

Unidad IV. El problema de n cuerpos

En las unidades precedentes hemos visto que el problema de dos cuerpos puede formularse matemáticamente de modo de poder predecir la posición y velocidad de uno de ellos respecto del otro en cualquier instante. Cuando el problema corresponde a más de dos cuerpos que se mueven bajo su atracción gravitatoria mutua la complejidad se incrementa rápidamente y, en general, no es posible formular una solución analítica.

El Sistema Solar es un ejemplo clásico de un problema de n cuerpos donde el cambio de posición de los planetas al moverse alrededor del Sol resulta en una variación de la fuerza ejercida sobre alguno de sus miembros. Como en el caso del Sistema Solar el centro de fuerza dominante es el Sol, los movimientos planetarios se aproximan bastante a un movimiento producido por un sistema de dos cuerpos puro, denominándose PERTURBACIONES a cualquier desviación debida a la acción de otros planetas o fuerzas externas. Como las perturbaciones deforman la órbita respecto de la cónica que se espera en un sistema de dos cuerpos, los elementos orbitales que se calculan a partir de la posición y velocidad son válidos para un corto lapso centrado en el instante para el cual se efectúa el cálculo. Por esta razón a los elementos orbitales de los objetos afectados por algún tipo de perturbación se los denomina ELEMENTOS OSCULADORES de la órbita.

1. Movimiento del centro de masas:

Asumiremos que los cuerpos son esféricos y que poseen masas distribuídas homogéneamente de modo tal que sea equivalente considerar cuerpos puntuales. Para simplificar los desarrollos en un primer momento consideraremos sólo tres cuerpos, pero una generalización posterior a n cuerpos no presentará ninguna dificultad.

Si consideramos que los cuerpos en la Figura 13 tienen masas m_1 , m_2 , y m_3 , con vectores de posición \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , y \vec{r}_3 , respectivamente, y las únicas fuerzas actuantes son las atracciones

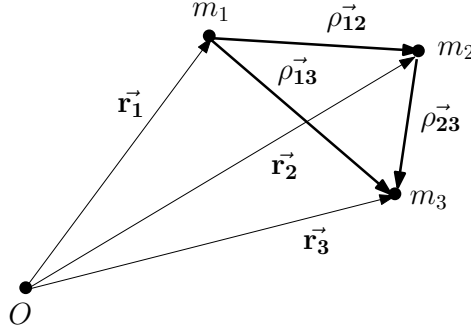


Figura 13:

gravitatorias mutuas entre los cuerpos, tenemos que las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= k^2 \left(\frac{m_1 m_2}{\rho_{12}^2} \hat{\mathbf{u}}_{12} + \frac{m_1 m_3}{\rho_{13}^2} \hat{\mathbf{u}}_{13} \right), \\
 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= k^2 \left(\frac{m_2 m_3}{\rho_{23}^2} \hat{\mathbf{u}}_{23} - \frac{m_2 m_1}{\rho_{12}^2} \hat{\mathbf{u}}_{12} \right), \\
 m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 &= k^2 \left(-\frac{m_3 m_2}{\rho_{23}^2} \hat{\mathbf{u}}_{23} - \frac{m_3 m_1}{\rho_{13}^2} \hat{\mathbf{u}}_{13} \right),
 \end{aligned} \tag{IV-1}$$

donde $\hat{\mathbf{u}}_{i,j}$ son los vectores unitarios que refieren la posición de un cuerpo a la de otro, y $\rho_{i,j}$ son las distancias entre ellos. Sumando las ecuaciones (IV-1) e integrando dos veces tenemos:

$$m_1 \vec{\mathbf{r}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{r}}_2 + m_3 \vec{\mathbf{r}}_3 = \vec{\mathbf{c}}_1 t + \vec{\mathbf{c}}_2, \tag{IV-2}$$

donde $\vec{\mathbf{c}}_1$ y $\vec{\mathbf{c}}_2$ son constantes de integración vectoriales. El lado izquierdo de la ecuación (IV-2) define el centro de masas del sistema de partículas $\vec{\mathbf{R}}$ [ver ecuación (II-5)], y como $\mathcal{M} = m_1 + m_2 + m_3$, tenemos:

$$\vec{\mathbf{R}} = \frac{\vec{\mathbf{c}}_1 t}{\mathcal{M}} + \frac{\vec{\mathbf{c}}_2}{\mathcal{M}}, \tag{IV-3}$$

que es idéntica a la ecuación (II-6) y que indica que el centro de masas permanece en reposo o se mueve en el espacio con movimiento rectilíneo uniforme. Esta expresión constituye una PRIMERA INTEGRAL de las ecuaciones de movimiento en la cual intervienen seis constantes arbitrarias.

2. La integral del momento angular:

Si calculamos el producto vectorial de $\vec{\mathbf{r}}_1$, $\vec{\mathbf{r}}_2$, y $\vec{\mathbf{r}}_3$ por las ecuaciones (IV-1), respectivamente, y sumamos obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \vec{\mathbf{r}}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = & k^2 \left(\frac{m_1 m_2}{\rho_{12}^2} (\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2) \times \mathbf{u}_{12} + \frac{m_2 m_3}{\rho_{23}^2} (\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_3) \times \mathbf{u}_{23} + \right. \\ & \left. + \frac{m_3 m_1}{\rho_{13}^2} (\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_3) \times \mathbf{u}_{13} \right), \end{aligned} \quad (\text{IV-4})$$

pero $\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2$, $\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_3$, y $\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_3$ son colineales con \mathbf{u}_{12} , \mathbf{u}_{23} , y \mathbf{u}_{13} , respectivamente, por lo cual la ecuación (IV-4) se puede escribir:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 \vec{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right) = 0. \quad (\text{IV-5})$$

La cantidad entre paréntesis es el momento angular total del sistema con respecto al origen, $\vec{\mathbf{L}}$ que, por la ecuación (IV-5), es constante y nos permite obtener una SEGUNDA INTEGRAL de las ecuaciones de movimiento. La línea a lo largo de la cual se encuentra $\vec{\mathbf{L}}$ se denomina LÍNEA INVARIANTE y el plano perpendicular a ella que pasa por el centro de masas del sistema se llama PLANO INVARIANTE.

