Métodos Numéricos y Simulaciones en Astrofísica

Parte 2: Números Aleatorios

Números Aleatorios

- Numerical Recipes – Press et al.
- Random number generators – Park and Miller

El objetivo es generar números entre dos valores dados con un período de repetición infinito

En cualquier aplicación computacional el limitante es el modo de representación de números utilizado

Números Aleatorios

• números quasi-aleatorios o pseudo-aleatorios.
• dependen de la distribución asumida (uniforme, gaussiana, exponencial, etc.).
• todos los compiladores tienen un generador uniforme (“RAN”, “RANDOM_NUMBER”, etc.) que devuelve reales.
• en general dependen del procesador y usualmente son de **muy mala calidad**.

Generador Uniforme

• generadores lineales multiplicativos congruentes:

$$I_{(j+1)} = mod_m\ (a\ I_j + c) \qquad \text{para } j=1,2,\ldots$$

m es el módulo, a el multiplicador y c el incremento.
Algoritmo de Lehmer (1951).

• como se utiliza recurrencia, la serie de números generados se repite a si misma con un período no mayor a m.

Generador Uniforme

- m debe ser un entero primo grande.
- a debe ser un entero entre 2 y m-1.
- el valor inicial, I_1, debe ser un entero entre 1 y m-1.
- se obtienen valores en (0,1) haciendo $u = I / m$.
- como m es primo, I no puede ser 0.
- u no puede ser 0 o 1.
- el menor valor posible de u es $1 / m$.
- el mayor valor posible de u es $1 – 1 / m$.

Generador Uniforme

Ejemplos (semilla diferente):

- $m=13$, $a=6$, $c=0$; $I_1=1$

  …1,6,10,8,9,2,12,7,3,5,4,11,1,…

- $m=13$, $a=6$, $c=0$; $I_1=2$

  …,2,12,7,3,5,4,11,1,6,10,8,9,2,…

El cambio de semilla desplaza la serie

Generador Uniforme

Ejemplos (multiplicador malo):

