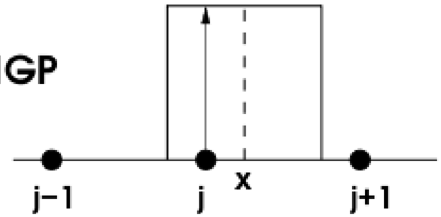
Métodos Numéricos y Simulaciones en Astrofísica

Parte 11: Métodos del árbol –
Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

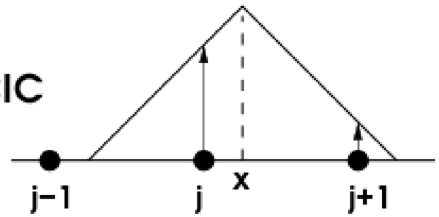
Asignación de las partículas a la grilla

NGP



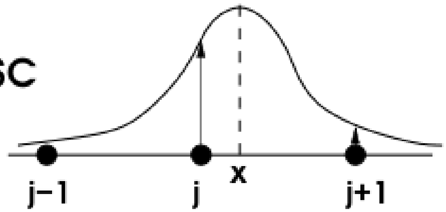
$$W_1(x) = 1, \qquad | x |< 1$$

CIC



$$W_2(x) = 1 - |x|, \qquad | x |< 1$$

TSC



$$W_3(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4} - x^2, & |x| < \frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}(\dfrac{3}{2} - |x|)^2, & \frac{1}{2} < |x| < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Densificacíon de la Grilla

- logra mejor resolución en sistemas con densidad variable.
- se basa en detectar celdas de la grilla con sobredensidad.
- la celda se subdivide y se reasignan las parículas.
- se encuentra el potencial para la celda “madre” y luego se procede a encontrar el de las celdas “hijas”.
- es ideal cuando la distribución de densidad de masa no es suave.

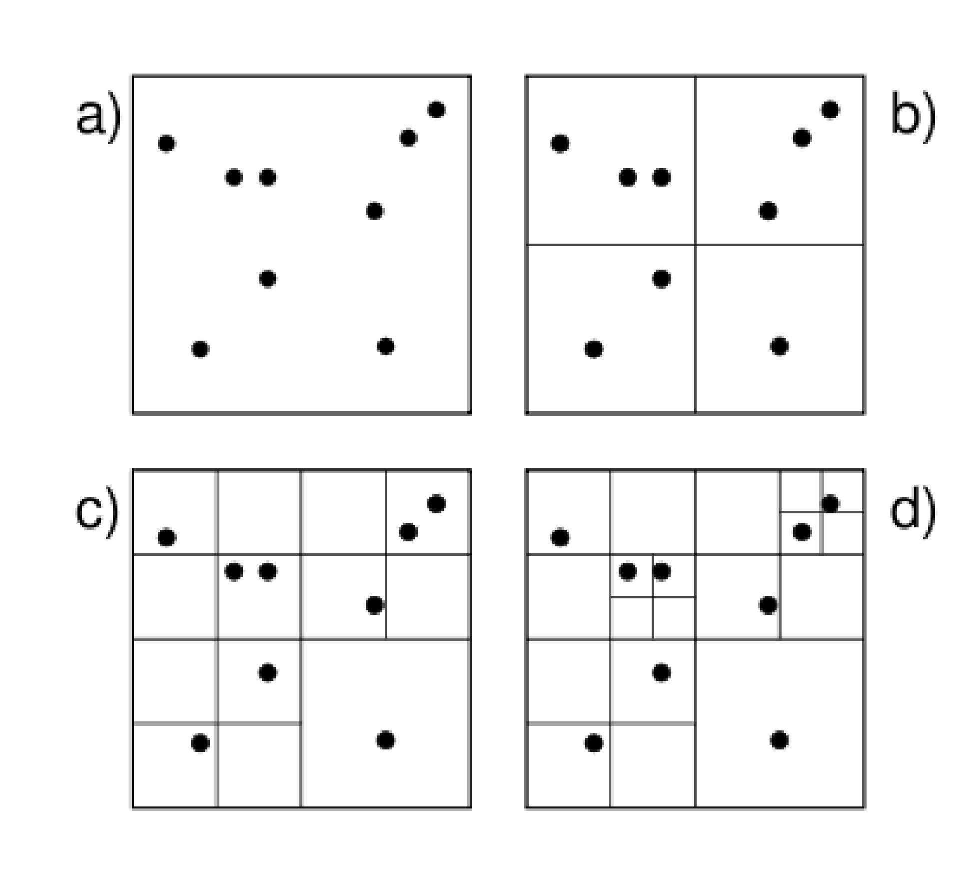
Método del árbol

- propuesto por Barnes and Hut (1986).
- formalmente, no utiliza una grilla pero si una subdivisión del espacio.
- la fuerza se calcula de forma directa considerando como puntuales grupos de partículas a grandes distancias.
- suele mencionarse como código de árbol octogonal.

