Procesamiento Avanzado de Imágenes Astronómicas

Restauración y reconstrucción de imágenes II

Función de degradación

- consideraremos sólo procesos lineales y que no dependen de las coordenadas sobre la imagen.
- la degradación se modela como resultado de una convolución.
- hay tres formas de estimar la degradación:

  - por observación.
  - por experimentación.
  - por modelado matemático.

- el proceso por el cual se restaura una imagen estimando la degradación se denomina deconvolución a ciegas.

Estimación por observación

- la información sobre la degradación hay que obtenerla de la propia imagen degradada.
- para reducir el efecto del ruido se elige una sección con señal fuerte (alto contraste).
- procesar la sección para revertir el proceso de degradación observado (filtrado o a mano).
- si la sección degradada es $g_s(x,y)$ y la procesada es $f_s(x,y)$, y asumimos que el ruido es despreciable:

$$H_s(u,v) = \frac{G_s(u,v)}{\hat{F}_s(u,v)}$$

Estimación por experimentación

- experimentar con el equipo de adquisición hasta obtener la misma degradación de la imagen.
- la idea es obtener la imagen degradada de un impulso usando la misma configuración.
- el impulso se simula con un punto de luz brillante para evitar el ruido.
- como la FFT de un impulso es una constante A:

$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A}$$

Estimación por modelado

- el modelado se realiza en base a algún conocimineto de los procesos de degradación que están actuando.
- Hufnagel & Stanley (1964) proponen un modelo para la turbulencia atmosférica:

$$H(u, v) = e^{-k(u^2+v^2)^{5/6}}$$

- que tiene una forma similar a un filtro pasabajos de tipo gaussiano.
- k es una constante (con valores del orden de 0.001).

Estimación por modelado

- otra opción es lograr un modelo a partir de principios básicos.
- supongamos que una imagen f(x,y) sufre un movimiento lineal uniforme en ambas coordenadas caracterizado por funciones $x_0(t)$ e $y_0(t)$.
- si T es el tiempo total de exposición:

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)]\, dt$$

Estimación por modelado

- la transformada de Fourier es:

$$G(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{T} f[x-x_0(t), y-y_0(t)]\,dt\right]e^{-j2\pi(ux+vy)}\,dx\,dy$$

- invirtiendo el orden de integración:

$$G(u,v) = \int_{0}^{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f[x-x_0(t), y-y_0(t)]e^{-j2\pi(ux+vy)}\,dx\,dy\right]dt$$

Estimación por modelado

- la expresión entre corchetes es la transformada de Fourier de la función de desplazamiento. Entonces, como F(u,v) es independiente de t:

$$
\begin{aligned}
G(u,v) &= \int_0^T F(u,v)e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]}\,dt \\
&= F(u,v)\int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]}\,dt
\end{aligned}
$$

Estimación por modelado

- si definimos:

$$H(u,v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]}\,dt$$

- tenemos la usual expresión:

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$$

Estimación por modelado

- si asumimos que $x_0(t)=at/T$ e $y_0(t)=0$:

$$H(u,v) = \int_0^T e^{-j2\pi u x_0(t)}\,dt = \int_0^T e^{-j2\pi uat/T}\,dt = \frac{T}{\pi ua}\sin(\pi ua)e^{-j\pi ua}$$

- si y0(t) también varía:

$$H(u,v) = \frac{T}{\pi(ua + vb)}\sin[\pi(ua + vb)]e^{-j\pi(ua+vb)}$$

Filtrado inverso directo

- si suponemos que se obtiene la función de degradación H por alguno de los métodos explicados y dividimos, tenemos:

$$\hat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)}$$

que es una división punto a punto.

- si reemplazamos G(u,v):

$$\hat{F}(u,v) = F(u,v) + \frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$

Filtrado inverso directo

- incluso conociendo $H(u,v)$ no podemos recuperar $F(u,v)$ debido a que no conocemos la componente de ruido $N(u,v)$.
- si $H(u,v)$ tiene valores próximos a cero, $N(u,v)/H(u,v)$ se hace muy grande y domina la solución.
- la mejor opción es limitar las frecuencias del filtro a valores cercanos al origen, lo que corresponde a un filtrado pasabajos.

Filtrado de Wiener

- también se lo denomina Filtrado por Mínimo del Error Cuadrático Medio, propuesto por Wiener (1942).
- este filtrado considera tanto la función de degradación como las propiedades estadísticas del ruido.
- se considera la imagen y el ruido como variables al azar y el objetivo es minimizar el error cuadrático medio entre una imagen f y su estimación:

$$e^2 = E\{(f - \hat{f})^2\}$$

donde E{.} es la expectativa del argumento.

Filtrado de Wiener

- se asume que:
  - la imagen y el ruino no están correlacionados.
  - que uno u otro tiene media cero.
  - que los valores en la estimación son funciones lineales de los valores degradados.
- si definimos que:

$H(u, v)$ = degradation function

$H^*(u, v)$ = complex conjugate of $H(u, v)$

$|H(u, v)|^2 = H^*(u, v)H(u, v)$

$S_\eta(u, v) = |N(u, v)|^2$ = power spectrum of the noise

$S_f(u, v) = |F(u, v)|^2$ = power spectrum of the undegraded image

Filtrado de Wiener

• sin hacer el desarrollo completo, el mínimo de la función de error viene dado en frecuencia por:

$$\hat{F}(u,v) = \left[\frac{H^*(u,v)S_f(u,v)}{S_f(u,v)|H(u,v)|^2 + S_\eta(u,v)}\right]G(u,v)$$

$$= \left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + S_\eta(u,v)/S_f(u,v)}\right]G(u,v)$$

$$= \left[\frac{1}{H(u,v)}\frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + S_\eta(u,v)/S_f(u,v)}\right]G(u,v)$$

donde el filtro se indica entre corchetes.