- $m=13$, $a=5$, $c=0$; $I_1=1$

…1,5,12,8,1,…

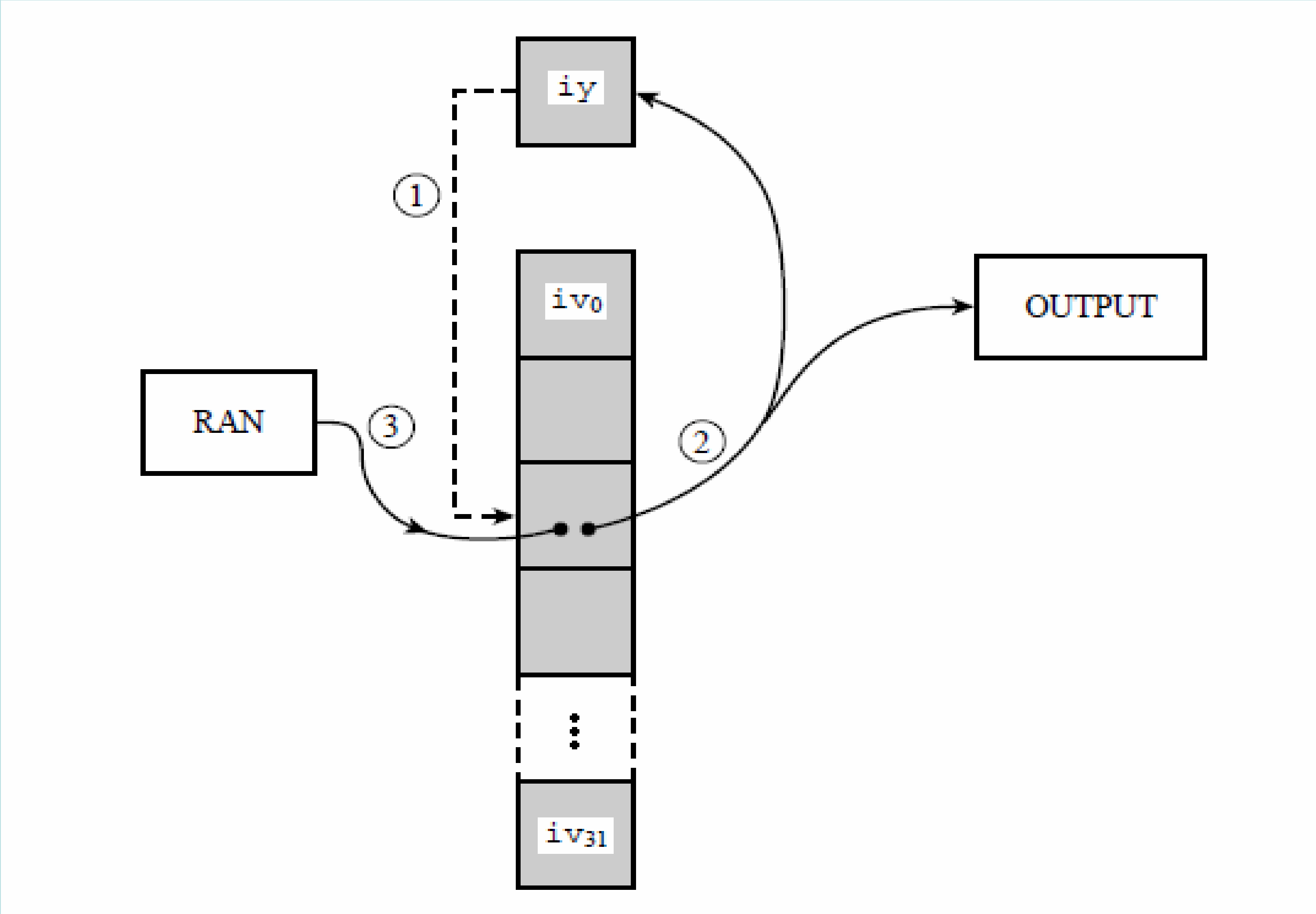
- $m=13$, $a=5$, $c=0$; $I_1=2$

…,2,10,11,3,2,…

Se debe elegir un multiplicador para asegurar una serie completa (para m=13, a=2,6,7, y 11).

Números Aleatorios

Método de Bays and Burham para destruir correlaciones:



Generador Uniforme

• para un procesador de 32 bits el mayor entero posible es 2^{31}.
• el mayor primo es $2^{31} - 1 = 2147483647$.
• un multiplicador que nos da la serie completa para este valor es $7^5 = 16807$, pero hay varios cientos de millones de posibles valores (48271 y 69621 son otras dos posibilidades).
