Métodos Numéricos y Simulaciones en Astrofísica

Parte 10: Problema de N-cuerpos – Métodos Partícula-Grilla

Métodos Partícula - Grilla

La dificultad de los métodos partícula – partícula aparece en el cálculo de las fuerzas (o de la interacción) cuando el sistema tiene decenas de miles de partículas.

En el problema de N-cuerpos:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j=1;\, j\neq i}^{N} \frac{m_j(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}$$

Cómo resolver el problema para millones de partículas?

Métodos Partícula - Grilla

Si las 6*N ecuaciones diferenciales de primer orden se simplifican utilizando una distribución de densidad suave y contínua f(**r**, **v**, t) que responda a la ecuación de Vlasov – Boltzmann:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

donde el potencial y la fuerza vienen dadas por:

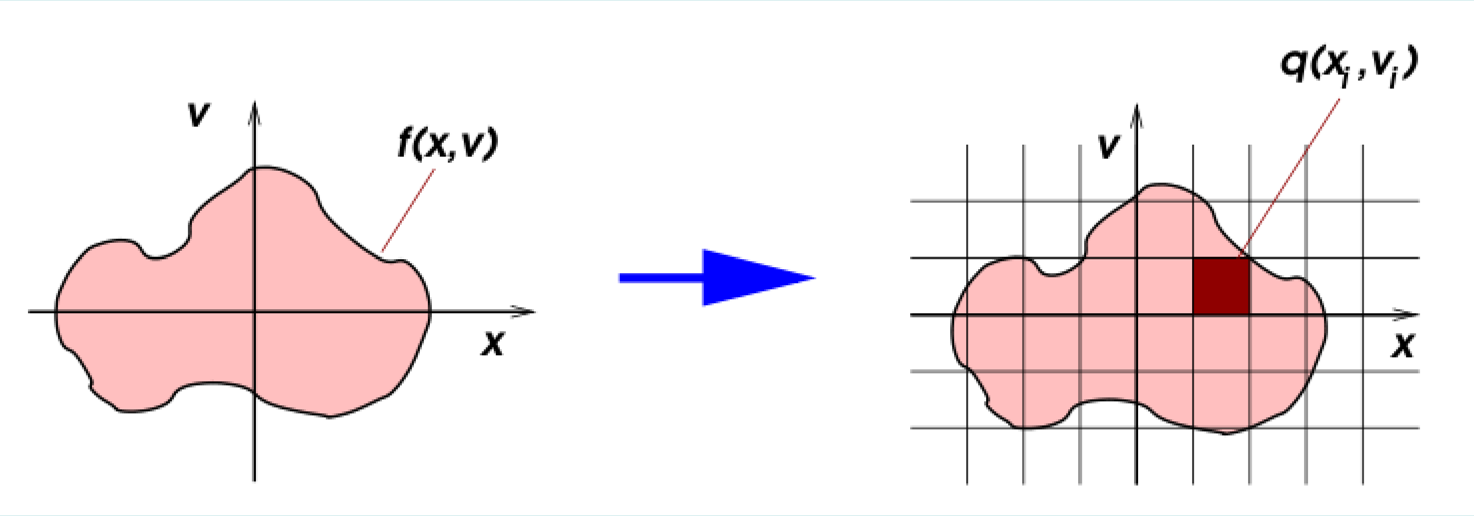
$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \qquad \mathbf{F} = -\nabla \Phi,$$

Siendo ρ la densidad: $\rho = N_V m / V$

Métodos Partícula - Grilla

Para un instante dado f(**r**, **v**) viene expresada en seis dimensiones, por lo que resulta muy difícil de resolver.

Una forma de resolver el problema es discretizar el volumen de integración.