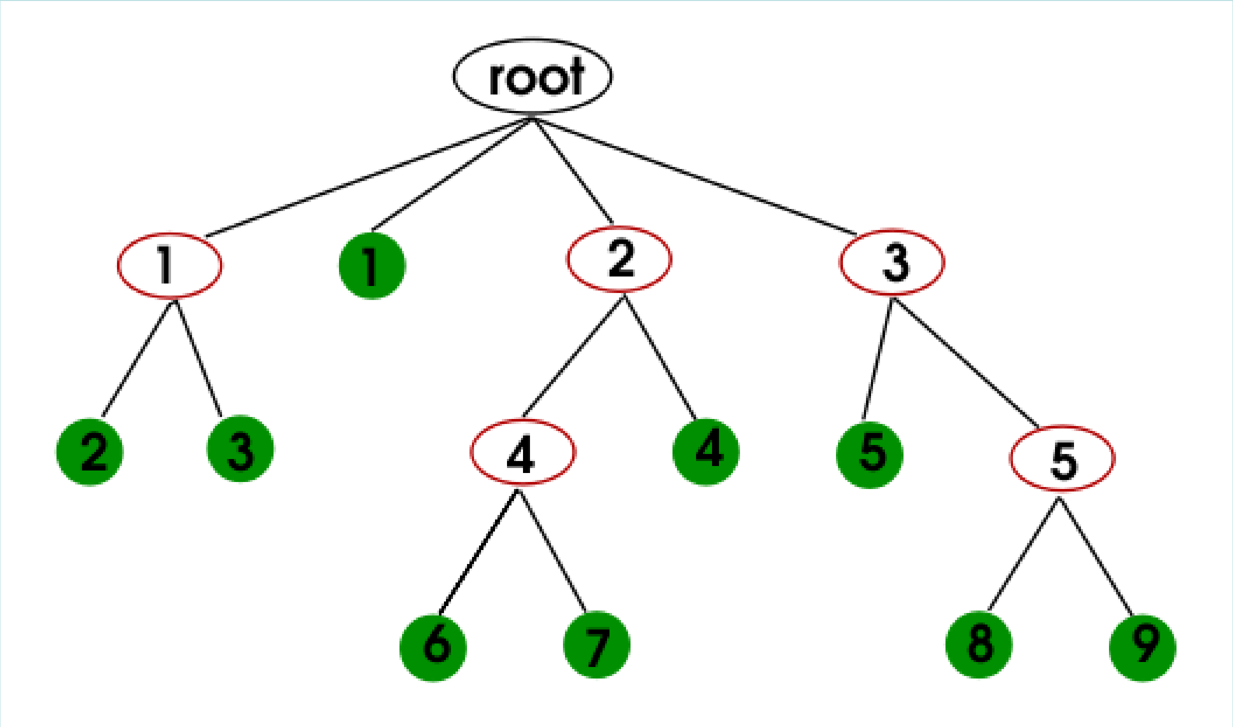
Método del árbol

- se inicial con una celda de forma cúbica vacía y se agregan las partículas del sistema.
- si en la celda “madre” hay más de 1 partícula, se subdivide en 8 celdas “hijas”.
- el proceso se repite hasta que cada celda tiene sólo una partícula.
- cuando se termina el proceso el espacio estará particionado en un cierto número de celdas cúbicas de diferentes tamaños.
- a la celda inicial se la denomina “raiz”, a las celdas que se han subdividido “ramas” y a las celdas finales “hojas”.