• en este caso, $c = 0$ es suficiente.

Trabajando en 32 bits pueden aparecer problemas de overflow cuando hacemos $(a * I_j)$

Generador Uniforme

Algoritmo de Schrage para evitar overflow:

Schrage's algorithm is based on an *approximate factorization* of m,

$$m = aq + r, \quad \text{i.e.,} \quad q = [m/a],\ r = m \bmod a \tag{7.1.4}$$

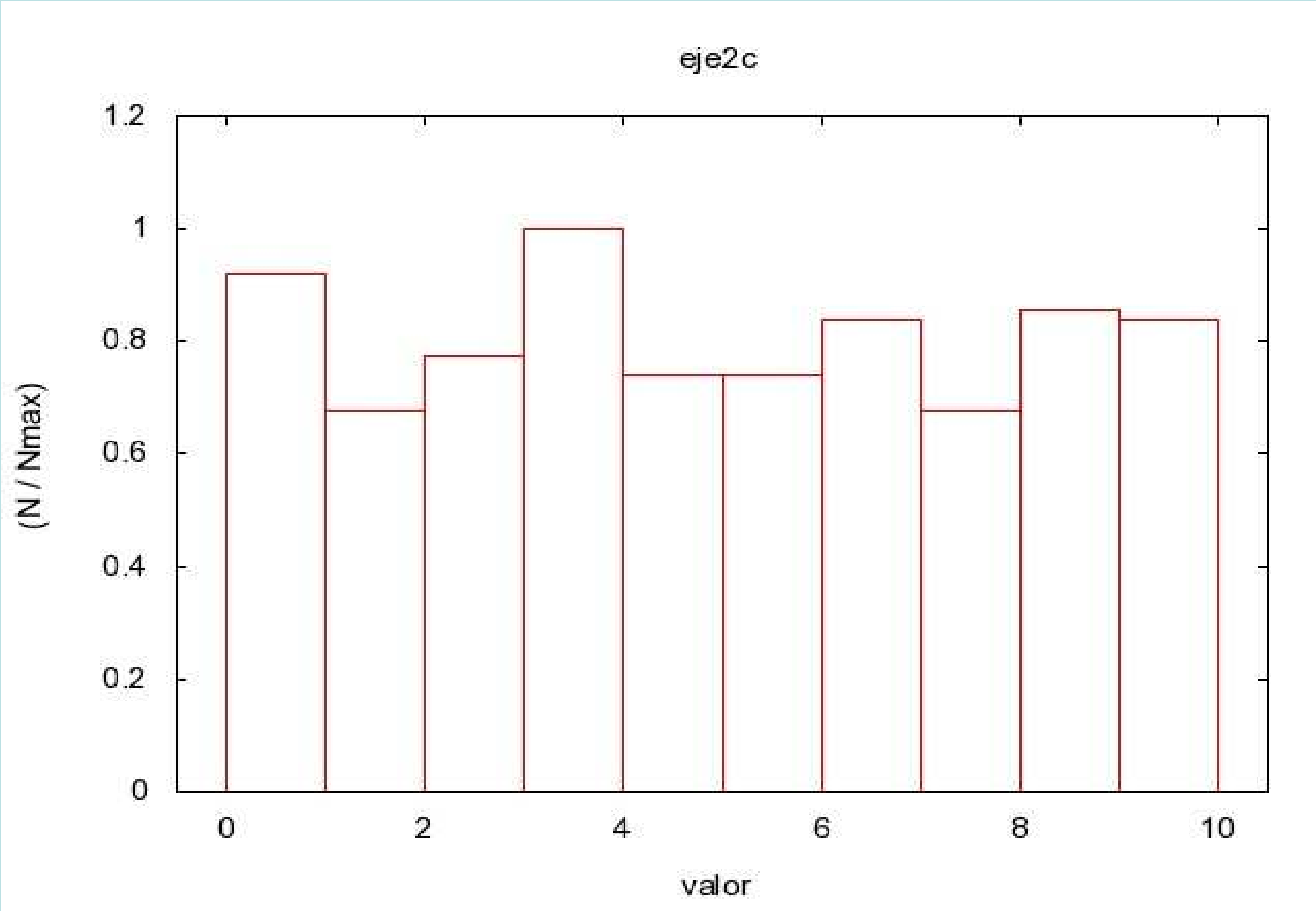
with square brackets denoting integer part. If r is small, specifically $r < q$, and $0 < z < m-1$, it can be shown that both $a(z \bmod q)$ and $r[z/q]$ lie in the range $0, \ldots, m-1$, and that

