f \cos f}{\frac{1}{2}a^2E - \frac{1}{2}a^2 \sin E \cos E}, \quad (\text{II-17})$$

que se puede reducir utilizando las ecuaciones (II-12) a:

$$n(t-T) = E - e \sin E, \quad (\text{II-18})$$

que es una ecuación denominada ECUACIÓN DE KEPLER. La cantidad $n(t-T) = M$ se denomina ANOMALÍA MEDIA y es el ángulo que el radio vector describiría si el objeto se moviera con velocidad constante por una órbita circular con semieje igual al de la órbita original.

Todos los métodos prácticos para resolver la ecuación de Kepler encuentran su solución mediante aproximaciones sucesivas y proveen un buen ejemplo de cómo solucionar numéricamente ecuaciones no lineales. Existen numerosos métodos de solución disponibles, pero por simplicidad mencionaremos solo los más importantes.

Para comenzar debemos asegurarnos que la ecuación de Kepler tiene sólo una solución. Definamos la función:

$$\mathcal{S}(E) = E - e \sin E - M, \quad (\text{II-19})$$

y supongamos que $n\pi < M < (n+1)\pi$, donde n es un entero. Entonces para $E = n\pi$ y $E = (n+1)\pi$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(n\pi) &= n\pi - M < 0, \\ \mathcal{S}[(n+1)\pi] &= (n+1)\pi - M > 0, \end{aligned}$$

por lo cual hay al menos una raíz en el rango $n\pi < E < (n+1)\pi$. Además:

$$\frac{d\mathcal{S}(E)}{dE} = 1 - e \cos E,$$

que es estrictamente positiva. Entonces, podemos concluir que $\mathcal{S}(E)$ es una función creciente y tiene a lo sumo una raíz.

Para resolver la ecuación de Kepler uno de los métodos más antiguos es el denominado *método de la serie*. Si se asume que el valor de e es pequeño, podemos partir de la ecuación (II-18), considerar inicialmente que $E_0 \sim M$ y obtener una primera aproximación mediante:

$$E_1 = M + e \sin E_0 = M + e \sin M. \quad (\text{II-20})$$

Una segunda aproximación se puede obtener utilizando como valor para E la primera aproximación dada por la ecuación (II-20), es decir:

$$E_2 = M + e \sin E_1 = M + e \sin[M + e \sin M],$$

que es igual a:

$$E_2 = M + e[\sin M \cos(e \sin M) + \cos M \sin(e \sin M)]. \quad (\text{II-21})$$

Como el valor $e \sin M$ es próximo a cero, podemos desarrollar $\cos(e \sin M)$ y $\sin(e \sin M)$ utilizando series de McLaurin:

$$\begin{aligned} \cos(e \sin M) &= 1 - \frac{e^2 \sin^2 M}{2!} + \frac{e^4 \sin^4 M}{4!} + \dots, \\ \sin(e \sin M) &= e \sin M - \frac{e^3 \sin^3 M}{3!} + \frac{e^5 \sin^5 M}{5!} + \dots. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (II-21) y agrupando términos según las potencias de e , obtenemos una segunda aproximación. Si seguimos calculando aproximaciones finalmente se obtiene:

$$E_n = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{e^3}{8} (3 \sin 3M - \sin M) + \dots. \quad (\text{II-22})$$

Es importante considerar seriamente donde se truncará esta serie para obtener errores aceptables. Por ejemplo, si se desprecian todos los términos de grado superior al tercero en la excentricidad, el error para una órbita con $e = 0,2$ será de $\sim e^4 = 1,6 \times 10^{-3}$, que en grados corresponde a $\sim 0,09^\circ$. Si $e = 0,7$, el error crece a $\sim 13,7^\circ$.

Supongamos ahora que la solución de $\mathcal{S}(E)$ [ecuación (II-19)] es $E = D$, y que el error en el valor aproximado E_n es ϵ_n , de modo que $D = E_n + \epsilon_n$. Si desarrollamos \mathcal{S} en una serie de Taylor alrededor de $\mathcal{S}(D)$, tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{S}(D) = \mathcal{S}(E_n + \epsilon_n) = \\ &= \mathcal{S}(E_n) + \epsilon_n \mathcal{S}'(E_n) + \frac{1}{2} \epsilon_n^2 \mathcal{S}''(E_n) + \frac{1}{6} \epsilon_n^3 \mathcal{S}'''(E_n) + \dots \end{aligned}$$

donde indicamos con tildes las derivadas. Despreciando los términos desde ϵ_n^2 en adelante encontramos que:

$$0 = \mathcal{S}(E_n) + \epsilon_n \mathcal{S}'(E_n),$$

y si partimos de un valor inicial E_0 las aproximaciones al valor correcto D se obtienen mediante:

$$E_{n+1} = E_n - \frac{\mathcal{S}(E_n)}{\mathcal{S}'(E_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

que da convergencia cuadrática y se denomina *método de Newton*. Para elegir el valor inicial es importante considerar que en general y para excentricidades bajas el valor de E es bastante próximo a M , por lo cual un buen valor inicial sería $E_0 = M$. Para conseguir una convergencia más rápida algunos autores sugieren valores iniciales $E_0 = M + \text{sgn}(\sin M)ke$, donde $\text{sgn}(x)$ indica el signo de x y k es una constante. Particularmente, Danby (1992) sugiere $k = 0,85$.