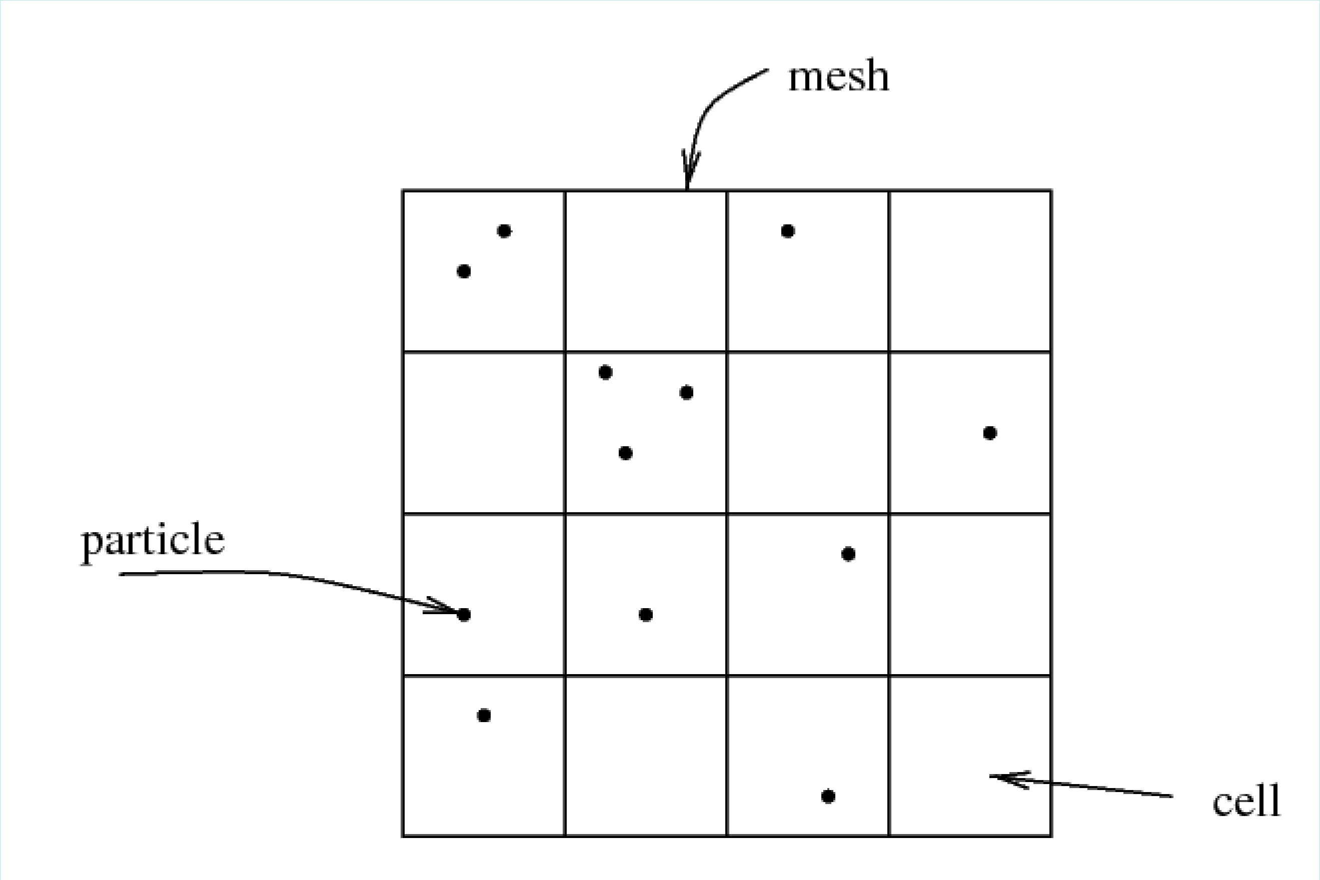
Métodos Partícula - Grilla

La discretización del volumen de integración permite que:

- la densidad de masa sea una propiedad del sistema de partículas en un instante t.
- el potencial (y la fuerza) pasa a ser una propiedad del campo (grilla).
- el potencial se calcula para el centro de cada celda.
- la fuerza sobre cada partícula se interpola de las celdas vecinas.