$$az \bmod m = \begin{cases} a(z \bmod q) - r[z/q] & \text{if it is} \geq 0, \\ a(z \bmod q) - r[z/q] + m & \text{otherwise} \end{cases} \tag{7.1.5}$$

The application of Schrage's algorithm to the constants (7.1.3) uses the values $q = 127773$ and $r = 2836$.

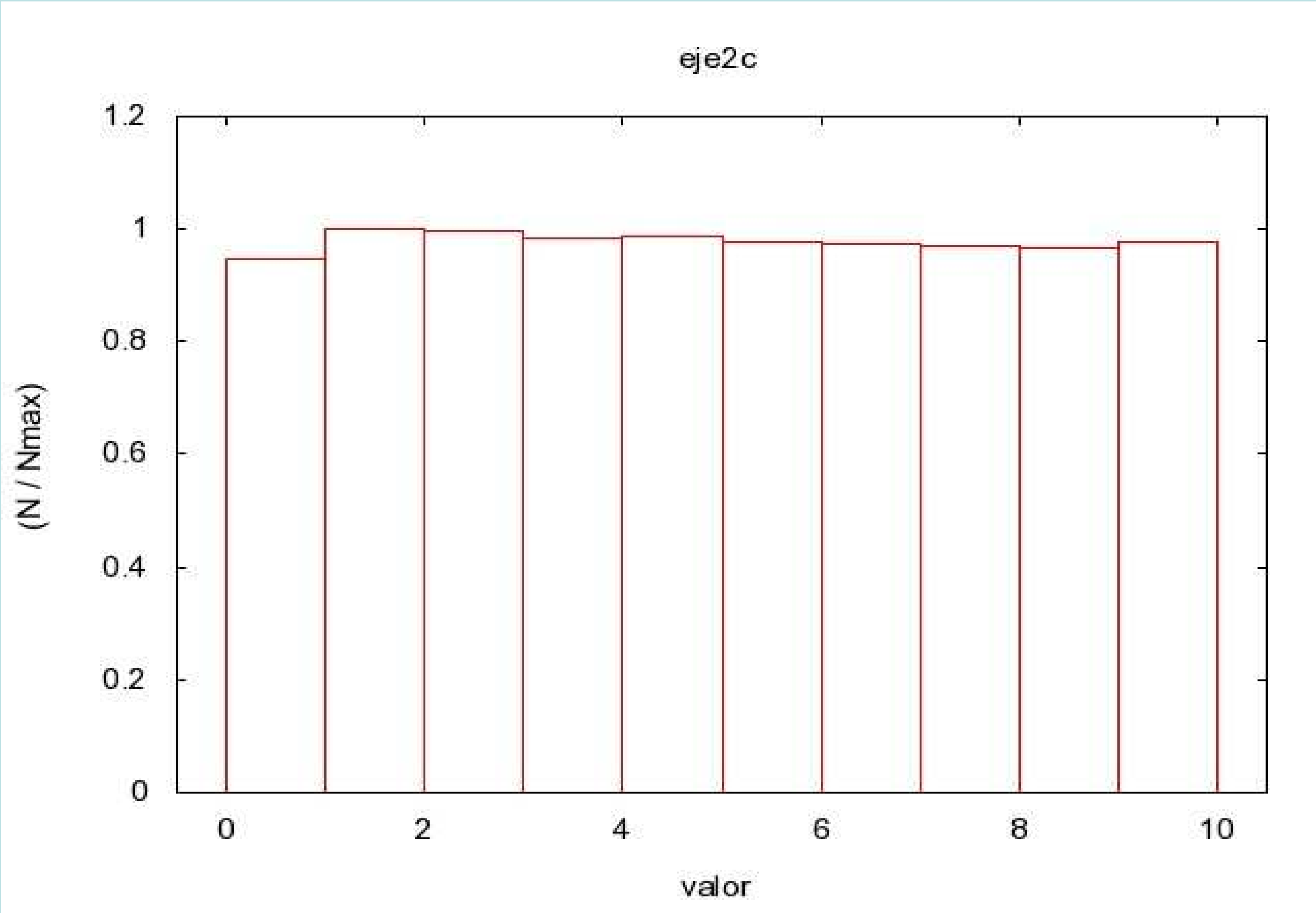
Generador Uniforme

Qué se debe esperar? $N_{tot} = 5 \times 10^2$



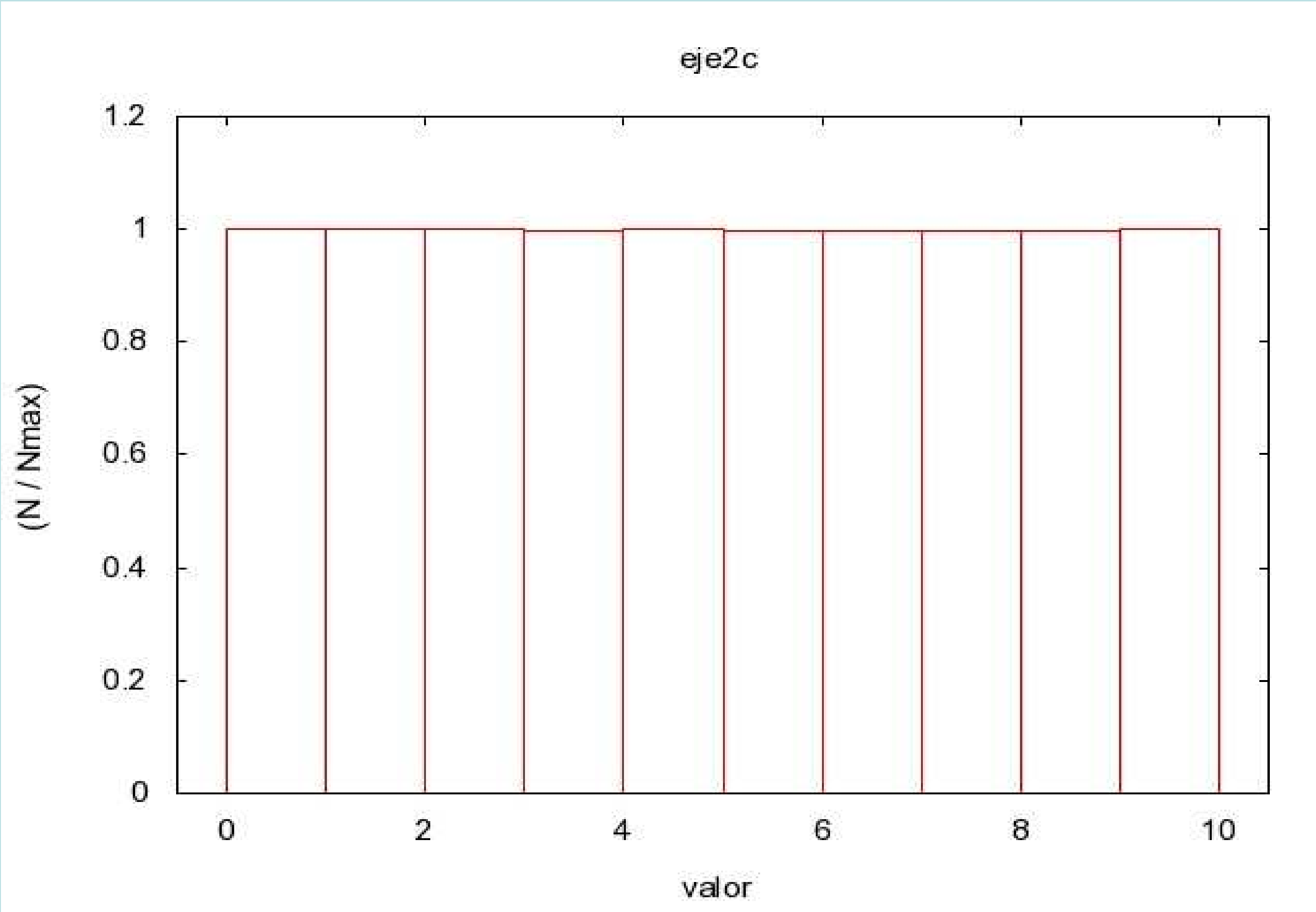
Generador Uniforme

Qué se debe esperar? $N_{tot} = 5 \times 10^4$



Generador Uniforme