Una forma de acelerar la convergencia del proceso de cálculo de la ecuación de Kepler es retener un término más en el desarrollo en serie de Taylor de $\mathcal{S}(D)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{S}(D) = \mathcal{S}(E_n + \epsilon_n) = \\ &= \mathcal{S}(E_n) + \epsilon_n \mathcal{S}'(E_n) + \frac{1}{2}\epsilon_n^2 \mathcal{S}''(E_n) + \frac{1}{6}\epsilon_n^3 \mathcal{S}'''(E_n) + \dots \end{aligned} \quad (\text{II-23})$$

Si despreciamos los términos desde ϵ_n^3 en adelante, encontramos que:

$$0 = \mathcal{S}(E_n) + \epsilon_n \mathcal{S}'(E_n) + \frac{1}{2}\epsilon_n^2 \mathcal{S}''(E_n). \quad (\text{II-24})$$

Si para el método de Newton teníamos que $E_{n+1} = E_n - \mathcal{S}(E_n)/\mathcal{S}'(E_n) = E_n + \delta_n$, ahora podemos escribir la ecuación (II-24) como:

$$0 = \mathcal{S}(E_n) + \delta_n \mathcal{S}'(E_n) + \frac{1}{2}\delta_n^2 \mathcal{S}''(E_n),$$

que puede escribirse como:

$$\delta_n = -\frac{\mathcal{S}(E_n)}{\mathcal{S}'(E_n) + \frac{1}{2}\delta_n \mathcal{S}''(E_n)}.$$

Finalmente, a partir de este valor para δ_n se obtiene la nueva aproximación para E_{n+1} mediante:

$$\delta_{n1} = -\frac{\mathcal{S}(E_n)}{\mathcal{S}'(E_n)}, \quad \delta_{n2} = -\frac{\mathcal{S}(E_n)}{\mathcal{S}'(E_n) + \frac{1}{2}\delta_{n1} \mathcal{S}''(E_n)}, \quad E_{n+1} = E_n + \delta_{n2}, \quad (\text{II-25})$$

que tiene convergencia cúbica y se denomina *método de Halley*.

Si retenemos un término más en la ecuación (II-23) para calcular δ_n y escribimos:

$$\delta_n = -\frac{\mathcal{S}(E_n)}{\mathcal{S}'(E_n) + \frac{1}{2}\delta_n \mathcal{S}''(E_n) + \frac{1}{6}\delta_n^2 \mathcal{S}'''(E_n)},$$

es posible resolver para δ_n utilizando el mismo procedimiento que para el método de Halley:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{n1} &= -\frac{\mathcal{S}(E_n)}{\mathcal{S}'(E_n)}, \\ \delta_{n2} &= -\frac{\mathcal{S}(E_n)}{\mathcal{S}'(E_n) + \frac{1}{2}\delta_{n1}\mathcal{S}''(E_n)}, \\ \delta_{n3} &= -\frac{\mathcal{S}(E_n)}{\mathcal{S}'(E_n) + \frac{1}{2}\delta_{n2}\mathcal{S}''(E_n) + \frac{1}{6}\delta_{n2}^2\mathcal{S}'''(E_n)}, \\ E_{n+1} &= E_n + \delta_{n3}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-26})$$

que implica una convergencia teórica de cuarta potencia. Este *método de convergencia acelerada* es, en general, dos veces más rápido que el método de Newton.

Si resulta difícil conseguir convergencia utilizando el método de Newton o cuando el valor de $\mathcal{S}'(E_n) \rightarrow 0$ se deben utilizar otros procedimientos. Como $\mathcal{S}(E)$ es creciente y tiene una sola raíz, es posible utilizar el *método de la secante* para encontrarla. Este método parte de conocer dos valores de la función, $\mathcal{S}(E_n)$ y $\mathcal{S}(E_{n-1})$, para encontrar E_{n+1} mediante:

$$E_{n+1} = \frac{E_{n-1}\mathcal{S}(E_n) - E_n\mathcal{S}(E_{n-1})}{\mathcal{S}(E_n) - \mathcal{S}(E_{n-1})}.$$

Para aplicar este método se requieren dos valores iniciales. Una posibilidad para encontrarlos es realizar una búsqueda en incrementos fijos hasta que el valor de la función cambie de signo, lo que estaría indicando que la raíz estaría entre estos dos últimos valores.

El *Método de Laguerre y Conway* es una opción más rápida que el método de la secante y fue utilizado originalmente para encontrar raíces de polinomios. Posee convergencia cúbica si se tiene una sola raíz y para raíces reales usualmente genera una secuencia de convergencia monótona, por lo que es mucho menos sensible a la calidad del valor inicial que el método de Newton.

Sea $P_n(x)$ un polinomio en x de grado n , cuyas raíces son r_1, r_2, \dots, r_n . Entonces:

$$P_n(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n),$$

donde a es una constante. Si diferenciamos logarítmicamente:

$$A = \frac{P'_n}{P_n} = \frac{1}{x - r_1} + \frac{1}{x - r_2} + \cdots + \frac{1}{x - r_n}.$$

Diferenciando una vez más:

$$B = \frac{P''_n}{P_n} - \frac{(P'_n)^2}{(P_n)^2} = -\frac{1}{(x - r_1)^2} - \frac{1}{(x - r_2)^2} - \cdots - \frac{1}{(x - r_n)^2}.$$

Supongamos que queremos encontrar un valor aproximado para r_1 . Dado un cierto valor x lo suficientemente próximo a r_1 , tenemos:

$$p = x - r_1, \quad q_k = x - r_k, \quad \text{para } k = 2, 3, \dots, n.$$

Si hacemos la aproximación:

$$q \simeq q_k \quad \text{para } k + 2, 3, \dots, n,$$

tenemos que:

$$A \simeq \frac{1}{p} + \frac{n-1}{q}, \quad B \simeq -\frac{1}{p^2} - \frac{n-1}{q^2}.$$

Eliminando q y resolviendo para p se obtiene:

$$x - r_1 = p \simeq \frac{n}{A \pm \sqrt{(n-1)(-nB - A^2)}}, \quad (\text{II-27})$$

donde el signo se debe elegir para maximizar el valor del denominador. restando al valor de x el valor de p se obtiene una mejor aproximación a r_1 para seguir iterando.