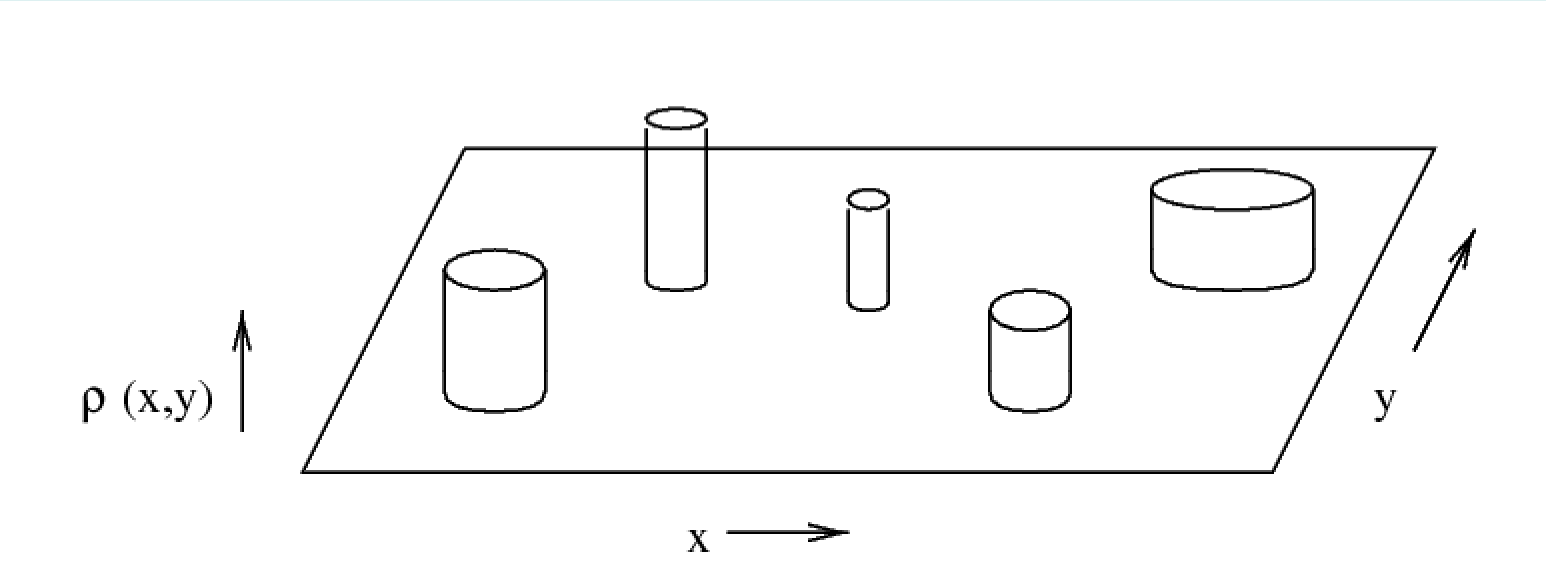
Métodos Partícula - Grilla

En el caso de N-cuerpos:



Métodos Partícula - Grilla

La densidad de masas se obtiene de la distribución de partículas en el sistema:



Métodos Partícula - Grilla

Este método presenta algunas limitaciones pero tiene ventajas:

- es útil sólo en sistemas sin colisiones.
- pierde información por interacciones cercanas.
- es mucho menos preciso que los métodos partícula – partícula.
- dependiendo del número de celdas, es mucho más rápido que otros métodos.

Métodos Partícula - Grilla

Los pasos a seguir para aplicar el método PM son:

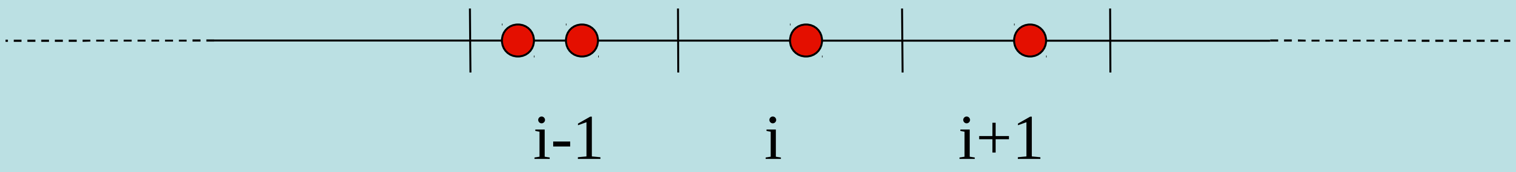
- definir la grilla.
- asignar las partículas a la grilla.
- calcular ρ para cada celda.
- resolver la eq. de Poisson con condiciones de contorno apropiadas.
- calcular la fuerza sobre las partículas.
- realizar un paso de integración en **r** y **v**.
- reasignar las partículas a la grilla, etc.