3. La integral de la energía:

Una TERCERA INTEGRAL de las ecuaciones de movimiento es análoga a la ecuación (I-47). Si calculamos el producto escalar de $\dot{\mathbf{r}}_1$, $\dot{\mathbf{r}}_2$, y $\dot{\mathbf{r}}_3$ por las ecuaciones (IV-1), respectivamente, y sumamos obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i \bullet \ddot{\mathbf{r}}_i = & k^2 \left(\frac{m_1 m_2}{\rho_{12}^2} \mathbf{u}_{12} \bullet (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) + \frac{m_2 m_3}{\rho_{23}^2} \mathbf{u}_{23} \bullet (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_3) + \right. \\ & \left. + \frac{m_3 m_1}{\rho_{13}^2} \mathbf{u}_{13} \bullet (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_3) \right). \end{aligned} \quad (\text{IV-6})$$

Además, tenemos que $\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 = -\dot{\rho}_{12} \mathbf{u}_{12}$, $\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_3 = -\dot{\rho}_{13} \mathbf{u}_{13}$, y $\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_3 = -\dot{\rho}_{23} \mathbf{u}_{23}$, y:

$$\dot{\rho}_{i,j} = \frac{d}{dt} (\rho_{i,j} \mathbf{u}_{i,j}) = \frac{d\rho_{i,j}}{dt} \mathbf{u}_{i,j} + \rho_{i,j} \dot{\mathbf{u}}_{i,j} \quad i, j = 1, 2, 3; i \neq j.$$

Como $\mathbf{u}_{i,j}$ es un vector unitario, $\dot{\mathbf{u}}_{i,j} \bullet \mathbf{u}_{i,j} = 0$ y $\mathbf{u}_{i,j} \bullet \mathbf{u}_{i,j} = 1$. Reemplazando en la ecuación (IV-6) tenemos:

$$\sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i \bullet \ddot{\mathbf{r}}_i = k^2 \left(\frac{m_1 m_2}{\rho_{12}^2} \frac{d\rho_{12}}{dt} + \frac{m_2 m_3}{\rho_{23}^2} \frac{d\rho_{23}}{dt} + \frac{m_1 m_3}{\rho_{13}^2} \frac{d\rho_{13}}{dt} \right). \quad (\text{IV-7})$$

Esta última expresión puede escribirse como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right] = -k^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 m_2}{\rho_{12}} + \frac{m_2 m_3}{\rho_{23}} + \frac{m_1 m_3}{\rho_{13}} \right). \quad (\text{IV-8})$$

que integrando nos da:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + V = \mathcal{E}, \quad (\text{IV-9})$$

donde $V = -k^2(m_1 m_2 / \rho_{12} + m_2 m_3 / \rho_{23} + m_1 m_3 / \rho_{13})$ es la *energía potencial* del sistema, el primer término de la izquierda es la *energía cinética* del sistema, y \mathcal{E} es una constante que se denomina *energía total* del sistema. La ecuación (IV-9) es la INTEGRAL DE LA ENERGÍA.

4. El teorema del Virial:

Consideremos el momento de inercia del sistema de cuerpos:

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i^2.$$

Diferenciando dos veces respecto del tiempo obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{I}}{dt^2} &= \sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \sum_{i=1}^3 m_i \vec{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i \\ &= \sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \sum_{i=1}^3 \vec{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla_i V, \end{aligned}$$

donde V es la energía potencial del sistema y $2T = \sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$ es el doble de la energía cinética. Como $\sum_{i=1}^3 \vec{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla_i V = -V$, tenemos finalmente que:

$$\frac{d^2 \mathcal{I}}{dt^2} = 4T + 2V = 2T + 2\mathcal{E}, \quad (\text{IV-10})$$

que es el TEOREMA DEL VIRIAL, que indica que para que el sistema sea *estable* $d^2 \mathcal{I} / dt^2$ debe ser menor o igual a cero, aunque esta no es una condición suficiente.

5. Propiedades del movimiento:

En las secciones precedentes encontramos una serie de propiedades que es conveniente analizar en forma conjunta. En primer lugar, la energía potencial del sistema depende sólo de las distancias relativas entre los cuerpos y su valor es un invariante ante traslación del origen de coordenadas o ante rotaciones.

Segundo, debido a esta invariancia aparecen las integrales del momento angular y las correspondientes al movimiento del centro de masas del sistema. Estas integrales introducen NUEVE constantes de integración: seis que definen la posición del centro de masas para cualquier instante y tres que fijan la orientación del vector de momento angular. Lamentablemente, al no poder fijar un origen y una orientación de los ejes de coordenadas en el espacio no es posible determinar estas nueve constantes mediante condiciones iniciales basándose sólo en observaciones.

Finalmente, una décima constante aparece debido a la integral de la energía, pero para resolver las ecuaciones de movimiento de un sistema de n cuerpos se necesita encontrar $6n$ constantes. Por ejemplo, para un problema de tres cuerpos se requieren 18 constantes de las cuales sólo dispongo de 10.

En conclusión, el problema general de n cuerpos NO TIENE UNA SOLUCIÓN ANALÍTICA por lo cual no es posible predecir el movimiento de los cuerpos bajo los efectos gravitatorios mutuos para cualquier instante partiendo de sus posiciones y velocidades iniciales.

6. Ecuaciones de movimiento relativo:

La imposibilidad práctica de establecer un origen y un sistema de coordenadas fijo en el espacio para referir el movimiento del sistema puede ser solucionado considerando el movimiento de $n - 1$ cuerpos con respecto al restante. Por ejemplo, en el caso del Sistema Solar se considera como cuerpo central al Sol y se refiere el movimiento de los restantes objetos a su posición en el espacio. Para simplificar los desarrollos consideraremos en las discusiones sólo tres cuerpos, pero una generalización posterior a n cuerpos no reviste ningún inconveniente.

Si elegimos como origen de coordenadas la posición de m_1 , si restamos la primera de las ecuaciones (IV-1) de las otras dos y simplificamos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{12}^{\ddot{}} &= -\frac{k^2(m_1 + m_2)}{r_{12}^2} \mathbf{u}_{12} + k^2 m_3 \left[\frac{1}{r_{23}^2} \mathbf{u}_{23} - \frac{1}{r_{13}^2} \mathbf{u}_{13} \right], \\ \mathbf{r}_{13}^{\ddot{}} &= -\frac{k^2(m_1 + m_3)}{r_{13}^2} \mathbf{u}_{13} + k^2 m_2 \left[-\frac{1}{r_{23}^2} \mathbf{u}_{23} - \frac{1}{r_{12}^2} \mathbf{u}_{12} \right], \end{aligned} \tag{IV-11}$$

que corresponden a las *ecuaciones de movimiento relativo* de m_2 y m_3 respecto de m_1 . El primer término de la derecha representa la aceleración del cuerpo debido a la acción de m_1 , el segundo término a la aceleración del cuerpo debido al tercero actuante, y el tercer término a la acción del tercer cuerpo sobre m_1 . Claramente, si $m_3 = 0$ las ecuaciones se reducen a un sistema de dos cuerpos.