Supongamos ahora que queremos resolver $\mathcal{S}(D) = E - e \sin E - M = 0$. Si en el desarrollo anterior reemplazamos $P_n(x)$ con $\mathcal{S}(E)$, tenemos:

$$A = \frac{\mathcal{S}'(E)}{\mathcal{S}(E)}, \quad B = \frac{\mathcal{S}''(E)}{\mathcal{S}(E)} - \frac{(\mathcal{S}'(E))^2}{(\mathcal{S}(E))^2}. \quad (\text{II-28})$$

Como encontramos una aproximación a la raíz que buscamos mediante la ecuación (II-27), podemos reemplazar los valores de A y B dados por las ecuaciones (II-28) en la ecuación (II-27), y utilizarla para encontrar una nueva aproximación E a la raíz D :

$$E_{i+1} = E_i - \frac{n\mathcal{S}(E_i)}{\mathcal{S}'(E_i) \pm \sqrt{(n-1)^2(\mathcal{S}'(E_i))^2 - n(n-1)\mathcal{S}(E_i)\mathcal{S}''(E_i)}}, \quad (\text{II-29})$$

donde el signo del denominador debe ser el mismo de $\mathcal{S}'(E_i)$, y n es un valor a determinar. La ecuación (II-29) corresponde al método de Laguerre y Conway. Para este tipo de aplicación el método es poco sensible al valor que se elija para n y converge a la solución aún para valores iniciales E_0 lo suficientemente erróneos para hacer fallar el método de Newton. La única precaución que se debe tener es obtener siempre el valor absoluto del radicando para evitar valores negativos ante un valor inicial muy apartado del real. Conway propuso utilizar $n = 5$, pero es posible utilizar otro valor. Por ejemplo, si en la ecuación (II-23) truncamos después del término en ϵ_n^2 y resolvemos para ϵ_n , el resultado es equivalente a la ecuación (II-29) con $n = 2$.

4. Posición en la órbita elíptica:

En la sección precedente se obtuvo una expresión para el radio vector r en función de la anomalía excéntrica E , pero para determinar la posición del objeto en su órbita aún se necesita una expresión para la anomalía verdadera f .

Partiendo de la primera de las ecuaciones (II-12), tenemos:

$$a \cos E = ae + r \cos f, \quad (\text{II-30})$$

pero la ecuación polar de la órbita [ecuación (I-72)] es:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}, \quad (\text{II-31})$$

que reemplazando en la ecuación (II-30) nos da:

$$\cos E = \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f}. \quad (\text{II-32})$$

Entonces, restando y sumando la ecuación (II-32) a 1 se obtiene:

$$\begin{aligned} 1 - \cos E &= \frac{(1 - e)(1 - \cos f)}{1 + e \cos f}, \\ 1 + \cos E &= \frac{(1 + e)(1 + \cos f)}{1 + e \cos f}, \end{aligned} \quad (\text{II-33})$$

y dividiendo entre sí las ecuaciones (II-33) se llega a:

$$\tan^2 \left(\frac{E}{2} \right) = \left(\frac{1 - e}{1 + e} \right) \tan^2 \left(\frac{f}{2} \right), \quad (\text{II-34})$$

lo que finalmente nos da:

$$\tan \left(\frac{f}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \left(\frac{E}{2} \right). \quad (\text{II-35})$$

En esta última expresión no hay ambigüedad en el signo debido a que $\tan(f/2)$ siempre tiene el mismo signo que $\tan(E/2)$.

Dos fórmulas útiles donde interviene el ángulo E resultan de combinar las ecuación (II-14) con la derivada respecto del tiempo de la ecuación (II-18):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{na}{r}, \quad (\text{II-36})$$

y de la derivada respecto del tiempo de la ecuación (II-14):

$$r \frac{dr}{dt} = ena^2 \sin E. \quad (\text{II-37})$$

Esta última expresión es equivalente a $\vec{r} \bullet \vec{v} = \vec{r} \bullet \dot{\vec{r}} = r dr/dt$ que corresponde a una relación importante.

5. Posición en la órbita parabólica:

En este caso, la ecuación de la cónica es:

$$r = \frac{2q}{1 + \cos f} = q \sec^2 \left(\frac{f}{2} \right) = q \left[1 + \tan^2 \left(\frac{f}{2} \right) \right], \quad (\text{II-38})$$

donde $f = \theta - \theta_0$. Anteriormente vimos que para una órbita parabólica la velocidad areolar constante es $h = k\sqrt{2\mathcal{M}q}$ [ecuación (I-67)], pero también sabemos que $h = r^2 df/dt$. Combinando éstas con la ecuación (II-38):

$$q^2 \frac{df}{dt} \sec^4 \left(\frac{f}{2} \right) = k\sqrt{2\mathcal{M}q}, \quad (\text{II-39})$$

o, lo que es lo mismo:

$$\sec^4 \left(\frac{f}{2} \right) df = \frac{k\sqrt{2\mathcal{M}}}{q^{3/2}} dt. \quad (\text{II-40})$$

Por integración de la ecuación (II-40) obtenemos:

$$\tan \left(\frac{f}{2} \right) + \frac{1}{3} \tan^3 \left(\frac{f}{2} \right) = k\sqrt{\frac{\mathcal{M}}{2q^3}} (t - T), \quad (\text{II-41})$$

donde T es el instante del paso por el perihelio. Para encontrar la anomalía verdadera la ecuación (II-41) puede escribirse como:

$$\tan \left(\frac{f}{2} \right) + \frac{1}{3} \tan^3 \left(\frac{f}{2} \right) - k\sqrt{\frac{\mathcal{M}}{2q^3}} (t - T) = 0.$$

Si tomamos un instante tal que $t - T > 0$, la función pasa de un valor negativo para $f = 0^\circ$ a infinito para $f = 180^\circ$, incrementándose continuamente con f . Entonces, debe existir una solución real y positiva para $\tan(f/2)$. En el caso que $t - T < 0$ se concluye de manera similar que existe una solución real y negativa.

Entonces, para resolver la ecuación (II-41) podemos usar los métodos de la secante o de Laguerre-Conway. También es posible obtener una solución directa mediante un cambio de variables. Si reemplazamos $\tan(f/2)$ con:

$$\tan \left(\frac{f}{2} \right) = 2 \cot(2w) = \cot w - \tan w,$$

tenemos también que:

$$\tan^3 \left(\frac{f}{2} \right) = -3 \tan \left(\frac{f}{2} \right) + \cot^3 w - \tan^3 w.$$

Estas sustituciones permiten escribir la ecuación (II-41) como:

$$\cot^3 w - \tan^3 w = 3k\sqrt{\frac{\mathcal{M}}{2q^3}}(t - T).$$

Si realizamos los nuevos cambios de variables:

$$\cot w = \sqrt[3]{\cot \frac{s}{2}}, \quad \cot s = \frac{3}{2}k\sqrt{\frac{\mathcal{M}}{2q^3}}(t - T),$$

podemos calcular $\tan(f/2)$ directamente.