Veamos un ejemplo en 1D

Métodos Partícula - Grilla

a) Asignar las partículas a la grilla:

Se discretiza el espacio en N celdas:



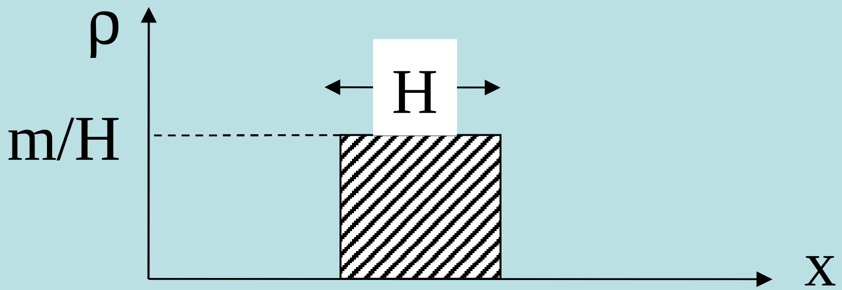
El método más simple es asignar la partícula a la celda en la que se encuentra (nearest grid point – NGP):

$$\rho = N_V m / V$$

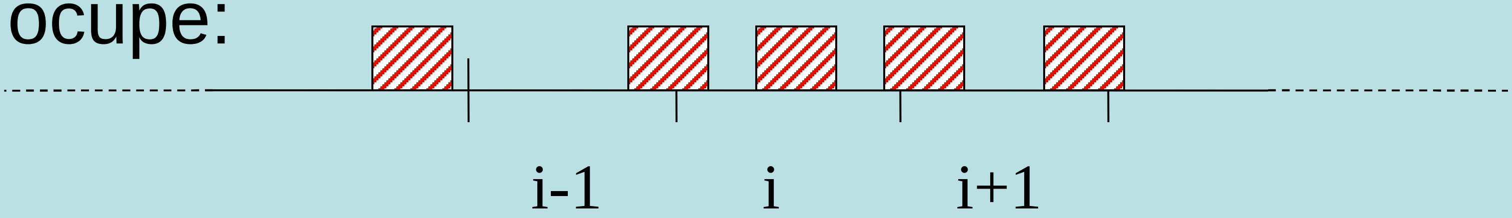
Este tipo de asignación produce una distribución bastante gruesa de ρ.

Métodos Partícula - Grilla

Un método de asignación mejor es considerar que las partículas tiene un tamaño finito y distribuir la masa en el lugar que ocupa (PIC):



Luego distribuir la masa según la zona que ocupe:



También se pueden utilizar otros métodos de distribución (gaussiano, etc.).

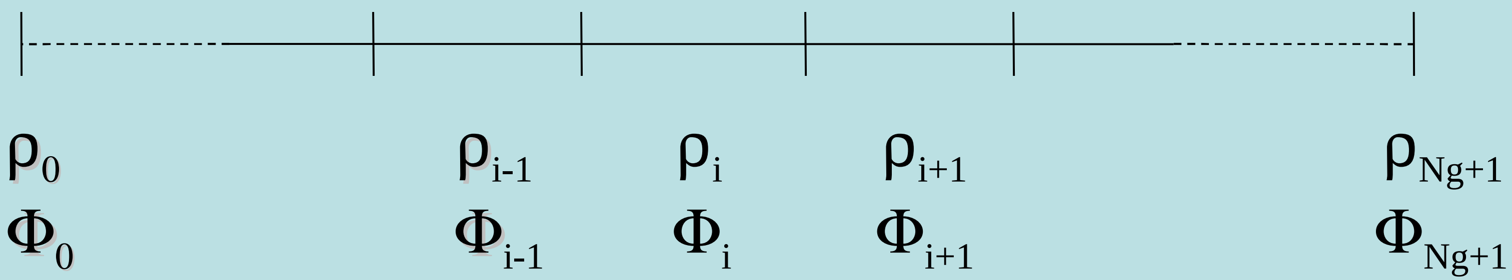
Métodos Partícula - Grilla

b) Resolver la ecuación de Poisson:

En 1D la ecuación es:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 4\pi G\rho$$

Discretizar Φ en el centro de las celdas:



Métodos Partícula - Grilla

Resolver la ecuación de Poisson con diferencias centradas:

$$\left(\frac{\left[\frac{\Phi_{i+1}-\Phi_i}{\Delta x}\right] - \left[\frac{\Phi_i-\Phi_{i-1}}{\Delta x}\right]}{\Delta x} \right) = \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta x^2} = 4\pi G\rho_i$$

Se requieren condiciones de contorno para realizar el cálculo, que se pueden obtener de un desarrollo del tipo:

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}_i) = -\sum_j \frac{Gm_j}{(\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_i)}$$

Métodos Partícula - Grilla

La expresión algebraica para la ecuación de Poisson:

$$\frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta x^2} = 4\pi G \rho_i$$

Puede escribirse como un sistema de N_g ecuaciones lineales acopladas:

$$a_i \Phi_{i-1} + b_i \Phi_i + c_i \Phi_{i+1} = d_i$$

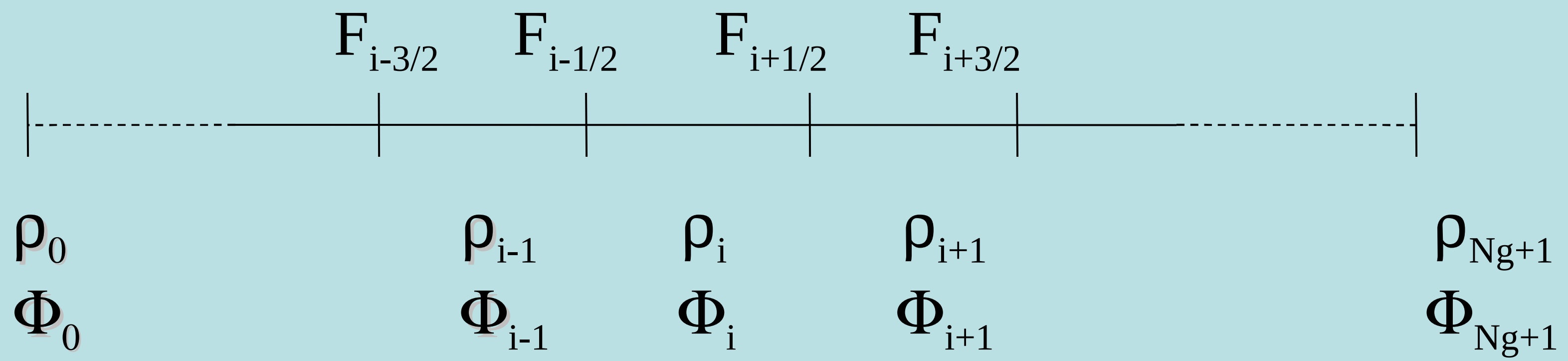
Que forman una matriz tri-diagonal para la cual existen métodos rápidos de solución (4 * N_g operaciones).

Métodos Partícula - Grilla

c) Calcular la fuerza sobre las partículas:

Como se conoce Φ se puede obtener $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$

Las fuerzas están definidas en los bordes de las celdas y se requiere interpolación:



Métodos Partícula - Grilla

Expansión a 3D:

a) Para asignar las partículas se utiliza una distribuçión esférica.
b) Para las condiciones de borde hay que usar desarrollos en multipolos.
c) Para resolver Poisson se discretizan Φ y ρ:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G\rho$$

$$\Phi(x, y, z) \longrightarrow \Phi_{i,j,k}$$

$$\rho(x, y, z) \longrightarrow \rho_{i,j,k}$$