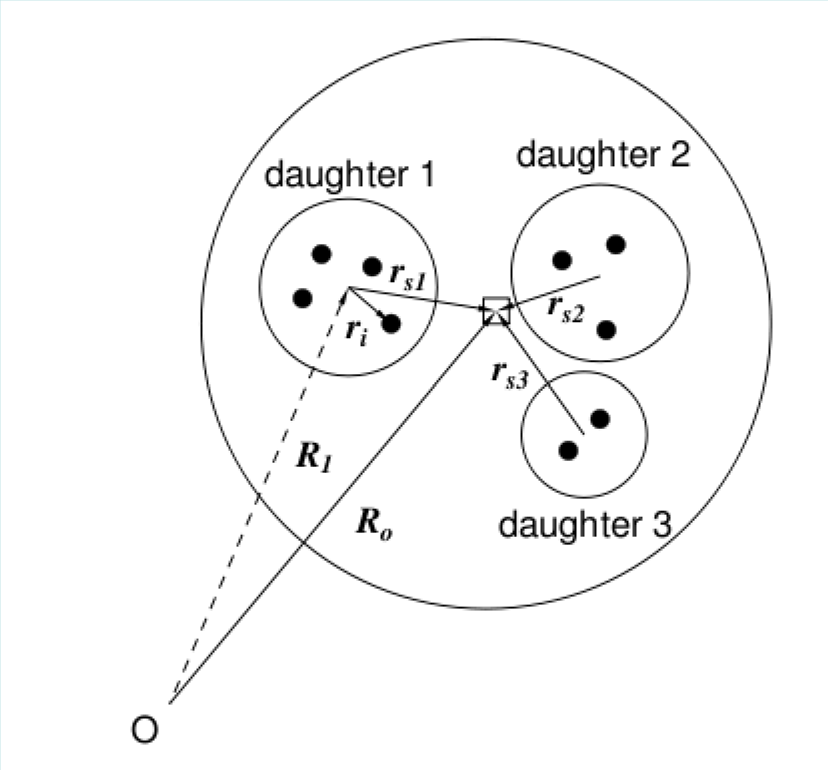
Método del árbol



Método del árbol



Método del árbol



Cada celda debe cargarse con la información física. Por ejemplo, el baricentro de una cantidad q:

$$\mathbf{r}_{coc} = \frac{\sum_i |\, q_i \,|\, \mathbf{r}_i}{\sum_i |\, q_i \,|}$$

Método del árbol

Los momentos multipolares son:

$$M = \sum_i q_i$$

$$D_\alpha = \sum_i q_i r_{i\alpha}$$

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_i q_i (3 r_{i\alpha} r_{i\beta} - r_i^2 \delta_{\alpha\beta})$$

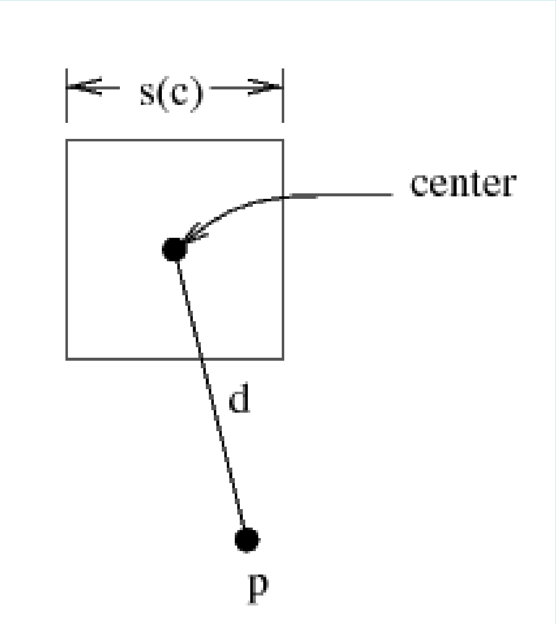
Para calcular los momentos en las “ramas” hay que sumar la distancia de las “hojas” al respectivo baricentro:

$$\sum_i q_i x_i \quad \rightarrow \quad \sum_i q_i x_i - x_{sd} \sum_i q_i$$

$$\sum_i q_i x_i^2 \quad \rightarrow \quad \sum_i q_i x_i^2 - 2 x_{sd} \sum_i q_i x_i + x_{sd}^2 \sum_i q_i$$

$$\sum_i q_i x_i y_i \quad \rightarrow \quad \sum_i q_i x_i y_i - x_{sd} \sum_i q_i y_i - y_{sd} \sum_i q_i x_i + x_{sd} y_{sd} \sum_i q_i$$