Qué se debe esperar? $N_{tot} = 5 \times 10^6$



Números Aleatorios

Distribución arbitraria f(y) = p(y)

In the previous section, we learned how to generate random deviates with a uniform probability distribution, so that the probability of generating a number between x and $x + dx$, denoted $p(x)dx$, is given by

$$p(x)dx = \begin{cases} dx & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{7.2.1}$$

The probability distribution $p(x)$ is of course normalized, so that

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \tag{7.2.2}$$

Now suppose that we generate a uniform deviate x and then take some prescribed function of it, $y(x)$. The probability distribution of y, denoted $p(y)dy$, is determined by the fundamental transformation law of probabilities, which is simply

$$|p(y)dy| = |p(x)dx| \tag{7.2.3}$$

or

$$p(y) = p(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \tag{7.2.4}$$

Números Aleatorios

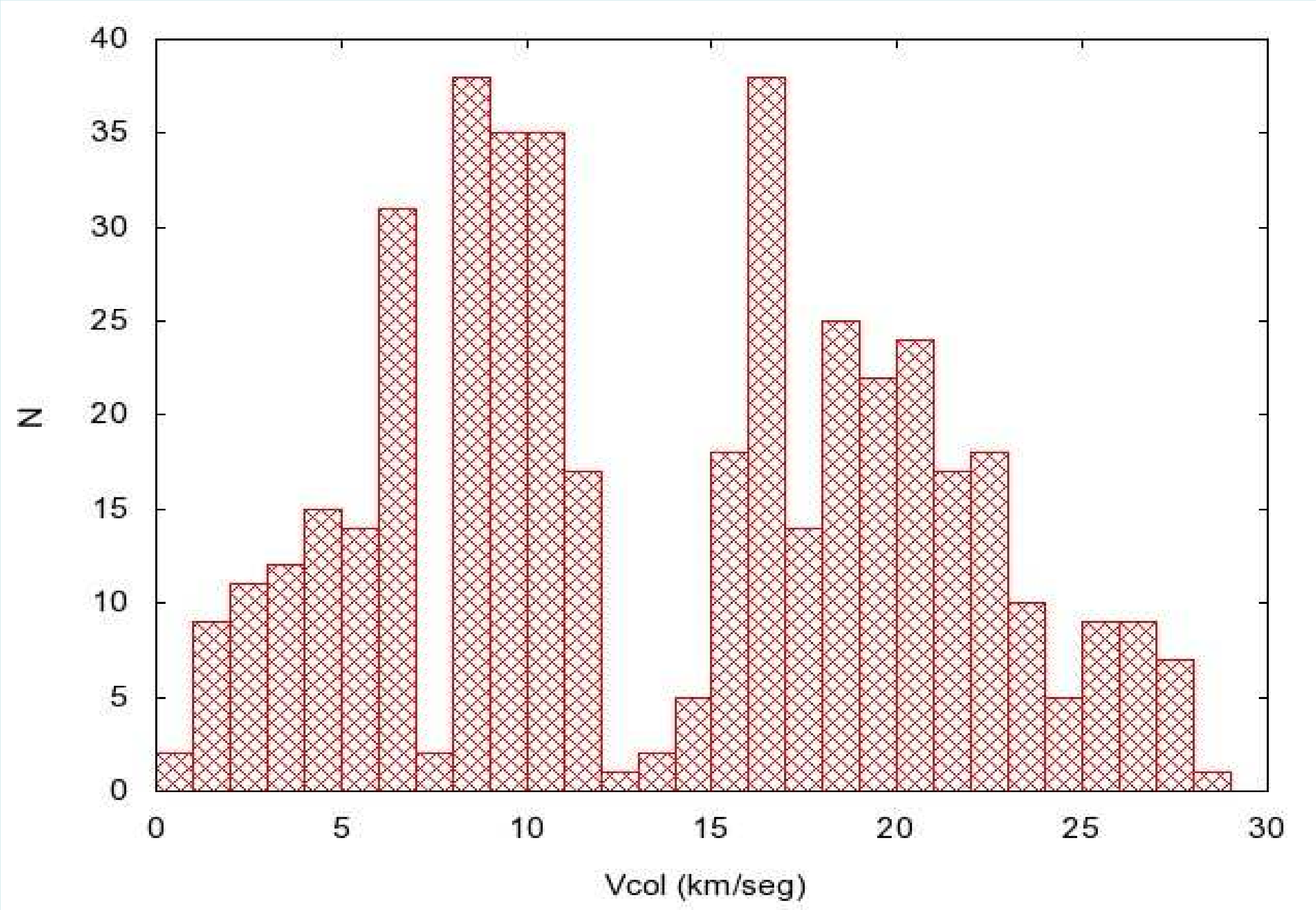
Distribución arbitraria f(y) = p(y)