Luego de encontrar el valor para f , el radio vector se encuentra mediante la ecuación:

$$r = q \sec^2 \left(\frac{f}{2} \right) = q \left[1 + \tan^2 \left(\frac{f}{2} \right) \right]. \quad (\text{II-42})$$

6. Posición en la órbita hiperbólica:

Este es un caso análogo al correspondiente a una órbita elíptica. La ecuación de la órbita es:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos f} \quad e > 1, \quad (\text{II-43})$$

donde $f = \theta - \theta_0$. La segunda Ley de Kepler para la hipérbola [ver ecuación (I-80)] es:

$$r^2 \frac{df}{dt} = \sqrt{k^2 \mathcal{M} a (e^2 - 1)}, \quad (\text{II-44})$$

y la ecuación de la energía [ecuación (I-82)]:

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{df}{dt} \right)^2 = k^2 \mathcal{M} \left[\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right]. \quad (\text{II-45})$$

Sustituyendo df/dt de la ecuación (II-44) en la (II-45) tenemos:

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{n^2 a^2}{r^2} \left[(a + r)^2 - a^2 e^2 \right], \quad (\text{II-46})$$

donde $n^2 = k^2 \mathcal{M} / a^3$. Esta cantidad juega un papel similar a la cantidad análoga del caso elíptico. Aquí también se requiere introducir una variable auxiliar F definida por:

$$r = a(e \cosh F - 1). \quad (\text{II-47})$$

Entonces, $dr = ae \sinh F dF$ y podemos reemplazar en la ecuación (II-46):

$$n dt = (e \cosh F - 1) dF, \quad (\text{II-48})$$

que al integrar da:

$$n(t - T) = e \sinh F - F = M, \quad (\text{II-49})$$

que es una relación similar a la ecuación de Kepler, pero para el caso hiperbólico. El radio vector puede obtenerse de la ecuación (II-47) al conocer F , y de la relación:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos f} = a(e \cosh F - 1), \quad (\text{II-50})$$

se puede obtener la expresión:

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh\left(\frac{F}{2}\right), \quad (\text{II-51})$$

mediante un procedimiento similar al del caso elíptico [ecuaciones (II-31) a (II-35)] que da f al ser conocida F .

7. Elementos de la órbita a partir de la posición y velocidad:

Para definir la posición, tamaño y forma de la órbita debemos encontrar seis constantes que la caracterizan. Asumiremos que m_1 está en el centro de fuerza, m_2 es la masa en movimiento, $\mathcal{M} = m_1 + m_2$, y la constante de gravitación es $k^2 = G$.

La línea que pasa por el centro de fuerza y que está determinada por el cruce de la órbita con el plano xy se denomina LÍNEA DE LOS NODOS (Figura 10). Cuando m_2 pasa desde abajo hacia arriba del plano xy en el punto N se dice que m_2 pasa por el NODO ASCENDENTE de su órbita. El punto N' , opuesto a N , es el NODO DESCENDENTE. El ángulo Ω , la LONGITUD DEL NODO ASCENDENTE, es el ángulo medido en sentido contrario a la agujas del reloj desde el eje positivo x hasta la línea de los nodos y puede tomar valores entre 0° y 360° . El ángulo i , la INCLINACIÓN DE LA ÓRBITA, es el ángulo entre el plano orbital y el plano xy (o el ángulo entre el eje z y $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}$, y puede variar entre 0° y 180° .

Luego de establecer la orientación del plano orbital en el espacio con los ángulos Ω e i debemos prestar atención a la forma de la órbita, y su orientación en el plano orbital. La cónica que sigue el objeto en su movimiento esta caracterizada por el SEMIEJE MAYOR de la elipse o el SEMIEJE TRANSVERSO de la hipérbola (en ambos casos a), o la distancia del foco al vértice (q) para el caso de la parábola, y la EXCENTRICIDAD e . La orientación de la órbita en el plano orbital está dada por el ARGUMENTO DEL PERIHELIO, ω , que es el ángulo medido en el plano orbital desde la línea de los nodos hasta el punto del perihelio.

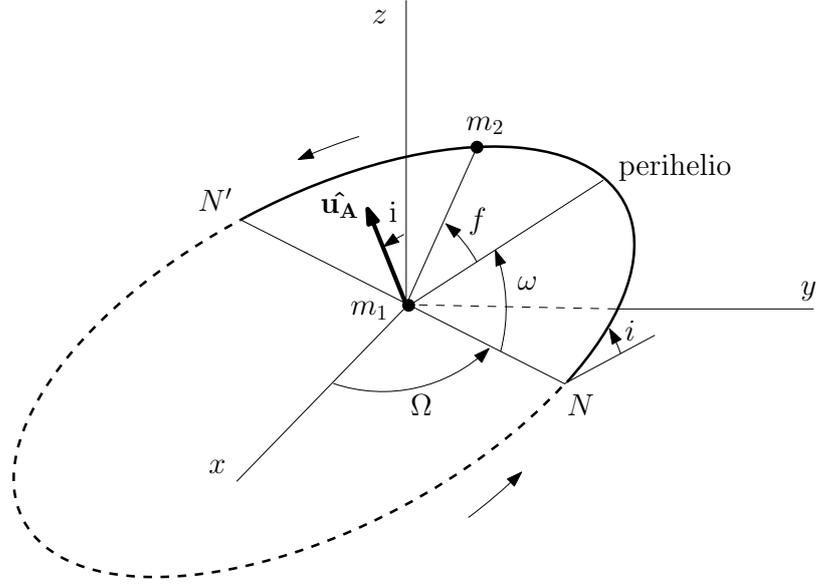


Figura 10:

Algunas cantidades que son utilizadas frecuentemente son la LONGITUD DEL PERIHELIO , definida como $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$, la LONGITUD VERDADERA, definida como $\Lambda = \tilde{\omega} + f = \Omega + \omega + f$, y la LONGITUD MEDIA, definida como $\lambda = \tilde{\omega} + n(t - T)$. Es de destacar que estas cantidades se miden en planos diferentes.