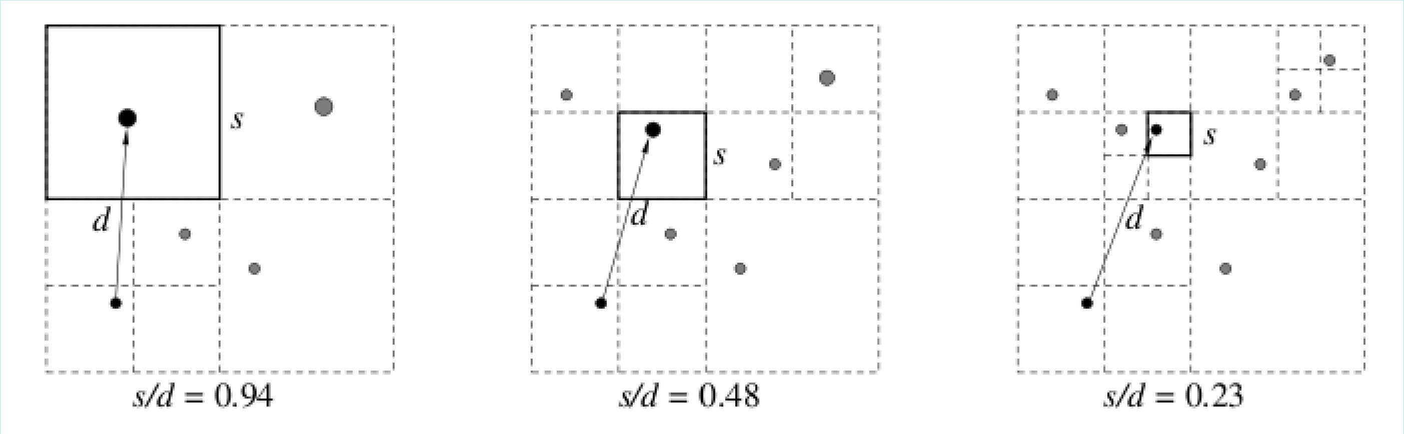
Método del árbol



Si la relación s/d entre el "tamaño" de la celda (s) y la distancia a una partícula (d) es menor que un cierto criterio de aceptación θ, la estructura interna de la celda es ignorada.

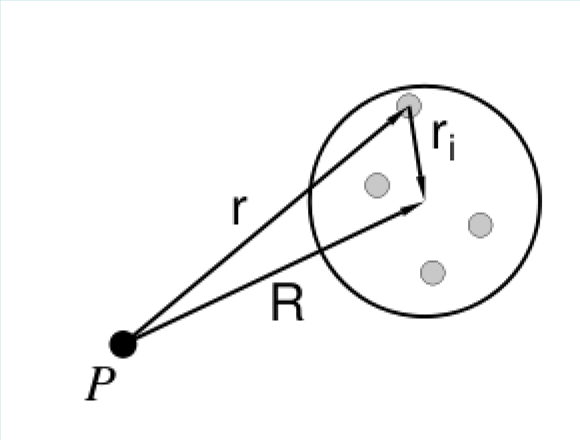
θ =0 equivale a PP
0.3< θ < 1.0

Método del árbol



$\theta = 0.3$

Método del árbol



Haciendo uso de un desarrollo en multipolos, el potencial en P debido a la pseudopartícula es la suma de los potenciales de las partículas en la celda:

$$\Phi(\mathbf{R}) = \sum_i \Phi_i(\mathbf{R} - \mathbf{r}_i),$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\Phi_i(\mathbf{R} - \mathbf{r}_i) &= \frac{q_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|} \\ &= \frac{q_i x_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}}.\end{aligned}$$

Método del árbol

$$
\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{R}) &= \sum_i q_i \left[1 - \mathbf{r}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{2}\mathbf{r}\,\mathbf{r}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \ldots\right]\frac{1}{R} \\
&= \sum_i q_i \left[1 - x_i\frac{\partial}{\partial x} - y_i\frac{\partial}{\partial y} - z_i\frac{\partial}{\partial z}\right. \\
&\quad + \frac{1}{2}x_i^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}y_i^2\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}z_i^2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} \\
&\quad + \frac{1}{2}x_i y_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}y_i z_i\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}x_i z_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\frac{1}{R}
\end{aligned}
$$