Ejemplo:

Estoy simulando un proceso colisional en el Sistema Solar y las velocidades de los proyectives se obtienen de una distribución de probabilidades que no tiene representacón analítica conocida.

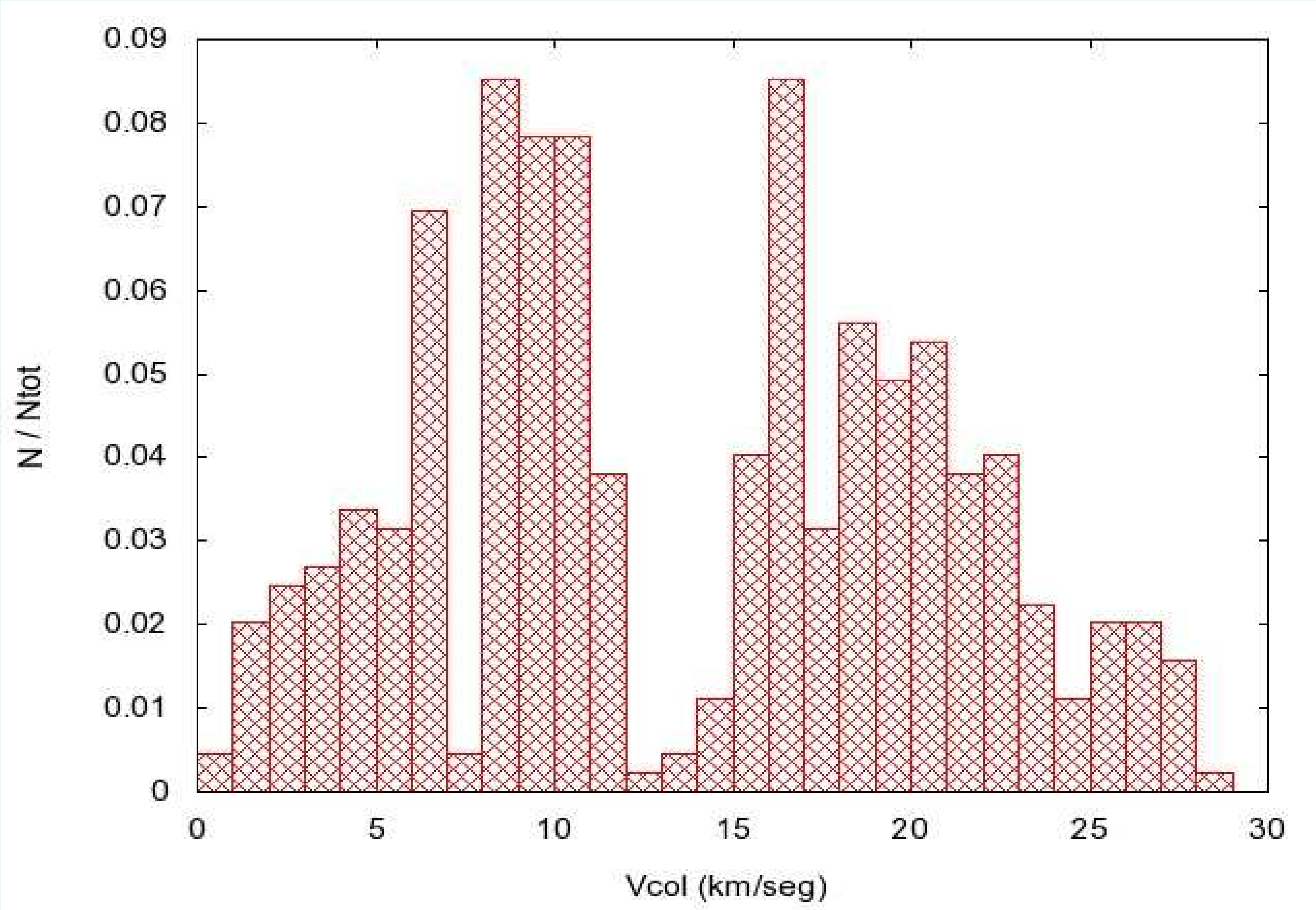
Números Aleatorios

Distribución arbitraria $f(V_{col}) = p(V_{col}) = ?$



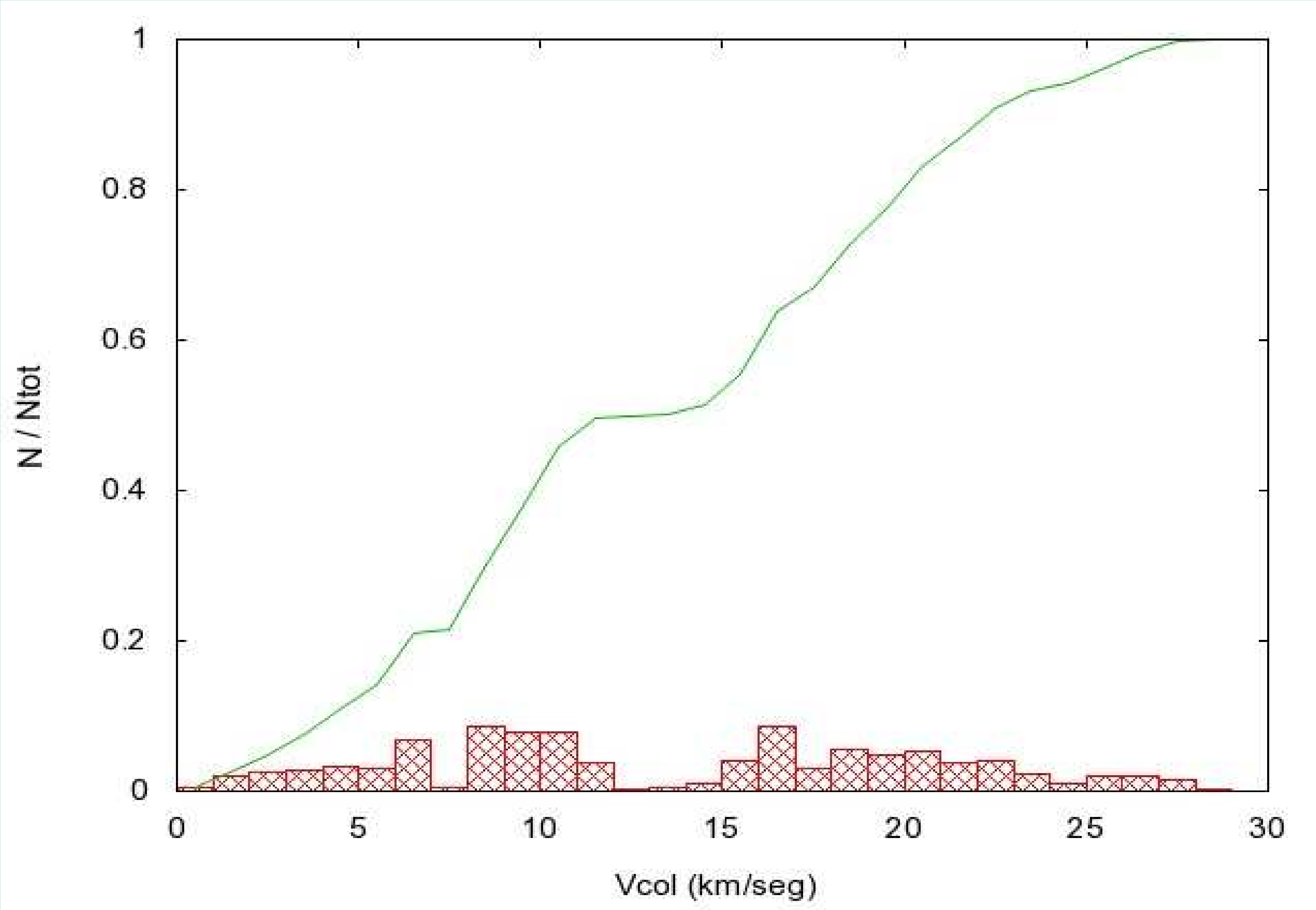