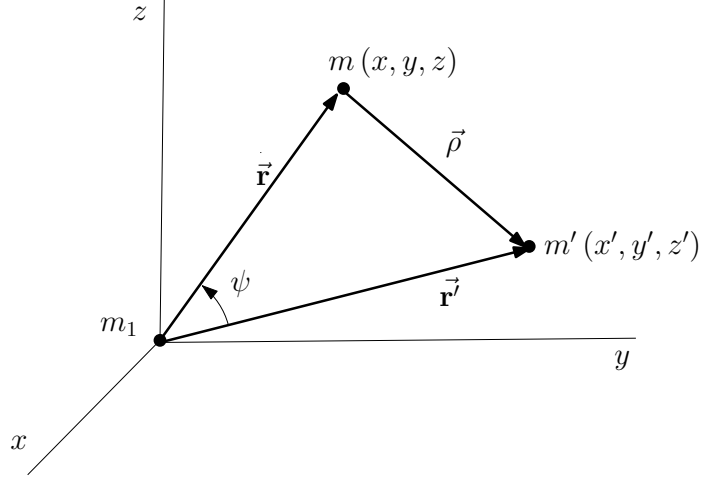


Figura 14:

Si colocamos a m_1 , que es la masa dominante del sistema, en el origen de un sistema cartesiano de coordenadas, denominamos como m a la masa del cuerpo bajo estudio con posición $\vec{r} = (x, y, z)$, y como m' la masa del cuerpo que perturba el movimiento de m alrededor de m_1 con posición $\vec{r}' = (x', y', z')$ (Figura 14), las ecuaciones de movimiento para m son:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2 \mathcal{M} \vec{\mathbf{r}}}{r^3} + k^2 m' \left(\frac{\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{r}}}{\rho^3} - \frac{\vec{\mathbf{r}}'}{r'^3} \right), \quad (\text{IV-12})$$

donde $\mathcal{M} = m_1 + m$ y $\rho = |\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{r}}|$. Como $\rho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$, tenemos que:

$$\frac{\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{r}}}{\rho^3} = \vec{\nabla} \rho^{-1}. \quad (\text{IV-13})$$

Además, como $\vec{\mathbf{r}}$ es independiente de $\vec{\mathbf{r}}'$, podemos escribir:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{r}}'}{r'^3} \right) = \frac{\vec{\mathbf{r}}'}{r'^3}. \quad (\text{IV-14})$$

Reemplazando en las ecuaciones (IV-12) tenemos que:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2 \mathcal{M} \vec{\mathbf{r}}}{r^3} + \vec{\nabla} \mathcal{R}, \quad (\text{IV-15})$$

$$\mathcal{R} = k^2 m' \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{r}}'}{r'^3} \right),$$

donde \mathcal{R} se denomina FUNCIÓN PERTURBADORA. Es obvio que si $\mathcal{R} = 0$ obtenemos el problema de dos cuerpos donde m se mueve alrededor de m_1 sin perturbación, movimiento que

se denomina KEPLERIANO. Si existe más de una masa perturbadora, la función perturbadora total sobre la masa m es la suma de las funciones perturbadoras de cada masa perturbadora individual y las ecuaciones (IV-15) son:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2 \mathcal{M} \vec{\mathbf{r}}}{r^3} + \sum_i \vec{\nabla} \mathcal{R}_i. \quad (\text{IV-16})$$

7. El problema restringido de tres cuerpos:

Si bien el problema general del movimiento de tres cuerpos sujetos a su mutua atracción gravitatoria no ha sido resuelto, se han encontrado algunas soluciones para casos particulares. Uno de ellos es el PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS donde dos cuerpos de masa finita se mueven uno alrededor del otro en órbitas circulares y coplanares, mientras el tercero de masa infinitesimal se mueve en su campo gravitatorio.

Supongamos que el origen de coordenadas es el centro de masas de los dos cuerpos masivos y consideremos que los ejes rotan con las masas de forma que éstas siempre permanecen en el eje x (Figura 15). Si la masa unidad es la suma de ambas masas y el objeto menos masivo tiene masa $\mu < 0,5$, la masa del más masivo es $(1 - \mu)$, con posiciones fijas $(x_2, 0, 0)$ y $(x_1, 0, 0)$, respectivamente. Como el origen de coordenadas se encuentra en el centro de masas, se asume que x_1 es negativo y que la unidad de distancia es $(-x_1 + x_2)$. para simplificar aun más los calculos, también se utiliza una unidad de tiempo tal que $k = 1$. Entonces, en estas unidades los ejes rotarán con velocidad angular constante:

$$w = k \sqrt{\frac{(1 - \mu) + \mu}{(-x_1 + x_2)^3}} = 1. \quad (\text{IV-17})$$

Si la masa infinitesimal se encuentra en las coordenadas (x, y, z) , las distancias a los objetos masivos son:

$$(x - x_1)^2 + y^2 + z^2 = r_1^2, \quad (\text{IV-18})$$

$$(x - x_2)^2 + y^2 + z^2 = r_2^2.$$

Si consideramos que la velocidad de la masa infinitesimal es v , la energía potencial modificada para considerar la rotación de los ejes es:

$$V^* = V - \frac{1}{2} w^2 r^2, \quad (\text{IV-19})$$

donde V es la energía potencial del sistema, $-\frac{1}{2} w^2 r^2$ es la energía potencial de la rotación, y r es la distancia de la masa infinitesimal al centro de masas. Entonces, la integral de la energía

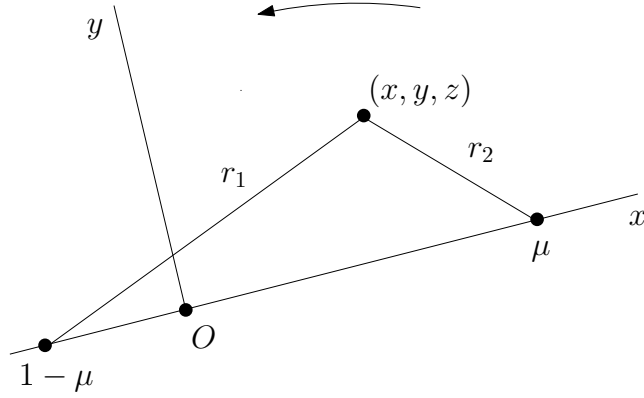


Figura 15:

modificada considerando la rotación de los ejes es:

$$\frac{1}{2}v^2 + V^* = \mathcal{E}.$$

Utilizando las ecuaciones (IV-17) a (IV-19), y reordenando obtenemos:

$$v^2 = \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} + x^2 + y^2 - \mathcal{C}, \quad (\text{IV-20})$$

donde $\mathcal{C} = -2\mathcal{E}$ es una constante. La ecuación (IV-20) se denomina INTEGRAL DE JACOBI.

Para completar la solución se requieren cinco integrales más, pero lamentablemente no son conocidas. De todos modos, la discusión de la ecuación (IV-20) permite definir algunas de las propiedades del movimiento.

8. Criterio de Tisserand:

Debido a la rotación de los ejes de coordenadas, la velocidad de la masa infinitesimal es:

$$\vec{v} = \dot{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{r}}, \quad (\text{IV-21})$$

donde $\hat{\mathbf{z}}$ es el eje de rotación y \vec{v} es la velocidad considerando la rotación de los ejes coordenados. Entonces:

$$\begin{aligned} \vec{v}^2 = v^2 &= |\dot{\mathbf{r}}|^2 + r^2 - 2\dot{\mathbf{r}} \bullet (\hat{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{r}}) = \\ &= |\dot{\mathbf{r}}|^2 + x^2 + y^2 - 2\hat{\mathbf{z}} \bullet (\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}). \end{aligned} \quad (\text{IV-22})$$

Reemplazando en la ecuación (IV-20):

$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 - 2\hat{\mathbf{z}} \bullet (\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - \mathcal{T}, \quad (\text{IV-23})$$

donde \mathcal{T} es una constante. Supongamos ahora que la masa infinitesimal es un cometa periódico y que los cuerpos masivos son el Sol y Júpiter ($\mu \sim 10^{-3}$). Si encontramos la posición y velocidad del cometa mediante observaciones tendremos que:

$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a},$$

y:

$$\hat{\mathbf{z}} \bullet (\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = |\vec{\mathbf{L}}| = \sqrt{a(1-e^2)} \cos i.$$

Reemplazando en la ecuación (IV-23):

$$\frac{1}{a} + 2\sqrt{a(1-e^2)} \cos i = \frac{2}{r} - \frac{2(1-\mu)}{r_1} - \frac{2\mu}{r_2} + \mathcal{T}.$$

Como en el Sistema Solar $r \simeq r_1$, tenemos que aproximadamente:

$$\frac{1}{a} + 2\sqrt{a(1-e^2)} \cos i = 2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \mathcal{T}. \quad (\text{IV-24})$$

Si el cometa se observa muy lejos del Sol y de Júpiter, tenemos que $r_1 \simeq r_2$ y entonces:

$$\frac{1}{a} + 2\sqrt{a(1-e^2)} \cos i = \mathcal{T}. \quad (\text{IV-25})$$

Como \mathcal{T} es una constante, si el cometa se acerca a Júpiter y sus elementos orbitales cambian de (a_1, e_1, i_1) a (a_2, e_2, i_2) , podemos aun identificarlo ya que:

$$\frac{1}{a_1} + 2\sqrt{a_1(1-e_1^2)} \cos i_1 = \frac{1}{a_2} + 2\sqrt{a_2(1-e_2^2)} \cos i_2.$$

A la constante \mathcal{T} se la denomina **CONSTANTE DE TISSERAND**. Si utilizamos en la ecuación (IV-25) los elementos orbitales de Júpiter obtenemos $\mathcal{T} = 3$ que corresponde a un valor de referencia en el Sistema Solar. Si $\mathcal{T} < 3$, posiblemente el objeto sea un cometa, y si $\mathcal{T} > 3$ posiblemente sea un asteroide.

9. Superficies de velocidad relativa cero:

Si en la ecuación (IV-20) hacemos que $v = 0$, tenemos que:

$$\frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} + x^2 + y^2 = -2\mathcal{E} = \mathcal{C}, \quad (\text{IV-26})$$

que si lo restringimos al plano de las órbitas de los objetos masivos ($z = 0$), para cierto valor de \mathcal{C} indicará **CURVAS DE VELOCIDAD CERO** que limitan el movimiento de la partícula sin

masa. En realidad estas curvas representan la intersección de *superficies de velocidad cero* en el espacio, llamadas SUPERFICIES DE HILL, con el plano xy .

Si estas superficies se cruzan, v^2 cambiaría de signo por lo que indican que el movimiento es posible sólo de un lado de la superficie y siempre se debe cumplir que $-2\mathcal{E} \geq \mathcal{C}$. Entonces, la ecuación (IV-26) define el límite de regiones donde el movimiento de la partícula sin masa no es posible. En otras palabras la ecuación (IV-26) EXCLUYE regiones y, si bien el problema de tres cuerpos no es integrable, la integral de Jacobi nos permite encontrar zonas en el plano xy donde la partícula no puede estar.

Si se consideran valores grandes de x e y que satisfagan la ecuación (IV-26), los radios r_1 y r_2 también son grandes y los dos primeros términos de la izquierda son muy pequeños, lo que permite interpretar la ecuación como la correspondiente a un *círculo* donde $x^2 + y^2 = \mathcal{C} - \epsilon$, siendo ϵ muy pequeño. En el espacio esta superficie corresponde a un *cilindro* de eje paralelo al eje z .

Si ahora se consideran valores pequeños para x e y que satisfagan la ecuación (IV-26), los radios r_1 y r_2 también son pequeños y ahora el tercero y cuarto término de la izquierda son muy pequeños. En este caso, la ecuación (IV-26) representa dos *curvas equitotenciales* alrededor de los cuerpos masivos, que en el espacio corresponden a dos *figuras ovals*.

Si el valor de \mathcal{C} comienza a disminuir, las curvas equipotenciales internas crecen hasta que llega un punto donde entran en contacto entre ellas. Si \mathcal{C} sigue disminuyendo, la curva oval alrededor del menor de los cuerpos masivos entra en contacto con la curva exterior y luego sucede lo mismo con la otra curva oval. Finalmente, al disminuir aún más \mathcal{C} las curvas se contraen hasta desaparecer en puntos equidistantes de ambos cuerpos masivos. Este proceso se muestra en la Figura 16 para $\mu = 0,2$, correspondiendo las sucesivas figuras a $\mathcal{C} = 5,000$, $\mathcal{C} = 3,805$ (primer contacto), $\mathcal{C} = 3,553$ (segundo contacto), $\mathcal{C} = 3,1975$ (tercer contacto), $\mathcal{C} = 2,9$, y por último la combinación de varias de estas curvas para $5,0 \leq \mathcal{C} \leq 2,8$.

10. Los puntos de equilibrio:

La ecuación de movimiento para el problema restringido de tres cuerpos es:

$$\dot{\mathbf{v}} + 2 \hat{\mathbf{z}} \times \dot{\mathbf{r}} = -\vec{\nabla}V, \quad (\text{IV-27})$$

donde:

$$-V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad (\text{IV-28})$$

es el potencial modificado. Si la masa infinitesimal se encuentra inicialmente en reposo respecto de los ejes coordenados en rotación se comenzará a mover en dirección de $-\vec{\nabla}V$. Como las