Por último, el INSTANTE DEL PASO POR EL PERIHELIO se designa como T . En el caso de una órbita elíptica es frecuente reemplazar a T por la anomalía verdadera M para un cierto instante t . Es importante mencionar que usamos el término *perihelio*, o en oposición *afelio*, en un sentido general independientemente del nombre del cuerpo que se encuentre en el centro de fuerza. Estrictamente, deberíamos hablar sólo de *pericentro* de la órbita para el punto más cercano al centro de fuerza, y *apocentro* para el más lejano.

Si la posición y velocidad iniciales son $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $\vec{v}_0 = (dx_0/dt, dy_0/dt, dz_0/dt)$ para un instante t , es posible calcular h mediante la ecuación (I-41). Entonces, a partir de una reformulación de las ecuaciones (I-69), (I-75), y (I-82), podemos decir que el tipo de cónica de la órbita viene dado por:

$$\chi = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{k^2 \mathcal{M}}, \quad (\text{II-52})$$

que corresponde a una elipse, una hipérbola o una parábola dependiendo de si χ es mayor, menor o igual a cero, respectivamente.

Para $\chi > 0$, la órbita es elíptica. En este caso, tenemos que $a = 1/\chi$ y la excentricidad es:

$$e^2 = 1 - \frac{h^2}{k^2 \mathcal{M} a}, \quad (\text{II-53})$$

ecuación que se obtiene de $\mathcal{P} = a(1 - e^2)$ y la ecuación (I-57). El instante del paso por el perihelio se encuentra mediante la ecuación de Kepler (II-18):

$$T = t - (E - e \sin E) \sqrt{\frac{a^3}{GM}}, \quad (\text{II-54})$$

donde el valor del ángulo E se obtiene de la ecuaciones (II-14) y (II-37).

En el caso de que $\chi < 0$ tenemos una órbita hiperbólica, donde $a = -1/\chi$ y la excentricidad es:

$$e^2 = 1 + \frac{h^2}{k^2 \mathcal{M} a}, \quad (\text{II-55})$$

la cual se obtiene de $\mathcal{P} = a(e^2 - 1)$ y la ecuación (I-57). El instante del paso por el perihelio se encuentra a partir de la ecuación (II-49):

$$\begin{aligned} F_0 &= \cosh F = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{r}{a} \right), \\ F &= \ln \left[F_0 + \sqrt{F_0^2 - 1} \right] \operatorname{sgn}(\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{v}}), \end{aligned} \quad (\text{II-56})$$

$$T = t - (e \sinh F - F) \sqrt{\frac{a^3}{GM}}.$$

Por otra parte, para una órbita parabólica $\chi = 0$. En este caso, $q = h^2/(2GM)$ y el instante del paso por el perihelio se obtiene de las ecuaciones (II-38) y (II-41):

$$\tau = \tan \left(\frac{f}{2} \right) = \sqrt{\frac{r}{q} - 1} \operatorname{sgn}(\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{v}}), \quad (\text{II-57})$$

$$T = t - \left(\frac{1}{3} \tau^3 + \tau \right) \sqrt{\frac{2q^3}{GM}}.$$

Luego de encontrar el tipo de cónica que corresponde a la órbita, debemos fijar la posición del plano orbital respecto del plano xy del sistema de coordenadas. La velocidad areolar es $\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} h \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}$, donde $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}$ es un vector perpendicular al plano orbital [ecuación (I-38) y Figura

10]. Las componentes de la velocidad areolar son:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= \frac{1}{2} c_1, \\ \frac{1}{2} \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) &= \frac{1}{2} c_2, \\ \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= \frac{1}{2} c_3,\end{aligned}\tag{II-58}$$

donde c_1 , c_2 , y c_3 son constantes relacionadas con h por:

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = h.\tag{II-59}$$

El vector $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}$ puede ser expresado en términos de los elementos Ω e i mediante:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} = (\sin i \sin \Omega) \hat{\mathbf{x}} + (-\sin i \cos \Omega) \hat{\mathbf{y}} + (\cos i) \hat{\mathbf{z}}.\tag{II-60}$$

Entonces, la velocidad areolar es:

$$\dot{\mathbf{A}} = \left(\frac{1}{2} h \sin i \sin \Omega \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(-\frac{1}{2} h \sin i \cos \Omega \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{1}{2} h \cos i \right) \hat{\mathbf{z}}.\tag{II-61}$$

Comparando las ecuaciones (II-58) y (II-61) se observa que:

$$\begin{aligned}c_1 &= h \sin i \sin \Omega, \\ c_2 &= -h \sin i \cos \Omega, \\ c_3 &= h \cos i,\end{aligned}\tag{II-62}$$

lo que permite encontrar los ángulos Ω e i .

Finalmente, el ángulo ω se puede calcular a partir de un nuevo ángulo auxiliar al que llamaremos $\bar{f} = \omega + f$. Partiendo de:

$$\begin{aligned}r \cos \bar{f} &= x \cos \Omega + y \sin \Omega, \\ r \sin \bar{f} &= (-x \sin \Omega + y \cos \Omega) \cos i + z \sin i,\end{aligned}\tag{II-63}$$

como Ω e i son conocidos [ecuación (II-62)] y $\vec{\mathbf{r}}$ se conoce de las condiciones iniciales, las últimas ecuaciones permiten encontrar \bar{f} para el instante t . Ahora, si diferenciamos la ecuación (I-56) respecto del tiempo:

$$-(e \sin f) \frac{df}{dt} = -\frac{\mathcal{P}}{r^2} \frac{dr}{dt},\tag{II-64}$$

y dado que $r^2 df/dt \equiv r^2 d\theta/dt = h$, y:

$$r dr/dt = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = \vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{v}}, \quad (\text{II-65})$$

entonces la ecuación (II-64) puede escribirse como:

$$e \sin f = \frac{\mathcal{P}}{h} \left[\frac{\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{v}}}{r} \right]. \quad (\text{II-66})$$

Dividiendo esta última por $e \cos f$ obtenido de la ecuación (I-56), encontramos:

$$\tan f = \frac{\mathcal{P}}{h} \left[\frac{\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{v}}}{\mathcal{P} - r} \right], \quad (\text{II-67})$$

y como \bar{f} se obtiene de la ecuación (II-63), encontramos el argumento del perihelio:

$$\omega = \bar{f} - f. \quad (\text{II-68})$$

El valor de \mathcal{P} en la ecuación (II-67) dependerá de si la cónica es una elipse ($\mathcal{P} = a[1 - e^2]$), una hipérbola ($\mathcal{P} = a[e^2 - 1]$), o una parábola ($\mathcal{P} = 2q$).