Números Aleatorios

Distribución arbitraria $f(V_{col}) = p(V_{col}) = ?$



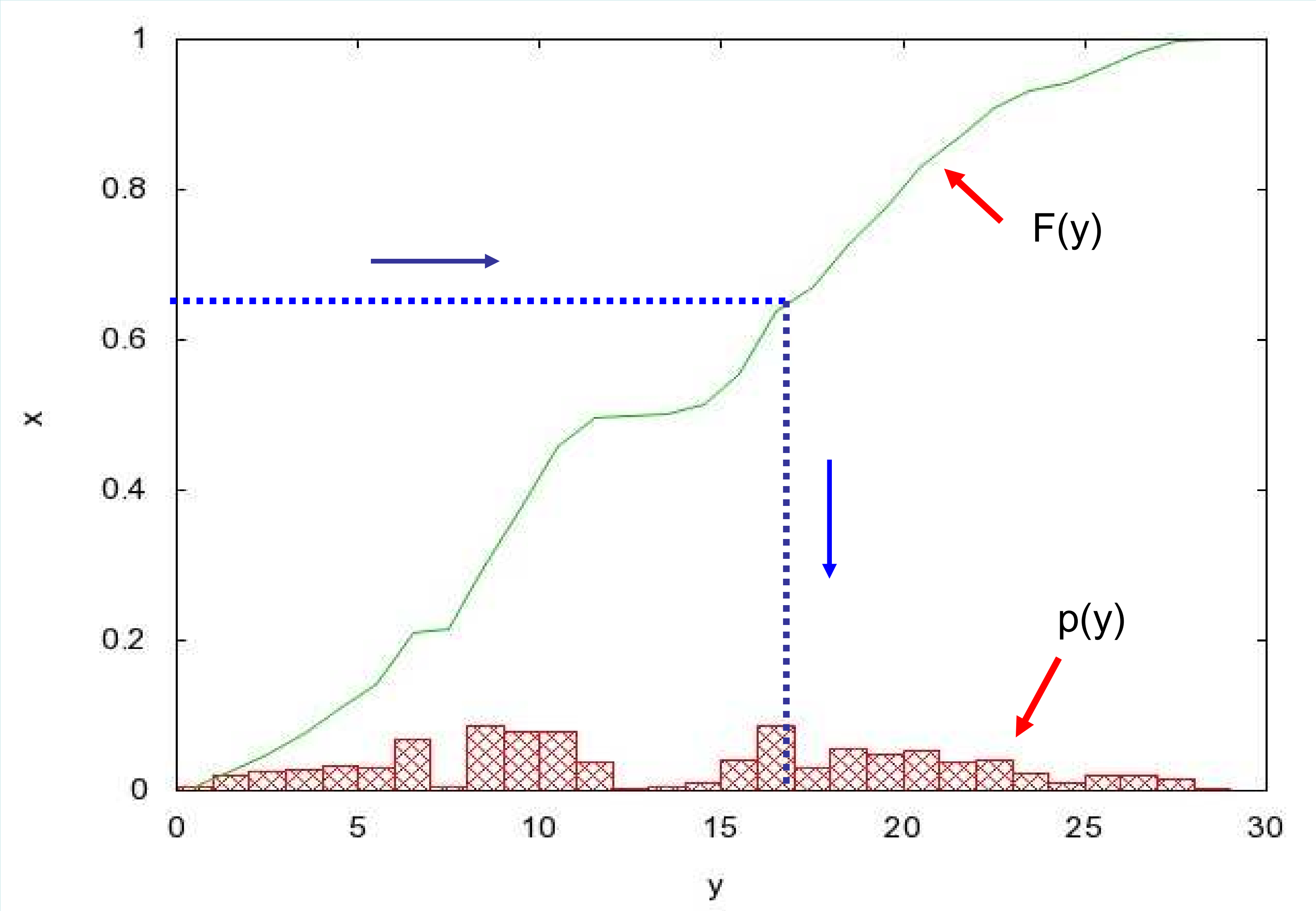
Números Aleatorios

Distribución arbitraria $f(V_{col}) = p(V_{col}) = ?$



Números Aleatorios

Distribución arbitraria $f(V_{col}) = p(V_{col}) = ?$



Números Aleatorios

Distribución arbitraria $f(V_{col}) = p(V_{col}) = ?$