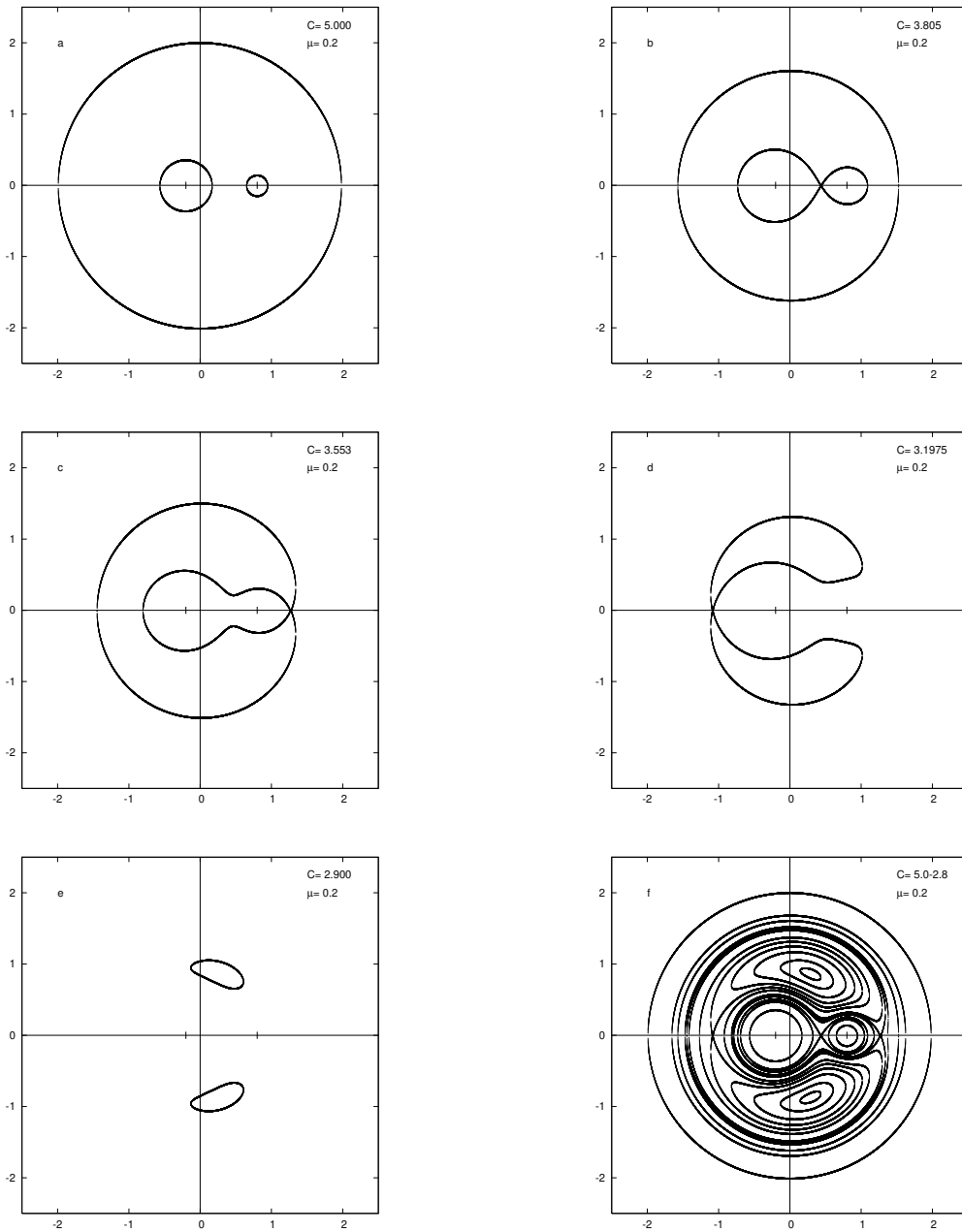


Figura 16:

superficies de velocidad relativa cero pueden escribirse [ecuación (IV-26)]:

$$F(x, y, z) \equiv V + \frac{1}{2}\mathcal{C} = 0, \quad (\text{IV-29})$$

las normales en cada punto de la superficie tendrán cosenos directores proporcionales a $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$, y $\partial F/\partial z$, por lo que el cuerpo de masa infinitesimal que se encuentra inicialmente en reposo comenzará a moverse en la dirección normal a la superficie por el punto que ocupa inicialmente. Pero si por el punto que ocupa pasan dos normales, el cuerpo no tendrá razón para moverse en uno u otro sentido y permanecerá quieto. Estos puntos dobles se denominan PUNTOS DE EQUILIBRIO y ocurren para valores estacionarios de F donde se cumple:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Como tenemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = z \left(\frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right),$$

los puntos de equilibrio están en el plano xy , por lo que podemos poner $z = 0$ y resolver para $\partial F/\partial x = 0$ y $\partial F/\partial y = 0$:

$$x - (1 - \mu) \frac{x - x_1}{r_1^3} - \mu \frac{x - x_2}{r_2^3} = 0, \quad (\text{IV-30})$$

$$y - (1 - \mu) \frac{y}{r_1^3} - \mu \frac{y}{r_2^3} = 0.$$

La segunda de las ecuaciones (IV-30) se satisface con $y = 0$, y en este caso la primera de esas ecuaciones es:

$$x - (1 - \mu) \frac{x - x_1}{|x - x_1|^3} - \mu \frac{x - x_2}{|x - x_2|^3} = 0.$$

Esta última expresión se muestra en la Figura 17 y tiene tres raíces reales, las cuales se denominan PUNTOS LAGRANGIANOS L_1 , L_2 , y L_3 o PUNTOS COLINEALES y que corresponden a los puntos de contacto entre las curvas que se observan en las Figuras 16b, c, y d.

Si $y \neq 0$, la segunda de las ecuaciones (IV-30) es:

$$1 - \frac{(1 - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0.$$

Si la multiplicamos por $(x - x_2)$ y $(x - x_1)$ y restamos separadamente los productos de la primera ecuación (IV-30), tenemos:

$$x_2 - (1 - \mu) \frac{x_2 - x_1}{r_1^3} = 0,$$

$$x_1 - \mu \frac{x_1 - x_2}{r_2^3} = 0,$$

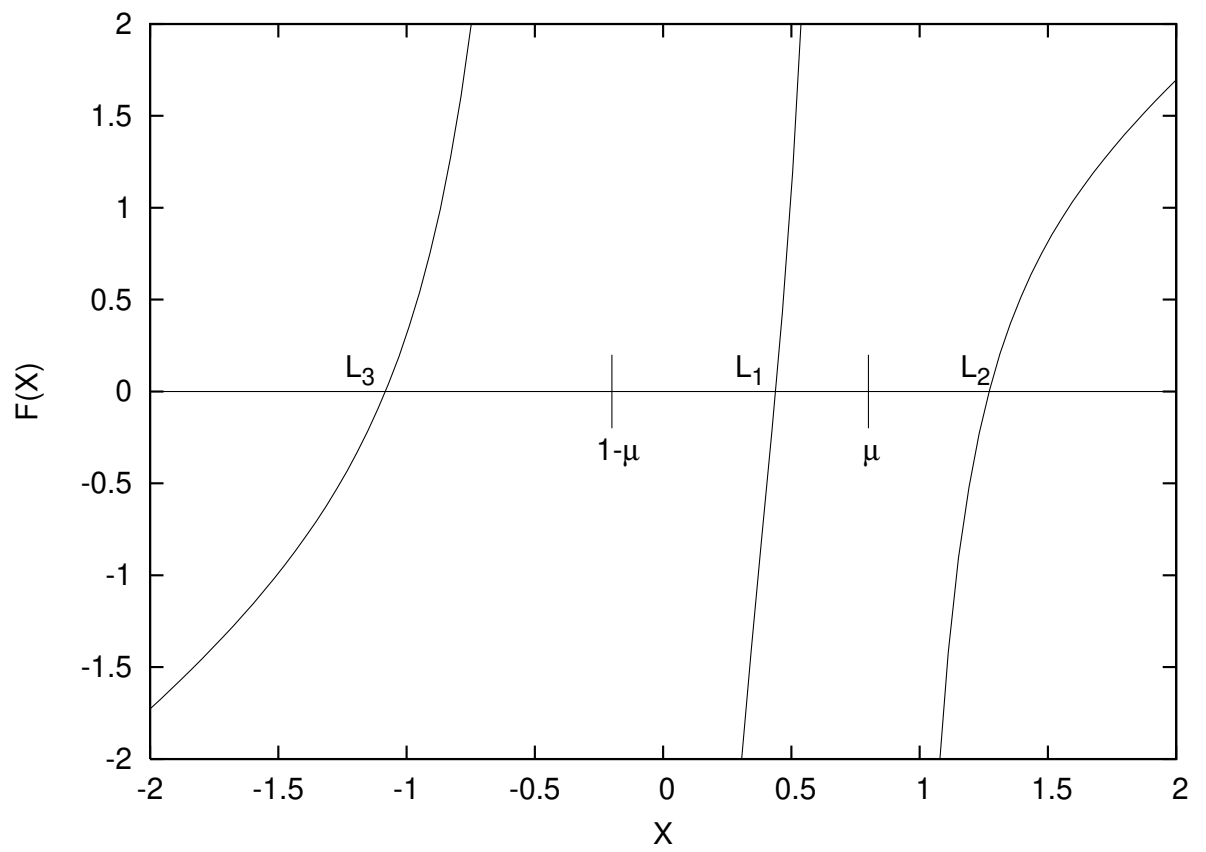


Figura 17:

pero $x_2 = 1 - \mu$ y $x_1 = -\mu$ ya que el origen se encuentra en el centro de masas del sistema de cuerpos masivos, entonces estas ecuaciones se reducen a:

$$r_1 = r_2 = 1.$$

Estos puntos de equilibrio forman triángulos equiláteros en el plano xy con los dos cuerpos masivos. Estos puntos se denominan PUNTOS LAGRANGIANOS L_4 (y positivas) y L_5 o PUNTOS TRIANGULARES y corresponden a los puntos equidistantes de ambos cuerpos masivos en la Figura 16e o f.

11. Estabilidad de los puntos de equilibrio:

No es suficiente con identificar que existe un cierto número de puntos de equilibrio en el problema restringido de los tres cuerpos. Es necesario determinar también si estos puntos son estables.

En el problema restringido de los tres cuerpos hemos encontrado cinco puntos de equilibrio en el movimiento de la partícula sin masa. Si desplazamos levemente a esta partícula de la posición exacta de equilibrio y obtiene una pequeña velocidad, puede oscilar alrededor de los puntos de equilibrio, por lo menos durante un largo tiempo, o alejarse rápidamente. En el primer caso se considera que el movimiento es *estable* mientras que en el segundo caso se lo considera *inestable*.

Como el concepto de “estabilidad” tiene varias interpretaciones, es conveniente formularlo matemáticamente mediante una aproximación lineal. Consideremos las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= l(x, y), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= m(x, y), \end{aligned} \right] \quad (\text{IV-31})$$

donde l y m son funciones de x e y arbitrarias. Supongamos que una solución particular de las ecuaciones (IV-31) se obtiene para $x = x_0$ e $y = y_0$, o sea $l(x_0, y_0) = 0$ y $m(x_0, y_0) = 0$. Si le damos a la partícula un pequeño desplazamiento y una pequeña velocidad, tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \epsilon_x, & y &= y_0 + \epsilon_y, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{d\epsilon_x}{dt}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{d\epsilon_y}{dt}, \end{aligned} \right]$$

donde ϵ_x , ϵ_y , $d\epsilon_x/dt$, y $d\epsilon_y/dt$ son inicialmente muy pequeñas. Si reemplazamos en las ecuaciones (IV-31):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\epsilon_x}{dt^2} - 2\frac{d\epsilon_y}{dt} &= l(x_0 + \epsilon_x, y_0 + \epsilon_y), \\ \frac{d^2\epsilon_y}{dt^2} + 2\frac{d\epsilon_x}{dt} &= m(x_0 + \epsilon_x, y_0 + \epsilon_y). \end{aligned} \right] \quad (\text{IV-32})$$

Si desarrollamos los términos de la derecha mediante series de Taylor, tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\epsilon_x}{dt^2} - 2\frac{d\epsilon_y}{dt} &= \frac{\partial l}{\partial \epsilon_x}\epsilon_x + \frac{\partial l}{\partial \epsilon_y}\epsilon_y + \dots, \\ \frac{d^2\epsilon_y}{dt^2} + 2\frac{d\epsilon_x}{dt} &= \frac{\partial m}{\partial \epsilon_x}\epsilon_x + \frac{\partial m}{\partial \epsilon_y}\epsilon_y + \dots \end{aligned} \right] \quad (\text{IV-33})$$

Como ϵ_x y ϵ_y son inicialmente pequeños podemos despreciar sus potencias altas, al menos durante un considerable tiempo, así que no consideraremos los términos que involucren cuadrados o potencias superiores. Entonces, nos queda un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes cuyas soluciones pueden expresarse de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i e^{\lambda_i t}, \\ \epsilon_y &= \sum_{i=1}^4 \beta_i e^{\lambda_i t}, \end{aligned} \right]$$

donde α_i y β_i son constantes. Si las λ_i son números imaginarios puros, tanto ϵ_x como ϵ_y se pueden expresar mediante funciones periódicas y la solución inicial es ESTABLE. Si cualquiera de las λ_i son números reales o complejos, ϵ_x y ϵ_y cambian indefinidamente con t y la solución inicial es INESTABLE.

Para aplicar el estudio sobre estabilidad a la ecuación de movimiento del problema restringido de los tres cuerpos, tenemos para cada componente [ecuación (IV-27)]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= x - (1 - \mu)\frac{(x - x_1)}{r_1^3} - \mu\frac{(x - x_2)}{r_2^3} \equiv l(x, y, z), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= y - (1 - \mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu\frac{y}{r_2^3} \equiv m(x, y, z), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -(1 - \mu)\frac{z}{r_1^3} - \mu\frac{z}{r_2^3} \equiv n(x, y, z). \end{aligned} \right]$$

Los puntos colineales ocurren para $x = x_{0_i}$, $y = 0$ y $z = 0$, donde $i = 1, 2, 3$ corresponde a L_1 , L_2 y L_3 , respectivamente. Si consideramos ahora que $x = x_{0_i} + \epsilon_x$, $y = \epsilon_y$, y $z = \epsilon_z$, tenemos que $dx/dt = d\epsilon_x/dt$, $dy/dt = d\epsilon_y/dt$ y $dz/dt = d\epsilon_z/dt$, y también:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \epsilon_x} \epsilon_x + \frac{\partial l}{\partial \epsilon_y} \epsilon_y + \frac{\partial l}{\partial \epsilon_z} \epsilon_z &\equiv \epsilon_x + \frac{2(1-\mu)\epsilon_x}{(x_{0_i} - x_1)^3} + \frac{2\mu\epsilon_x}{(x_{0_i} - x_2)^3}, \\ \frac{\partial m}{\partial \epsilon_x} \epsilon_x + \frac{\partial m}{\partial \epsilon_y} \epsilon_y + \frac{\partial m}{\partial \epsilon_z} \epsilon_z &\equiv \epsilon_y - \frac{(1-\mu)\epsilon_y}{(x_{0_i} - x_1)^3} - \frac{\mu\epsilon_y}{(x_{0_i} - x_2)^3}, \\ \frac{\partial n}{\partial \epsilon_x} \epsilon_x + \frac{\partial n}{\partial \epsilon_y} \epsilon_y + \frac{\partial n}{\partial \epsilon_z} \epsilon_z &\equiv -\frac{(1-\mu)\epsilon_z}{(x_{0_i} - x_1)^3} - \frac{\mu\epsilon_z}{(x_{0_i} - x_2)^3}. \end{aligned} \right] \quad (\text{IV-34})$$

Si escribimos:

$$A_i = \frac{(1-\mu)}{(x_{0_i} - x_1)^3} + \frac{\mu}{(x_{0_i} - x_2)^3},$$

podemos escribir las ecuaciones (IV-33) del estudio de estabilidad como:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= (1 + 2A_i)\epsilon_x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= (1 - A_i)\epsilon_y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -A_i\epsilon_z. \end{aligned} \right] \quad (\text{IV-35})$$

La última ecuación es independiente de las otras dos y puede ser tratada separadamente. Su solución es:

$$\epsilon_z = c_1 e^{i\sqrt{A_i}t} + c_2 e^{-i\sqrt{A_i}t}, \quad (\text{IV-36})$$

que indica que para los puntos lineales, y para pequeños desplazamientos, el movimiento paralelo al eje z es *periódico* con período $2\pi/\sqrt{A_i}$.