La constante de gravitación G fue determinada por mediciones de laboratorio y su valor en el sistema de unidades cgs es $G = 6,672 \times 10^{-8} \text{ dyn cm}^2 \text{ g}^{-2}$. Si utilizamos como unidad de tiempo el día solar medio, como unidad de distancia la unidad astronómica y como unidad de masa la masa del Sol, tenemos que $G = 2,959 \times 10^{-4}$ y $k = 0,01720209895$. Como desde los tiempos de Gauss los valores de masa y distancia han cambiado, habría que modificar también la constante k . Para evitar esta complicación, lo que se hace es mantener k constante y modificar el valor de la unidad de distancia.

8. Las funciones \mathcal{F} y \mathcal{G} :

Sea un objeto en órbita sujeto a una fuerza central gravitatoria [ecuación (II-11)] cuya posición y velocidad en un instante t_0 son $\vec{\mathbf{r}}_0$ y $\vec{\mathbf{v}}_0$. Como el momento angular de la órbita no es cero ($\vec{\mathbf{r}}_0$ no es paralelo a $\vec{\mathbf{v}}_0$), si $\vec{\mathbf{r}}$ es la posición del objeto para cualquier instante t existen dos escalares \mathcal{F} y \mathcal{G} que cumplen con:

$$\vec{\mathbf{r}} = \mathcal{F} \vec{\mathbf{r}}_0 + \mathcal{G} \vec{\mathbf{v}}_0. \quad (\text{II-69})$$

Como \mathcal{F} y \mathcal{G} dependen de los instantes t_0 y t , la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\vec{\mathbf{r}} = \mathcal{F}(t, t_0) \vec{\mathbf{r}}(t_0) + \mathcal{G}(t, t_0) \vec{\mathbf{v}}(t_0). \quad (\text{II-70})$$

Estas funciones escalares son *independientes* del sistema de referencia utilizado para resolver los vectores. En particular, la ecuación (II-70) es válida en un sistema de coordenadas que utilice como plano de referencia el plano orbital. En este SISTEMA ORBITAL DE REFERENCIA el origen coincide con el foco ocupado por la masa central, su eje positivo X apunta al perihelio de la órbita, el eje positivo Y se encuentra en la dirección correspondiente a $f = 90^\circ$, y el eje positivo Z es paralelo al vector de momento angular.

Para el caso de una órbita elíptica, las ecuaciones (II-12) a (II-14) permiten expresar las coordenadas de un objeto en este sistema como:

$$X = r \cos f = a(\cos E - e), \quad (II-71)$$

$$Y = r \sin f = a\sqrt{1 - e^2} \sin E.$$

Diferenciando las ecuaciones (II-71) respecto del tiempo se obtienen las componentes de la velocidad:

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{na^2}{r} \sin E, \quad (II-72)$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{na^2\sqrt{1 - e^2}}{r} \cos E.$$

Si aplicamos la ecuación (II-70) al sistema dado por la ecuación (II-71) y descomponemos los vectores en el plano de la órbita tenemos:

$$\begin{aligned} X &= \mathcal{F}X(t_0) + \mathcal{G}\frac{dX}{dt}(t_0), \\ Y &= \mathcal{F}Y(t_0) + \mathcal{G}\frac{dY}{dt}(t_0). \end{aligned} \quad (II-73)$$

Resolviendo para \mathcal{F} y \mathcal{G} :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\mathcal{D}} \left[X(t) \frac{dY}{dt}(t_0) - Y(t) \frac{dX}{dt}(t_0) \right], \quad (II-74)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{\mathcal{D}} [Y(t)X(t_0) - X(t)Y(t_0)],$$

donde:

$$\mathcal{D} = X(t_0) \frac{dY}{dt}(t_0) - Y(t_0) \frac{dX}{dt}(t_0) = h.$$

Reemplazando las componentes de posición y velocidad con las ecuaciones (II-71) y (II-72) y simplificando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{a}{r_0} [\cos(E - E_0) - 1] + 1, \\ \mathcal{G} &= \frac{1}{n} [\sin(E - E_0) - e \sin E + e \sin E_0] = \\ &= (t - t_0) + \frac{1}{n} [\sin(E - E_0) - (E - E_0)]. \end{aligned} \quad (II-75)$$

Encontradas \mathcal{F} y \mathcal{G} , la ecuación (II-70) puede ser considerada como una solución de la ecuación (II-11) con los vectores $\vec{\mathbf{r}}_0$ y $\vec{\mathbf{v}}_0$ como constantes arbitrarias.

La velocidad en un instante t puede encontrarse mediante:

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathcal{F}(t, t_0)}{\partial t} \vec{\mathbf{r}}(t_0) + \frac{\partial \mathcal{G}(t, t_0)}{\partial t} \vec{\mathbf{v}}(t_0), \quad (\text{II-76})$$

y utilizando las ecuaciones (II-14), (II-18) y (II-75), podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}(t, t_0)}{\partial t} &= -\frac{a}{r} \frac{a}{r_0} n \sin(E - E_0), \\ \frac{\partial \mathcal{G}(t, t_0)}{\partial t} &= \frac{a}{r} [\cos(E - E_0) - 1] + 1. \end{aligned} \quad (\text{II-77})$$

Otro método más general para obtener valores para \mathcal{F} y \mathcal{G} es expandir $\vec{\mathbf{r}}$ alrededor de un valor $\vec{\mathbf{r}}_0$ en potencias de $(t - t_0)$. Partiendo de una serie de Taylor:

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{r}}_0 + (t - t_0) \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \ddot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{6}(t - t_0)^3 \dddot{\mathbf{r}}_0 + \dots,$$

como $\ddot{\mathbf{r}}_0 = -GM\vec{\mathbf{r}}_0/r_0^3$, y:

$$\dddot{\mathbf{r}}_0 = -\frac{GM\dot{\mathbf{r}}_0}{r_0^3} + \frac{3GM\vec{\mathbf{r}}_0}{r_0^4} \frac{dr_0}{dt},$$

al reemplazar obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}}(t) &= \left[1 - \frac{1}{2} \frac{GM}{r_0^3} (t - t_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{GM}{r_0^4} \frac{dr_0}{dt} (t - t_0)^3 + \dots \right] \vec{\mathbf{r}}_0 + \\ &+ \left[(t - t_0) - \frac{1}{6} \frac{GM}{r_0^3} (t - t_0)^3 + \dots \right] \vec{\mathbf{v}}_0. \end{aligned}$$

Si comparamos este último resultado con la ecuación (II-70) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t, t_0) &= 1 - \frac{1}{2} \frac{GM}{r_0^3} (t - t_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{GM}{r_0^4} \frac{dr_0}{dt} (t - t_0)^3 + \dots, \\ \mathcal{G}(t, t_0) &= (t - t_0) - \frac{1}{6} \frac{GM}{r_0^3} (t - t_0)^3 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{II-78})$$

que son las *series* \mathcal{F} y \mathcal{G} , cuyos primeros términos resultan útiles cuando se conoce $\vec{\mathbf{r}}_0$ pero no $\vec{\mathbf{v}}_0$.

9. Funciones \mathcal{F} y \mathcal{G} para una órbita hiperbólica o parabólica:

Para encontrar las funciones \mathcal{F} y \mathcal{G} en el caso de una órbita hiperbólica debemos partir de las coordenadas del objeto en el sistema orbital de referencia y de sus derivadas respecto del tiempo:

$$\left. \begin{aligned} X &= r \cos f = a(e - \cosh F), \\ Y &= r \sin f = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh F, \\ \frac{dX}{dt} &= -\frac{a^2 n}{r} \sinh F, \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{a^2 n}{r} \sqrt{e^2 - 1} \cosh F. \end{aligned} \right] \quad (\text{II-79})$$

Reemplazando en las ecuaciones (II-74) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{a}{r_0} [1 - \cosh(F - F_0)] + 1, \\ \mathcal{G} &= \frac{1}{n} [e \sinh F - e \sinh F_0 - \sinh(F - F_0)] = \\ &= (t - t_0) + \frac{1}{n} [(F - F_0) - \sinh(F - F_0)], \end{aligned} \quad (\text{II-80})$$

siendo sus derivadas respecto del tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}(t, t_0)}{\partial t} &= -\frac{a}{r} \frac{a}{r_0} n \sinh(F - F_0), \\ \frac{\partial \mathcal{G}(t, t_0)}{\partial t} &= \frac{a}{r} [1 - \cosh(F - F_0)] + 1. \end{aligned} \quad (\text{II-81})$$

Par el caso parabólico, la única posibilidad es expresar las funciones \mathcal{F} y \mathcal{G} en función de la anomalía verdadera. Las coordenadas del objeto en el sistema orbital de referencia y sus derivadas respecto del tiempo son:

$$\left. \begin{aligned} X &= r \cos f, \\ Y &= r \sin f, \\ \frac{dX}{dt} &= \frac{he}{\mathcal{P}} \sin f \cos f - \frac{h}{r} \sin f, \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{he}{\mathcal{P}} \sin^2 f + \frac{h}{r} \cos f. \end{aligned} \right] \quad (\text{II-82})$$

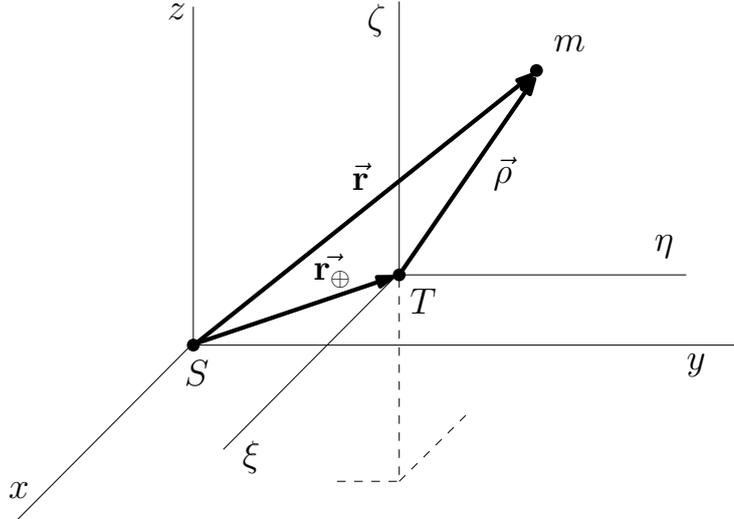


Figura 11:

Reemplazando en las ecuaciones (II-74) obtenemos:

$$\mathcal{F} = \frac{r}{p} [\cos(f - f_0) - 1] + 1, \quad (\text{II-83})$$

$$\mathcal{G} = \frac{rr_0}{h} [\sin(f - f_0)],$$

siendo sus derivadas respecto del tiempo:

$$\frac{\partial \mathcal{F}(t, t_0)}{\partial t} = -\sqrt{\frac{GM}{p^3}} [\sin(f - f_0) + e \sin f - e \sin f_0], \quad (\text{II-84})$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}(t, t_0)}{\partial t} = \frac{r_0}{p} [\cos(f - f_0) - 1] + 1.$$

10. Posición de la órbita en el espacio:

En el Sistema Solar, para posicionar la órbita en el espacio se hace coincidir el sistema inercial de referencia con un *sistema de coordenadas eclíptico heliocéntrico*, donde el centro de fuerza coincide con el Sol y el plano xy coincide con el plano eclíptico. En este sistema el eje positivo x se orienta según el Punto Vernal γ , el eje positivo y a 90° en sentido antihorario desde el eje positivo x , y el eje positivo z perpendicular al plano eclíptico y en el sentido de las latitudes eclípticas positivas. Al relacionar el sistema de coordenadas de este modo es importante recordar que se verá afectado por precesión y nutación, por lo cual será necesario referir los elementos orbitales Ω , ω e i al equinoccio respectivo.