Filtrado de Wiener

- a este filtro se lo denomina filtro de Wiener, de mínimo del error cuadrático medio o de error de mínimos cuadrados.
- si N(u,v) = 0, se reduce a un filtrado inverso.
- utilizando estas expresiones es posible obtener una serie de parámetros que son de utilidad:

  - Relación S/N en frecuencias:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |F(u, v)|^2}{\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |N(u, v)|^2}$$

Filtrado de Wiener

- Error cuadrático medio:

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[f(x,y) - \hat{f}(x,y)\right]^2$$

- Relación S/N en el dominio espacial:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\hat{f}(x,y)^2}{\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left[f(x,y) - \hat{f}(x,y)\right]^2}$$

Filtrado de Wiener

- cuando tenemos ruido blanco, el espectro de potencia del ruido $|N(u,v)|^2$ es una constante que simplifica el proceso.
- como el espectro de potencia de la imagen original no se conoce exactamente, muchas veces en este caso se utiliza el filtro aproximado:

$$\hat{F}(u,v) = \left[\frac{1}{H(u,v)} \frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + K} \right] G(u,v)$$

donde K es una constante.

Filtrado por cuadrados mínimos acotados

- el filtrado de Wiener presenta la dificultad de que se necesita conocer el espectro de potencia de la imagen y del ruido.
- en parte se soluciona asumiendo ruido blanco.
- este filtrado sólo requiere conocimiento del valor medio y varianza del ruido que son fáciles de estimar.
- este filtrado da una solución óptima desde el punto de vista teórico y no necesariamente desde una apreciación visual.

Filtrado por cuadrados mínimos acotados

- partiendo de la expresión original:

$$g(x, y) = h(x, y) \star f(x, y) + \eta(x, y)$$

se puede escribir como una operación vectorial:

$$\mathbf{g} = \mathbf{Hf} + \boldsymbol{\eta}$$

- si g(x,y) es una matriz de M x N, **g** es un vector de dimensiones de MN x 1 (igual que **f** y **η**), y **H** tiene dimensiones de MN x MN.

Filtrado por cuadrados mínimos acotados

• como H afecta (o está afectada) considerablemente por el ruido, es necesario estimar que tan suave es la imagen a procesar.

• el mejor estimador es la segunda derivada de la imagen (laplaciano).

• el objetivo es obtener el mínimo de una función de ajuste:

$$C = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\nabla^2 f(x, y)]^2$$

acotada por:

$$\|\mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2$$

Filtrado por cuadrados mínimos acotados

- la solución en el dominio de frecuencias es:

$$\hat{F}(u,v) = \left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \gamma |P(u,v)|^2} \right] G(u,v)$$

donde γ es una constante que debe ser ajustada y P(u,v) es la transformada de:

$$p(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Filtrado por cuadrados mínimos acotados

• para encontrar γ de manera interactiva se define un vector residuo **r**:

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}$$

donde **r** es función de γ.

• Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}\phi(\gamma) &= \mathbf{r}^T\mathbf{r} \\ &= \|\mathbf{r}\|^2\end{aligned}$$

Filtrado por cuadrados mínimos acotados

- que es una función monotónica creciente de γ.
- el criterio de ajuste es:

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 \pm a$$

Siendo a un parámetro de precisión.

- **r** se puede obtener en cada paso de:

$$R(u, v) = G(u, v) - H(u, v)\hat{F}(u, v)$$

Y luego:

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} r^2(x, y)$$

Filtrado por cuadrados mínimos acotados

- para calcular η primero calculemos la varianza de la imagen:

$$\sigma_\eta^2 = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}[\eta(x,y) - m_\eta]^2$$

$$m_\eta = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\eta(x,y)$$

Donde m_η es la media aritmética.

Filtrado por cuadrados mínimos acotados

- utilizando la misma expresión que para $\|\mathbf{r}\|^2$ y simplificando, tenemos que:

$$\|\boldsymbol{\eta}\|^2 = MN[\sigma_\eta^2 + m_\eta^2]$$

Lo cual me permite estimar η conociendo una estimación para el valor medio y la varianza del ruido.

Filtrado por media geométrica

• es posible generalizar el filtro de Wiener convirtiéndolo en un filtro de media geométrica:

$$\hat{F}(u,v) = \left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2}\right]^{\alpha}\left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \beta\left[\frac{S_\eta(u,v)}{S_f(u,v)}\right]}\right]^{1-\alpha} G(u,v)$$

donde α y β son constantes reales positivas.

• el filtro corresponde a las dos cantidades en corchetes.

Filtrado por media geométrica

- si $\alpha = 1$, el filtro se reduce al filtro de inversión directa.
- si $\alpha = 0$, el filtro se denomina filtro paramétrico de Wiener.
- si $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, es el filtro de Wiener.
- cuando $\alpha = 1/2$, el filtro es el producto de dos cantidades elevadas a la misma potencia.
- si $\beta = 1$ y $\alpha < 1/2$, el filtro se conporta cada vez más como un filtro de inversión.
- si $\beta = 1$ y $\alpha > 1/2$, el filtro se comporta cada vez más como un filtro de Wiener.