Para resolver las restantes dos ecuaciones (IV-35) proponemos que:

$$\epsilon_x = K e^{\lambda t}, \quad \epsilon_y = L e^{\lambda t},$$

donde K y L son constantes. Reemplazando estas expresiones en las dos primeras ecuaciones (IV-35) y dividiendo por $e^{\lambda t}$, tenemos:

$$\left. \begin{aligned} [\lambda^2 - (1 + 2A_i)]K - 2\lambda L &= 0, \\ 2\lambda K + [\lambda^2 - (1 - A_i)]L &= 0. \end{aligned} \right] \quad (\text{IV-37})$$

Las ecuaciones (IV-37) se satisfacen con $K = L = 0$, pero en ese caso $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$. Para que las ecuaciones (IV-37) se satisfagan con valores de K y L diferentes de cero se requiere que el determinante de los coeficientes de esas ecuaciones sea cero:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - (1 + 2A_i) & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2 - (1 - A_i) \end{vmatrix} = 0,$$

o, lo que es lo mismo:

$$\lambda^4 + \lambda^2(2 - A_i) + (1 + 2A_i)(1 - A_i) = 0.$$

Para que exista estabilidad λ debe ser imaginario puro, entonces deben existir dos raices reales negativas para λ^2 . Para obtener este resultado se deduce de la expresi3n para encontrar las raices de una expresi3n cuadr3tica que debemos tener al menos $1 - A_i > 0$. Como la primera del las ecuaciones (IV-30) para $y = 0$ se puede escribir:

$$x_{0_i}(1 - A_i) + (1 - \mu)\frac{x_1}{r_1^3} + \mu\frac{x_2}{r_2^3} = 0,$$

pero como $x_1 = -\mu$ y $x_2 = 1 - \mu$, tenemos:

$$x_{0_i}(1 - A_i) - \mu(1 - \mu) \left[\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right] = 0,$$

que reacomodando nos da:

$$(1 - A_i) = \frac{\mu(1 - \mu)}{x_{0_i}} \left[\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right].$$

Como siempre $1 - A_i$ ser3a negativo (r_1 siempre es mayor que r_2 , salvo para L_3 donde $x_{0_3} < 0$), las soluciones para los puntos lineales son siempre *inestables*.

En el caso de los puntos triangulares tenemos $r_1 = r_2 = 1$ y podemos escribir las ecuaciones (IV-35) como:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= \frac{3}{4}\epsilon_x + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\epsilon_y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\epsilon_x + \frac{9}{4}\epsilon_y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\epsilon_z. \end{aligned} \right\} \quad (IV-38)$$

Nuevamente, la 3ltima ecuaci3n (IV-38) es independiente de las otras dos y su soluci3n es:

$$\epsilon_z = c_1 \sin t + c_2 \cos t, \quad (IV-39)$$

que indica que para los puntos triangulares, y para pequeños desplazamientos, el movimiento paralelo al eje z es *periódico* con período 2π .

Para encontrar las soluciones para las restantes dos ecuaciones (IV-38) se repite el proceso aplicado para los puntos lineales y se obtiene:

$$\left[\begin{array}{l} \left[\lambda^2 - \frac{3}{4} \right] K - \left[2\lambda + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu) \right] L = 0, \\ \left[2\lambda - \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu) \right] K + \left[\lambda^2 - \frac{9}{4} \right] L = 0, \end{array} \right] \quad (\text{IV-40})$$

cuyo determinante de los coeficientes igualado a cero corresponde a una ecuación de cuarto grado:

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0.$$

Considerando que es una ecuación cuadrática en λ^2 tenemos:

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-1 - \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}}, \\ \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}}. \end{array} \right] \quad (\text{IV-41})$$

Como para indicar estabilidad las raíces deben ser reales negativas, para encontrar las condiciones de estabilidad es suficiente con exigir que $\epsilon = 1 - 27\mu(1 - \mu) \geq 0$. Si resolvemos para μ :

$$\mu = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{23 + 4\epsilon}{108}}.$$

Como $\mu \leq 1/2$ tomamos el signo menos y tenemos que la condición de estabilidad para los puntos triangulares es $\epsilon > 0$ o:

$$\mu_1 = \mu < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}} = 0,0385 \dots$$

Si realizamos un análisis no lineal de la estabilidad se encuentra que los puntos triangulares son estables para $0 < \mu < \mu_1$, excluyendo los valores particulares $\mu = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{45}\sqrt{1833}) = 0,0243 \dots$, y $\mu = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{45}\sqrt{117}) = 0,0135 \dots$ donde aparece inestabilidad.

12. Movimiento cerca de los puntos triangulares:

En el análisis precedente se eligió un sistema de unidades donde el movimiento medio de la menor de las masas es $w = 1$ con un período orbital 2π . En este sistema, el movimiento resultante para la partícula sin masa tiene dos componentes:

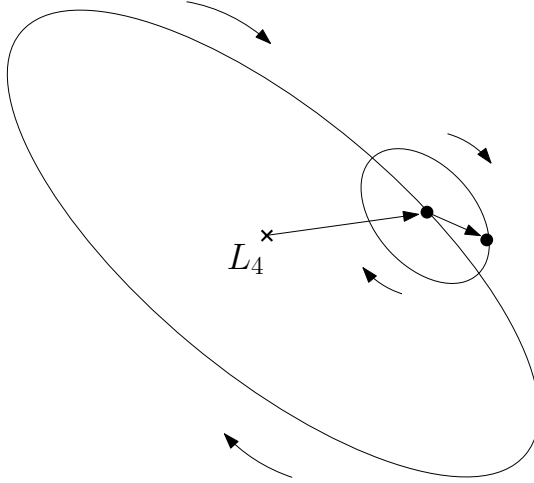


Figura 18:

- una componente de período corto e igual a $2\pi/|\lambda_{1,2}| \sim 2\pi$.
- una componente de período $2\pi/|\lambda_{3,4}|$ más largo que el anterior.

Las amplitudes de estos movimientos dependerán de las constantes que se obtengan para las soluciones generales de ϵ_x y ϵ_y , pero el movimiento se caracteriza por un movimiento de largo período de un EPICENTRO alrededor del punto de equilibrio mientras la partícula describe un movimiento simultáneo de corto período alrededor del epicentro denominado EPICICLO (Figura 18). Al movimiento del epicentro alrededor del punto de equilibrio se lo conoce como movimiento de LIBRACIÓN.