Para convertir estas coordenadas a geocéntricas se requiere conocer la posición de la Tierra en su órbita, por lo que resulta necesario calcular su posición del mismo modo que se realiza para cualquier otro objeto orbitando alrededor del Sol. Si para un cierto instante t la posición de un objeto es $\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$ y la posición de la Tierra es $\vec{\mathbf{r}}_{\oplus} = (x_{\oplus}, y_{\oplus}, z_{\oplus})$, ambas respecto del Sol, la posición geocéntrica de ese objeto es (Figura 11):

$$\vec{\rho} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_{\oplus}, \quad (\text{II-85})$$

con componentes:

$$\begin{aligned} \xi &= x - x_{\oplus}, \\ \eta &= y - y_{\oplus}, \\ \zeta &= z - z_{\oplus}. \end{aligned} \quad (\text{II-86})$$

Entonces, la *longitud eclíptica geocéntrica*, λ , y la *latitud eclíptica geocéntrica*, β , del objeto se obtienen de:

$$\begin{aligned} \tan \lambda &= \frac{\eta}{\xi}, \\ \tan \beta &= \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}. \end{aligned} \quad (\text{II-87})$$

11. Problema del valor inicial:

Uno de los problemas básicos del cálculo de efemérides es cómo obtener los vectores de posición y velocidad de un objeto para un cierto instante a partir de vectores conocidos para otro, llamado usualmente PROBLEMA DEL VALOR INICIAL.

Si consideraremos condiciones iniciales correspondientes a una órbita elíptica, la mejor opción es utilizar las funciones \mathcal{F} y \mathcal{G} [ecuaciones (II-75) y (II-77)], pero se debe reformular la ecuación de Kepler para obtener directamente la diferencia entre las anomalías excentricas, ΔE , correspondientes a los instantes t_o y t .

Sea un objeto en órbita elíptica cuya posición y velocidad par el instante t_0 son $\vec{\mathbf{r}}_0$ y $\vec{\mathbf{v}}_0$, respectivamente. Reformulando la ecuación (I-75), se encuentra el semieje mayor de la órbita:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{k^2 \mathcal{M}}.$$

Si resulta que $1/a \leq 0$ nos estaría indicando que la órbita es parabólica o hiperbólica. Conocido a , podemos encontrar el movimiento diario medio para una órbita elíptica:

$$n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}.$$

A continuación, de las ecuaciones (II-14) y (II-37) obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} e \cos E_0 &= 1 - \frac{r_0}{a}, \\ e \sin E_0 &= \frac{\vec{r}_0 \bullet \vec{v}_0}{na^2}, \end{aligned} \right]$$

de donde se puede encontrar e en lugar de utilizar la ecuación (II-53). Si restamos entre sí la ecuación de Kepler para t_0 de la correspondiente para t , tenemos:

$$n\Delta t = \Delta E - e \sin E + e \sin E_0, \quad (\text{II-88})$$

donde $\Delta t = t - t_0$ y $\Delta E = E - E_0$. Como $E = E_0 + \Delta E$, podemos escribir la ecuación (II-88) como:

$$n\Delta t = \Delta E - e \cos E_0 \sin \Delta E + e \sin E_0 (1 - \cos \Delta E), \quad (\text{II-89})$$

que corresponde a una nueva forma de la ecuación de Kepler y permite encontrar ΔE por alguno de los métodos de resolución estudiados.

Para poder usar las funciones \mathcal{F} y \mathcal{G} también debemos conocer r/a , pero este valor puede encontrarse a partir de la ecuación (II-14):

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 - e \cos E, \\ &= 1 - e \cos(E_0 + \Delta E), \\ &= 1 - e \cos E_0 \cos \Delta E + e \sin E_0 \sin \Delta E. \end{aligned}$$

Finalmente, \vec{r} y \vec{v} se obtienen de:

$$\vec{r}(t) = \mathcal{F}\vec{r}_0 + \mathcal{G}\vec{v}_0,$$

$$\vec{v}(t) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \vec{r}_0 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \vec{v}_0.$$

En el caso de una órbita hiperbólica, el desarrollo es similar al mostrado para el caso elíptico. La ecuación correspondiente a este caso, en la forma de la ecuación (II-89), es:

$$\Delta M = e \cosh F_0 \sinh \Delta F + e \sinh F_0 (\cosh \Delta F - 1) - \Delta F,$$

y el valor de r/a , se obtiene a partir de la ecuación (II-47):

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= e \cosh F - 1, \\ &= e \cosh(F_0 + \Delta F) - 1, \\ &= e \cosh F_0 \cosh \Delta F + e \sinh F_0 \sinh \Delta F - 1. \end{aligned}$$

12. Vectores de posición y velocidad a partir de los elementos orbitales:

Para encontrar \vec{r} y \vec{v} para un instante dado a partir de los elementos orbitales existen varios procedimientos posibles, pero aquí describiremos un método basado en el problema del valor inicial.

Independientemente del tipo de órbita que estemos considerando, si utilizamos un sistema orbital de coordenadas sabemos que en el punto del perihelio tendremos vectores $\vec{r} = (q, 0, 0)$ y $\vec{v} = (0, v, 0)$. El valor de q lo podemos calcular con las ecuaciones (I-67), (I-72) o (I-79) con $f = 0^\circ$, mientras que el valor de v se puede obtener de las ecuaciones (I-69), (I-75) o (I-82).

Conocidos estos vectores de posición y velocidad, para llevarlos del sistema orbital de coordenadas a un sistema eclíptico debemos rotar el sistema alrededor del eje z un ángulo $-\omega$, alrededor del eje x un ángulo $-i$, y alrededor del eje z un ángulo $-\Omega$.

Finalmente, con los vectores correspondientes al punto del perihelio orientados correctamente en el espacio es posible llevarlos a cualquier punto de la órbita utilizando las funciones \mathcal{F} y \mathcal{G} .