Método del árbol

$$\Phi(\mathbf{R}) = \sum_i q_i \left[\frac{1}{R} + x_i \frac{x}{R^3} + y_i \frac{y}{R^3} + z_i \frac{z}{R^3} \right.$$
$$+ \frac{1}{2} x_i^2 \left(-\frac{1}{R^3} + \frac{3x^2}{R^5} \right) + \frac{1}{2} y_i^2 \left(-\frac{1}{R^3} + \frac{3y^2}{R^5} \right)$$
$$+ \frac{1}{2} z_i^2 \left(-\frac{1}{R^3} + \frac{3z^2}{R^5} \right)$$
$$\left. + x_i y_i \left(\frac{3xy}{R^5} \right) + y_i z_i \left(\frac{3yz}{R^5} \right) + x_i z_i \left(\frac{3xz}{R^5} \right) \right]$$

$$\Phi(\boldsymbol{R}) = \frac{M}{R} + \sum_\alpha \frac{r_\alpha D_\alpha}{R^3} + \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta} \frac{r_\alpha r_\beta}{R^5},$$

Smoothed Particle Hydrodynamics

• Problemas hidrodinámicos en astrofísica (formación y evolución de galaxias, formación estelar, discos, etc.)
• Se diferencian de problemas de n-cuerpos en que el gas experimenta efectos de presión.
• En escalas microscópicas, las colisiones entre moléculas y/o átomos cambia sistemáticamente sus trayectorias.
• En escalas macroscópicas la suma de estos efectos produce una fuerza que es proporcional al gradiente local de la presión.

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i,$$
$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i}\nabla P_i - \nabla \Phi_i,$$

Movimiento de una celda de fluído

P es la presión
ρ es la densidad
Φ es el pot. gravitatorio

Smoothed Particle Hydrodynamics

- La idea es evaluar el gas en una grilla para obtener los valores necesarios para aplicar en las ecuaciones.
- El problema es cómo evaluar:

$$\frac{1}{\rho_i} \nabla P_i$$

- La idea es que en SPH cada partícula representa una distribución de densidad:

$$\rho_j(\mathbf{r}) = m_j W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|; h),$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} \rho_j(\mathbf{r})$$

- Donde W es un kernel que describe la distribución de masa asociada a a partícula j.

Smoothed Particle Hydrodynamics

- El objetivo del kernel es suavizar la distribución y hay varias opciones para elegir. Por ejemplo, un kernel gaussiano:

$$W(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|;h) = \frac{1}{h^3\pi^{3/2}} \exp[-(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|/h)^2] .$$

Donde h se denomina “escala de suavizado”. Otro ejemplo es un kernel compacto:

$$W(r,h) = \frac{1}{\pi h^3}\left[1-\frac{3}{2}(r/h)^2+\frac{3}{4}(r/h)^3\right], \quad 0 \le r/h \le 1$$

$$W(r,h) = \frac{1}{4\pi h^3}[2-(r/h)]^3 \quad 1 \le r/h \le 2$$

$$W(r,h) = 0 \quad r/h \ge 2$$

$r = |r - r_j|$

Smoothed Particle Hydrodynamics

- El kernel debe definirse de modo que:

$$\int_0^\infty W(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|;h)\,d\mathbf{r} = 1$$

$$\lim(h \to 0) W(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|;h) = \delta_D(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)$$

Donde δ_D es una delta de Dirac.

Smoothed Particle Hydrodynamics

- La escala de suavizado se define como:

$$h = \frac{h_0}{< \rho >^{1/3}},$$

$$< \rho > = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \rho_i$$

- pero se puede tomar variable, por ejemplo dependiendo de cambios de densidad:

$$\frac{dh_i}{dt} = -\frac{h_i}{3\rho_i} \frac{d\rho_i}{dt}.$$

Smoothed Particle Hydrodynamics

- Cualquier cantidad física asociada con el fluído (presión, temperatura, etc.) se estima usando interpolación entre los valores conocidos usando la densidad como valor de peso:

$$A(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|, h)$$

Donde **r** se refiere a la posición de una partícula i y ρ_i / m_i es el número de partículas por unidad de volumen.

- Las derivadas de las cantidades físicas se obtienen derivando el kernel. Por ejemplo:

$$\nabla P(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{P_j}{\rho_j} \nabla W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|, h)$$

Smoothed Particle Hydrodynamics

Un código SPH simple debe incluir:

- condiciones iniciales (posición, velocidad, masas, densidad).
- un método para calcular el potencial gravitatorio.
- una ley física relacionando presión y densidad.
- un esquema de integración numérica para avanzar posición y velocidad (Euler!).
- una forma de determinar el gradiente de presión.
- un método para determinar el valor de h.