Si bien las soluciones encontradas para el movimiento alrededor de L_4 y L_5 son válidas en la vecindad de estos puntos, siempre es posible recurrir a la integración numérica de las ecuaciones de movimiento para estudiar cómo se mueve la partícula cuando se aleja de los puntos de equilibrio. La integración numérica sera tratada en las próximas unidades, pero ahora podemos decir que lo que sucederá en este caso es que la elipse del movimiento del epicentro se deforma y su eje mayor se extiende sobre la órbita que describe la partícula alrededor del centro de masas del sistema en dirección a L_3 . Esta libración alrededor del punto de equilibrio, que se denomina ÓRBITA TIPO TADPOLE debido a su forma alargada, se puede extender por arcos cada vez más alargados dependiendo de que tan lejos del punto de equilibrio se encuentre inicialmente. En ciertas condiciones, y para puntos de inicio del movimiento algo más alejados del punto de equilibrio, el arco cubierto por el movimiento del epicentro será tan grande que abarcará tanto a L_3 como a *ambos puntos triangulares*. A este tipo de órbitas se las denomina ÓRBITA TIPO HERRADURA. Si la posición inicial de la

partícula es más lejana aún del punto de equilibrio, el movimiento del epicentro no cambia de dirección y se dice que la partícula *CIRCULA* en su órbita.

En el Sistema Solar los asteroides *troyanos* se mueven en órbitas tipo tadpole alrededor del los puntos L_4 y L_5 del sistema Sol - Júpiter. Las amplitudes de libración de estos objetos pueden exceder los 30° , pero el valor medio es de 14° .

La existencia de troyanos no es única del sistema Sol - Júpiter. Por ejemplo, el asteroide (5261) Eureka se encuentra librando alrededor del punto L_5 del sistema Sol - Marte, y el asteroide (3753) Cruithne tiene una órbita en herradura en el sistema Sol - Tierra.

13. Algunos desarrollos en serie útiles:

Debido a que existen pocos problemas de mecánica celeste con solución analítica, usualmente se recurre a aproximaciones para lograr soluciones a problemas particulares. En la próxima unidad se estudiará el problema de desarrollar la función perturbadora en términos de la excentricidad e inclinación de los objetos involucrados. En esta sección se encontrarán algunos desarrollos fundamentales que se necesitarán más adelante.

Una de las relaciones fundamentales es r/a porque sirve de inicio para muchos otros desarrollos necesarios. Si partimos de la ecuación de Kepler tenemos que:

$$e \frac{\partial E}{\partial e} = \frac{e \sin E}{1 - e \cos E},$$

$$dM = (1 - e \cos E) dE,$$

entonces:

$$e \frac{\partial E}{\partial e} dM = e \sin E dE.$$

Esto puede integrarse para obtener:

$$e \int_0^M \frac{\partial E}{\partial e} dM = -e \cos E + C,$$

donde C es una constante. Si reemplazamos en la anterior el desarrollo en serie para E en función de e y M [ecuación (A-3)], tenemos:

$$-e \cos E = C + e \int_0^M (\sin M + e \sin 2M + \dots) dM,$$

pero como $r/a = 1 - e \cos E$:

$$\frac{r}{a} = 1 + C - e \cos M - \frac{1}{2} e^2 \cos 2M + \dots,$$

Para encontrar C podemos asumir que la serie es absolutamente convergente (cosa cierta para valores de e moderados), e integrar ambos lados de la ecuación anterior respecto de M entre los límites 0 y 2π :

$$\int_0^{2\pi} \frac{r}{a} dM = 2\pi(1 + C) - e \int_0^{2\pi} \cos M dM - \dots$$

Los términos trigonométricos se hacen cero al integrar entre estos límites, y el lado izquierdo puede evaluarse notando que r/a y dM pueden expresarse en función de E y dE . Entonces:

$$2\pi \left(1 + \frac{1}{2}e^2\right) = 2\pi(1 + C),$$

lo que implica que $C = e^2/2$. Finalmente:

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos M - \frac{1}{2}e^2(\cos 2M - 1) - \frac{1}{8}e^3(\cos 3M - 3 \cos M) - \dots$$

En general, este desarrollo en serie se puede expresar utilizando la *función de Bessel*, la cual se puede escribir como:

$$\mathcal{J}(x) = \frac{1}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{\gamma=0}^{\infty} (-1)^\gamma \frac{(x/2)^{2\gamma}}{\gamma!(s+1)(s+2)\cdots(s+\gamma)},$$

para valores de s positivos. Esta serie es absolutamente convergente para cualquier valor de x . Entonces, la serie para r/a estará dada por:

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 + \frac{1}{2}e^2 - 2e \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} \frac{d}{de} \mathcal{J}_s(se) \cos sM = \\ &= 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2M) + \frac{3e^3}{8}(\cos M - \cos 3M) + \\ &+ \frac{e^4}{3}(\cos 2M - \cos 4M) + \mathcal{O}(e^5). \end{aligned} \quad (\text{IV-42})$$

Otra serie útil es la que corresponde a $(a/r)^3$ que se deriva de la serie para r/a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{r}\right)^3 &= 1 + 3e \cos M + e^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2} \cos 2M\right) + \\ &+ e^3 \left(\frac{27}{8} \cos M + \frac{53}{8} \cos 3M\right) + \\ &+ e^4 \left(\frac{15}{8} + \frac{7}{2} \cos 2M + \frac{77}{8} \cos 4M\right) + \mathcal{O}(e^5). \end{aligned} \quad (\text{IV-43})$$

La serie para $\sin f$ es:

$$\begin{aligned}
\sin f &= 2\sqrt{1-e^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \frac{d}{de} \mathcal{J}_s(se) \sin sM = \\
&= \sin M + e \sin 2M + e^2 \left(\frac{9}{8} \sin 3M - \frac{7}{8} \sin M \right) + \\
&+ e^3 \left(\frac{4}{3} \sin 4M - \frac{7}{6} \sin 2M \right) + \\
&+ e^4 \left(\frac{17}{192} \sin M - \frac{207}{128} \sin 3M + \frac{625}{384} \sin 5M \right) + \mathcal{O}(e^5).
\end{aligned} \tag{IV-44}$$

La serie para $\cos f$ es:

$$\begin{aligned}
\cos f &= -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \frac{d}{de} \mathcal{J}_s(se) \cos sM = \\
&= \cos M + e(\cos 2M - 1) + \frac{9}{8} e^2 (\cos 3M - \cos M) + \\
&+ \frac{4}{3} e^3 (\cos 4M - \cos 2M) + \\
&+ e^4 \left(\frac{25}{192} \cos M - \frac{225}{128} \cos 3M + \frac{625}{384} \cos 5M \right) + \mathcal{O}(e^5).
\end{aligned} \tag{IV-45}$$

Supongamos que una cierta variable z puede expresarse como función de otra en un desarrollo en serie, o sea $z = \xi - e\phi(\xi)$ para $e < 1$. Entonces, existe un método útil para expresar ξ en función de z que se debe a Lagrange:

$$\xi = z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} [\phi(z)]^j. \tag{IV-46}$$